

Annalen der Physik und Chemie



PHYSICS
LIBRARY







ANNALEN
DER
PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND XXII.



ANNALEN DER PHYSIK UND CHEMIE.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.

NEUE FOLGE.

BAND XXII.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT ACHT UND FÜNFZIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERRN

H. VON HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

G. WIEDEMANN.

NEBST NEUN FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1884.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

2.56
PHYS

Inhalt.

Neue Folge. Band XXII.

Fünftes Heft.

	Seite
I. A. Winkelmann. Ueber die Diffusion von Gasen und Dämpfen	1
II. L. Boltzmann. Ueber eine von Hrn. Bartoli entdeckte Beziehung der Wärmestrahlung zum zweiten Hauptsatze .	31
III. — Ueber das Arbeitsquantum, welches bei chemischen Verbindungen gewonnen werden kann	39
IV. A. Oberbeck. Ueber electrische Schwingungen; insbesondere über die magnetisirende Wirkung derselben und über die Fortpflanzung magnetischer Schwingungen	73
V. W. Hallwachs. Ueber die electromotorische Kraft, den Widerstand und den Nutzeffect von Ladungssäulen (Accumulatoren)	84
VI. J. Stefan. Ueber die Berechnung der Inductionscoefficienten von Drahtrollen	107
VII. J. Fröhlich. Notiz zur Berechnung des Potenciales von Rollen	117
VIII. S. Wleügel u. S. Henrichsen. Ueber den Magnetismus organischer Körper	121
IX. J. Elster u. H. Geitel. Ueber die Electricität der Flamme	123
X. H. Merczyng. Ueber Fresnel's Wellenlängenmessungen .	129
XI. J. L. Andreae. Das Boyle'sche Gesetz. Ein Vorlesungsversuch.	134
XII. C. Kirn. Ueber einen Quecksilberunterbrecher, bei welchem die Oxydation des Quecksilbers vermieden ist	135

	Seite
XIII. G. Krebs. Drei Ozonapparate	139
XIV. V. Pierre. Apparat zur Demonstration der Gesetze der Zugelasticität	141
XV. — Apparat zur Veranschaulichung des Entstehens einer Lon- gitudinalwelle	142
XVI. — Galvanoskop für Vorlesungsversuche	143
XVII. — Apparat, um Wasser unter dem Recipienten der Luft- pumpe durch seine eigene Verdampfung möglichst schnell zum Gefrieren zu bringen	149

Geschlossen am 15. April 1884.

Sechstes Heft.

I. B. Bunsen. Ueber die langsame Verdichtung der Kohlen- säure an blanken Glasflächen und Kayser's Einwürfe dagegen	145
II. A. Winkelmann. Ueber die Diffusion von Gasen und Dämpfen	152
III. J. Fröhlich. Kritisches zur Theorie der Polarisation des gebeugten Lichtes	161
IV. C. Bender. Studien über Salzlösungen	175
V. E. Ketteler. Ueber Probleme, welche die Neumann'sche Reflexionstheorie nicht lösen zu können scheint. Die Metall- und Totalreflexion der doppeltbrechenden Medien	204
VI. — Duplik gegen Hrn. W. Voigt	217
VII. W. Voigt. Ueber die Verzögerung, welche beim Durchgange des Lichtes durch eine Platte eintritt, und über einige darauf gegründete Apparate	226
VIII. — Ueber den Durchgang des Lichtes durch eine planparallele Schicht eines circularpolarisirenden Mediums	237
IX. H. Muraoka. Herstellung der japanischen magischen Spiegel und Erklärung der magischen Erscheinungen derselben	246
X. R. Krüger. Die Abhängigkeit des von einer Influenzmaschine erster Art gelieferten Stromes von der Feuchtigkeit	253
XI. E. Dorn. Ueber den Einfluss des Extrastromes auf die Bewe- gung eines Magnetes innerhalb eines dämpfenden Multiplcators	263
XII. F. Himstedt. Zwei verschiedene Formen eines selbstthätigen Disjunctors	276
XIII. — Ueber eine Methode zur Bestimmung des Ohm	281
XIV. H. Meyer. Erwiderung auf die Bemerkungen des Hrn. A. von Waltenhofen zu meinen Untersuchungen über die Magneti- sirungsfuction des Stahles	286

XV. L. Boltzmann. Ableitung des Stefan'schen Gesetzes, betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur, aus der electromagnetischen Lichttheorie	291
XVI. G. Krebs. Elementarer Beweis des Satzes von Avogadro	295
XVII. W. Siemens. Ueber eine Einrichtung zur Darstellung der von der Pariser Conferenz zur Bestimmung der electricischen Einheiten angenommenen Lichteinheit	304

Geschlossen am 15. Mai 1884.

Siebentes Heft.

I. O. Lehmann. Ueber electricische Entladung in Gasen	305
II. R. Overbeck. Beiträge zu den Untersuchungen über Entstehung thermoelectrischer Ströme in einem aus derselben Substanz bestehenden continuirlichen Leiter	344
III. C. Fromme. Ueber die Aenderungen, welche der Molecularzustand des Eisens durch Glühen und Ablöschen erleidet	371
IV. W. Hankel. Ueber die bei einigen Gasentwickelungen auftretenden Electricitäten	387
V. W. v. Beetz. Ueber Normalelemente für electrometrische Messungen	402
VI. F. Kohlrausch. Ueber den Polabstand, den Inductions- und Temperaturcoefficient eines Magnetes und über die Bestimmung von Trägheitsmomenten durch Bifilarsuspension	411
VII. A. Schrauf. Ueber das Dispersionsäquivalent von Diamant	424
VIII. H. Schneebeil. Untersuchungen im Gebiet der strahlenden Wärme	430
IX. W. Weber. Ueber Construction des Bohnenberger'schen Reversionspendels zur Bestimmung der Pendellänge für eine bestimmte Schwingungsdauer im Verhältniss zu einem gegebenen Längenmaass	439
X. H. Hertz. Ueber das Gleichgewicht schwimmender elastischer Platten	449
XI. J. Kollert. Die Electricität der Flamme	456
XII. H. Meyer. Ueber eine neue Anordnung des Messdrahtes in der Wheatstone-Kirchhoff'schen Brückencombination	460
XIII. J. Bodyński. Wheatstone's Rheostat mit Quecksilbercontact	463

Geschlossen am 15. Juni 1884.

Achstes Heft.

	Seite
I. N. v. Klobukow. Ueber ein neues Verfahren zur Bestimmung der Dampfdichte niedrig siedender Körper	465
II. — Ueber ein neues Verfahren zur Bestimmung der Dampfdichte hochsiedender Körper	493
III. W. C. Röntgen. Ueber den Einfluss des Druckes auf die Viscosität der Flüssigkeiten, speciell des Wassers	510
IV. E. Warburg u. J. Sachs. Ueber den Einfluss der Dichtigkeit auf die Viscosität tropfbarer Flüssigkeiten	518
V. F. Stenger. Zur Wärmeleitungsfähigkeit des Turmalins	522
VI. E. Blasius. Die Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme	528
VII. F. Narr. Ueber das Eindringen der Electricität in Gase	550
VIII. E. Dorn. Bemerkung über die Stöpselrheostaten von Siemens und Halske	558
IX. A. König. Zur Kenntniss dichromatischer Farbensysteme	567
X. A. König u. C. Dieterici. Ueber die Empfindlichkeit des normalen Auges für Wellenlängenunterschiede des Lichtes	579
XI. E. Ketteler. Die Metall- und Totalreflexion der isotropen Medien entwickelt im Sinne des Neumann'schen Systemes	590
XII. S. P. Langley. Experimentelle Bestimmung der Wellenlängen im unsichtbaren prismatischen Spectrum	598
XIII. G. Krebs. Vorlesungsversuche über die Beziehung zwischen dem durch Reflexion und dem durch Brechung erzeugten polarisirten Licht	612
XIV. E. Lommel. Ueber einen Gefrierapparat	614
XV. Electricische Einheiten und Lichteinheiten	616
Berichtigungen	616

Geschlossen am 1. Juli 1884.

Nachweis zu den Figurentafeln.

- Taf. I. Andreae, Fig. 1. — Kirn, Fig. 2—4. — Krebs, Fig. 5—7. — Pierre, Fig. 8—16.
- Taf. II. Bender, Fig. 1—5. — Krüger, Fig. 6.
- Taf. III u. IV. O. Lehmann.
- Taf. V. Overbeck, Fig. 1—10. — H. Müller, Fig. 11—13. — Bodýński, Fig. 14—15.
- Taf. VI. von Klobukow, Fig. 1—16.
- Taf. VII. Röntgen, Fig. 1—1a. — Stenger, Fig. 2—4. — Blasius, Fig. 5—8. — Dorn, Fig. 9—12. — Krebs, Fig. 13—16. — Lommel, Fig. 17.
- Taf. VIII. König und Dieterici.
- Taf. IX. Langley.



$$A_z = \frac{\gamma^2}{\omega} \left(q - \frac{q_1}{t^2} \right) v'',$$

$$B_z = \frac{\gamma}{\omega} \left(q - \frac{q_1}{t^2} \right) (\alpha w'' - \gamma u'') = - \frac{\gamma}{\omega} \left(q - \frac{q_1}{t^2} \right) v'',$$

$$\Gamma_z = - \frac{\alpha \gamma}{\omega} \left(q - \frac{q_1}{t^2} \right) v''.$$

Diese Werthe sind für beide Wellen in die Formel:

$$\Sigma_1 = \bar{A}_z \bar{u}' + B_z \bar{v}' + \Gamma_z \bar{w}'$$

einzusetzen. Unter Einführung der Abkürzung:

$$q - \frac{q_1}{t^2} = \vartheta$$

erhält man dann:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = \vartheta & \left[\frac{\gamma_1}{\omega_1} (r_1' v_1'' - v_1' r_1'') + \frac{\gamma_2}{\omega_2} (r_2' v_2'' - v_2' r_2'') \right. \\ & \left. + \left(\frac{\gamma_1}{\omega_1} r_2' v_2'' + \frac{\gamma_2}{\omega_2} r_1' v_2'' \right) (\alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 \gamma_2) - \left(\frac{\gamma_1}{\omega_1} r_1'' v_2' + \frac{\gamma_2}{\omega_2} r_2'' v_1' \right) \right]. \end{aligned}$$

Dies gewinnt eine einfachere Form, wenn man gemäss den bezüglichen früheren Betrachtungen¹⁾ einführt, dass bei so bestimmten A_z, B_z, Γ_z circulare Schwingungen eintreten, und zwar gilt:

$$\begin{aligned} r_1 &= D_1 \sin \frac{1}{t} \left(t - \frac{q_1}{\omega_1} + \delta_1 \right) \\ v_1 &= - D_1 \cos \frac{1}{t} \left(t - \frac{q_1}{\omega_1} + \delta_1 \right) \\ r_2 &= D_2 \sin \frac{1}{t} \left(t - \frac{q_2}{\omega_2} + \delta_2 \right) \\ v_2 &= D_2 \cos \frac{1}{t} \left(t - \frac{q_2}{\omega_2} + \delta_2 \right), \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} r_1 \\ v_1 \\ r_2 \\ v_2 \end{aligned}} \right\} 9.$$

wo die erste Welle die links, die zweite die rechts rotirende ist.

Hiernach ist nämlich:

$$\begin{aligned} r_1'' &= - \frac{1}{t} v_1', & r_2'' &= + \frac{1}{t} v_2', \\ v_1'' &= + \frac{1}{t} r_1', & v_2'' &= - \frac{1}{t} r_2', \text{ also:} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} r_1'' \\ v_1'' \\ r_2'' \\ v_2'' \end{aligned}} \right\} 10.$$

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{\vartheta}{t} \left[\frac{\gamma_1}{\omega_1} (r_1'^2 + v_1'^2) - \frac{\gamma_2}{\omega_2} (r_2'^2 + v_2'^2) \right. \\ & \left. + \left(\frac{\gamma_1}{\omega_1} - \frac{\gamma_2}{\omega_2} \right) ((\alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 \gamma_2) r_1' r_2' + v_1' v_2') \right]. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Sigma_1 \\ \frac{\gamma_1}{\omega_1} \\ \frac{\gamma_2}{\omega_2} \end{aligned}} \right\} 11.$$

1) W. Voigt, l. c. p. 892.

Durch die Werthe (1), (7), (8) und (11) wird schliesslich:

$$S = \frac{\varepsilon_0 \gamma}{\omega} (r_e'^2 + v_e'^2 - r_r'^2 - v_r'^2) \\ - \frac{\gamma_1}{\omega_1} \left(\varepsilon + \frac{\vartheta}{\tau} \right) (r_1'^2 + v_1'^2 + v_1' v_2' + r_1' r_2' (\alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 \gamma_2)) \\ - \frac{\gamma_2}{\omega_2} \left(\varepsilon - \frac{\vartheta}{\tau} \right) (r_2'^2 + v_2'^2 + v_1' v_2' + r_1' r_2' (\alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 \gamma_2))$$

Nun ist in unkrystallinischen gewöhnlichen Medien¹⁾:

$$\frac{\varepsilon_0}{\omega} = \omega (m_0 + r_0 - n_0 \tau^2) \text{ kurz} = \omega \mu_0$$

und in circularpolarisirenden²⁾ für die linksrotirende Welle:

$$\frac{\varepsilon + \frac{\vartheta}{\tau}}{\omega_1} = \omega_1 \left[m + r - n \tau^2 + \tau \left(p - \frac{p_1}{\tau^2} \right) \right] \text{ kurz} = \omega_1 (\mu + \pi),$$

für die rechtsrotirende:

$$\frac{\varepsilon - \frac{\vartheta}{\tau}}{\omega_2} = \omega_2 \left[m + r - n \tau^2 - \tau \left(p - \frac{p_1}{\tau^2} \right) \right] \text{ kurz} = \omega_2 (\mu - \pi),$$

also, da zudem:

$$\frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha_1}{\omega_1} = \frac{\alpha_2}{\omega_2} \text{ ist:}$$

$$\frac{\alpha}{\omega} S = \mu_0 \alpha \gamma (r_e'^2 + v_e'^2 - r_r'^2 - v_r'^2) \\ - \alpha_1 \gamma_1 (\mu + \pi) (r_1'^2 + v_1'^2 + v_1' v_2' + r_1' r_2' (\alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 \gamma_2)) \\ - \alpha_2 \gamma_2 (\mu - \pi) (r_2'^2 + v_2'^2 + v_1' v_2' + r_1' r_2' (\alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 \gamma_2)). \quad 12.$$

Mit diesem Ausdruck sind die Gleichungen der Continuität zu combiniren. Sie lassen sich für zwei unkrystallinische Medien schreiben³⁾:

$$v_e + v_r = v_1 + v_2 \quad 13_a.$$

$$\gamma (r_e - r_r) = \gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2 \quad 13_b.$$

$$\mu_0 \alpha (r_e + r_r) = \nu (\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2) \quad 13_c.$$

1) W. Voigt, l. c. p. 884.

2) W. Voigt, l. c. p. 892; dabei ist zu berücksichtigen, dass hier oben der allgemeinste Werth der Componenten eingeführt ist, dort bereits ein vereinfachter. Vgl. p. 878 u. 882.

3) W. Voigt, l. c. p. 904.

Sind die beiden Medien gewöhnliche isotrope, so steht an Stelle von ν in der letzten Formel μ^1); ich habe früher darauf hingewiesen, dass in dieser Gleichung eine gewisse Unsicherheit liegt und die gewöhnliche Neumann'sche Fassung:

$$\alpha(r_e + r_r) = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \quad | \quad 13'.$$

auf Voraussetzungen beruht, die nicht überall von vorn herein als zutreffend anzusehen sind.²⁾ Es sei daher ν als unbestimmt vorläufig beibehalten.

Die Erfahrung verlangt, dass mit Hülfe der Formeln (13) sich die Formel (12) auf eine in den v und r lineäre reduciren lasse.

Multiplirt man nach ausgeführter Differentiation nach t die Gleichung (13_b) mit (13_c) und zieht sie von (12) ab, so erhält man, wenn kurz $\mu + \pi = \mu_1$, $\mu - \pi = \mu_2$ gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} S \frac{\alpha}{\omega} &= \mu_0 \alpha \gamma (v_e'^2 - v_r'^2) \\ &+ \nu (r_1'^2 \alpha_1 \gamma_1 + r_2'^2 \alpha_2 \gamma_2 + r_1' r_2' (\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1)) \\ &- \mu_1 \alpha_1 \gamma_1 (v_1'^2 + r_1'^2 + v_1' v_2' + r_1' r_2' (\alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 \gamma_2)) \\ &- \mu_2 \alpha_2 \gamma_2 (v_2'^2 + r_2'^2 + v_1' v_2' + r_1' r_2' (\alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 \gamma_2)) \end{aligned} \right| \quad 14.$$

Wollte man nun das Kirchhoff'sche Princip in der engsten Fassung anwenden und $S=0$ setzen, so erhielte man keinen durch (13_a) theilbaren Ausdruck. Dies lässt sich aber erreichen, wenn man S gleich einem vollständigen Differentialquotienten nach der Zeit setzt.

Hierzu sei bemerkt, dass aus den für circularpolarisirte Wellen geltenden Relationen:

$$\tau r_1' = -v_1, \quad \tau r_2' = v_2, \quad \tau v_1' = r_1, \quad \tau v_2' = -r_2$$

folgt:

$$\begin{aligned} r_1'^2 - v_1'^2 &= -\frac{1}{\tau} \frac{\partial v_1 r_1}{\partial t}, & r_2'^2 - v_2'^2 &= +\frac{1}{\tau} \frac{\partial v_2 r_2}{\partial t}, \\ r_1' r_2' + v_1' v_2' &= \frac{1}{2\tau} \frac{\partial (v_2 r_1 - v_1 r_2)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Man kann also durch Elimination von r_1' und r_2' aus (14) und durch geeignete Bestimmung von S die Form erhalten:

1) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 904. 1883.

2) l. c. p. 900.

$\mu_0 \alpha \gamma (v_e'^2 - v_r'^2) = v_1'^2 \alpha_1 \gamma_1 (2\mu_1 - \nu) + v_2'^2 \alpha_2 \gamma_2 (2\mu_2 - \nu)$
 $+ v_1' v_2' [(1 - \alpha_1 \alpha_2 - \gamma_1 \gamma_2)(\alpha_1 \gamma_1 \mu_1 + \alpha_2 \gamma_2 \mu_2) + \nu (\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1)],$
 welche durch (13_a) dividirt gibt:

$\mu_0 \alpha \gamma (v_e' - v_r') = v_1 \alpha_1 \gamma_1 v_1' + v_2 \alpha_2 \gamma_2 v_1' \quad | \quad 13_d.$
 falls man:

$$v_1 = 2\mu_1 - \nu, \quad v_2 = 2\mu_2 - \nu \quad 15_a.$$

setzt, und ν so bestimmt, dass:

$$\begin{aligned} & v_1 \alpha_1 \gamma_1 + v_2 \alpha_2 \gamma_2 \\ &= (1 - \alpha_1 \alpha_2 - \gamma_1 \gamma_2)(\alpha_1 \gamma_1 \mu_1 + \alpha_2 \gamma_2 \mu_2) + \nu (\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1). \end{aligned}$$

Dies lässt sich schreiben:

$(1 + \alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 \gamma_2)(\alpha_1 \gamma_1 \mu_1 + \alpha_2 \gamma_2 \mu_2) = \nu (\alpha_1 + \alpha_2)(\gamma_1 + \gamma_2),$
 woraus folgt:

$$\nu = \frac{(\alpha_1 \gamma_1 \mu_1 + \alpha_2 \gamma_2 \mu_2)(1 + \alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 \gamma_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\gamma_1 + \gamma_2)} \quad | \quad 15_b.$$

Aber die so gewonnene in v_1' und v_2' lineäre Formel (13_d) ist nicht die einzige, welche mit der obigen Fassung des Principis vereinbar ist; dazu müsste vielmehr ein Ausdruck von der Form:

$$(v_1' + v_2')(Ar_1' + Br_2' + Cv_1' + Dv_2'),$$

kein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit sein können. Da aber:

$$v_1' r_1' = -\frac{1}{2\tau} \frac{\partial v_1^2}{\partial t}, \quad v_2' r_2' = \frac{1}{2\tau} \frac{\partial v_2^2}{\partial t}$$

$$v_1' r_2' - r_1' v_2' = \frac{1}{\tau} \frac{\partial v_1 v_2}{\partial t}$$

ist, so ist $A(v_1' + v_2')(r_1' - r_2')$ ein vollständiger Differentialquotient der verlangten Art, nämlich:

$$= -\frac{A}{2\tau} \frac{\partial (v_1 + v_2)^2}{\partial t},$$

und wäre $A(r_1' - r_2')$ noch zu Gleichung (13_d) zuzufügen erlaubt. Man kann diese Unbestimmtheit nur durch eine Hilfsannahme beseitigen, z. B. indem man das Kirchhoffsche Princip in der Form ausspricht, dass von der in der Grenze geleisteten Arbeit diejenigen Glieder, welche über eine Schwingungsdauer summirt einen von Null verschiedenen Werth ergeben, für sich verschwinden müssen. Denn die Differentialquotienten der

trigonometrischen Ausdrücke geben über eine Schwingungsdauer integriert Null.

Sogleich die ganze Arbeit während einer Schwingungsdauer Null zu setzen führt nicht zur Lösung des gestellten Problems, da dies Verfahren nur eine Gleichung liefert, aber zwei noch erforderlich sind.

Man gelangt hiernach also zu folgenden vier Grenzgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} v_e + v_r &= v_1 + v_2 \\ \mu_0 \alpha \gamma (v_e - v_r) &= v_1 \alpha_1 \gamma_1 v_1 + v_2 \alpha_2 \gamma_2 v_2 \\ \gamma (r_e - r_r) &= \gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2 \\ \mu_0 \alpha (r_e + r_r) &= v (\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2) \end{aligned} \right\} 13.$$

worin v , v_1 , v_2 die in (15) festgestellte Bedeutung haben.

Ich führe für die v und r folgende Werthe ein:

$$\left. \begin{aligned} r_e &= E_p \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{q}{\omega} \right) \\ v_e &= E'_s \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{q}{\omega} \right) + E''_s \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{q}{\omega} \right) \\ r_r &= R'_p \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{q_r}{\omega} \right) + R''_p \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{q_r}{\omega} \right) \\ v_r &= R'_s \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{q_r}{\omega} \right) + R''_s \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{q_r}{\omega} \right) \\ r_1 &= D'_1 \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{q_1}{\omega_1} \right) + D''_1 \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{q_1}{\omega_1} \right) \\ v_1 &= D''_1 \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{q_1}{\omega_1} \right) - D'_1 \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{q_1}{\omega_1} \right) \\ r_2 &= D'_2 \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{q_2}{\omega_2} \right) + D''_2 \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{q_2}{\omega_2} \right) \\ v_2 &= -D''_2 \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{q_2}{\omega_2} \right) + D'_2 \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{q_2}{\omega_2} \right). \end{aligned} \right\} 16.$$

Benutzt man die Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \mu_0 \alpha \gamma + v_1 \alpha_1 \gamma_1 & \sigma_2 &= \mu_0 \alpha \gamma + v_2 \alpha_2 \gamma_2 \\ \delta_1 &= \mu_0 \alpha \gamma - v_1 \alpha_1 \gamma_1 & \delta_2 &= \mu_0 \alpha \gamma - v_2 \alpha_2 \gamma_2 \\ s_1 &= \mu_0 \alpha \gamma_1 + v \alpha_1 \gamma & s_2 &= \mu_0 \alpha \gamma_2 + v \alpha_2 \gamma \\ d_1 &= \mu_0 \alpha \gamma_1 - v \alpha_1 \gamma & d_2 &= \mu_0 \alpha \gamma_2 - v \alpha_2 \gamma \end{aligned}$$

so gelangt man leicht zu den folgenden Resultaten:

$$\begin{aligned}
 NR'_s &= E'_s (s_1 \delta_2 + s_2 \delta_1) \\
 NR''_s &= E''_s (s_1 \delta_2 + s_2 \delta_1) + E_p (\sigma_1 \delta_2 - \sigma_2 \delta_1) \\
 NR'_p &= -E_p (\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1) + E''_s (s_2 d_1 - s_1 d_2) \\
 NR''_p &= E'_s (s_1 d_2 - s_2 d_1) \\
 ND'_1 &= 2\alpha\gamma\mu_0 (E_p \sigma_2 - E''_s s_2) \\
 ND''_1 &= 2\alpha\gamma\mu_0 E'_s s_2 \\
 ND'_2 &= 2\alpha\gamma\mu_0 (E_p \sigma_1 + E''_s s_1) \\
 ND''_2 &= -2\alpha\gamma\mu_0 E'_s s_1 \\
 N &= s_1 \sigma_2 + s_2 \sigma_1.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Setzt man, was die Beobachtungen als zulässig erscheinen lassen:

$$\pi = 0 \text{ also } \mu_1 = \mu_2 = \mu,$$

so wird $\nu = \mu (\alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 \gamma_2)$. Hierin ist $\alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 \gamma_2$ der Cosinus des Winkels zwischen den beiden gebrochenen Wellennormalen. Dieser Winkel beträgt höchstens $1/10000$ (bekanntlich ist es nur durch ganz besondere Hilfsmittel möglich die Doppelbrechung der circularpolarisirenden Medien direct wahrzunehmen), es ist also die Klammer bis auf $1/100\,000\,000$ gleich 1. Nimmt man noch $\mu_0 = \mu$, so wird die Grenzbedingung (13_e) für die Componente der Verschiebung normal zur Grenze mit der gewöhnlichen Neumann'schen (13_{e'}) identisch und die neue Bedingung (13_d) lautet wegen $v_1 = v_2 = \mu_0$:

$$\alpha\gamma(v_e - v_r) = \alpha_1 \gamma_1 v_1 + \alpha_2 \gamma_2 v_2.$$

Dadurch vereinfachen sich die Resultate (17) erheblich, und es wird:

$$\begin{aligned}
 NR'_s &= E'_s (\cos(\varphi + \varphi_2) \sin(\varphi + \varphi_1) \sin(\varphi - \varphi_2) \\
 &\quad + \cos(\varphi + \varphi_1) \sin(\varphi + \varphi_2) \sin(\varphi - \varphi_1)) \\
 NR''_s &= E''_s (\cos(\varphi + \varphi_2) \sin(\varphi + \varphi_1) \sin(\varphi - \varphi_2) \\
 &\quad + \cos(\varphi + \varphi_1) \sin(\varphi + \varphi_2) \sin(\varphi - \varphi_1)) \\
 &\quad + \frac{1}{2} E_p \sin 2\varphi (\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2) \\
 NR'_p &= -E_p (\cos(\varphi - \varphi_1) \sin(\varphi + \varphi_1) \sin(\varphi - \varphi_2) \\
 &\quad + \cos(\varphi - \varphi_2) \sin(\varphi + \varphi_2) \sin(\varphi - \varphi_1)) \\
 &\quad + E''_s (\sin(\varphi + \varphi_2) \sin(\varphi - \varphi_1) - \sin(\varphi + \varphi_1) \sin(\varphi - \varphi_2)) \\
 NR''_p &= -E'_s (\sin(\varphi + \varphi_2) \sin(\varphi - \varphi_1) \\
 &\quad - \sin(\varphi + \varphi_1) \sin(\varphi - \varphi_2))
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 ND_1' &= (E_p \cos(\varphi - \varphi_2) - E_s'') \sin(\varphi + \varphi_2) \sin 2\varphi \\
 ND_1'' &= E_s' \sin(\varphi + \varphi_2) \sin 2\varphi \\
 ND_2' &= (E_p \cos(\varphi - \varphi_1) + E_s'') \sin(\varphi + \varphi_1) \sin 2\varphi \\
 ND_2'' &= -E_s' \sin(\varphi + \varphi_1) \sin 2\varphi \\
 N &= (\cos(\varphi - \varphi_1) + \cos(\varphi - \varphi_2)) \sin(\varphi + \varphi_1) \sin(\varphi + \varphi_2)
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} ND_1' \\ ND_1'' \\ ND_2' \\ ND_2'' \\ N \end{aligned}} \right\} 18.$$

Setzt man $\varphi_1 = \varphi_2$, so treten die gewöhnlichen Reflexionsformeln für unkrystallinische Medien auf, nämlich:

Man bemerkt, dass einfallendes, linear polarisirtes Licht stets elliptisch polarisirt reflectirt wird, auch wenn seine Schwingungsrichtung parallel oder normal zur Einfallsebene war. Die Rotationsrichtung ist bei rechts- und linksdrehenden Medien entgegengesetzt.

Für senkrechten Einfall wird besonders einfach, falls man $E_s = E_s' = 0$ nimmt und mit n_1 und n_2 die beiden Brechungscoefficienten des Mediums bezeichnet:

$$R_p = -E_p \frac{2(n_1 n_2 - 1)}{(1 + n_1)(1 + n_2)},$$

$$R_s' = E_p \frac{n_2 - n_1}{(1 + n_1)(1 + n_2)},$$

$$R_s' = E_s' \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_1)}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_1)}, \quad R_s'' = E_s'' \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_1)}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_1)},$$

$$R_p' = -E_p \frac{\sin(\varphi - \varphi_1)}{\sin(\varphi + \varphi_1)}, \quad R_p'' = 0,$$

$$D_1' + D_2' = D_p = E_p \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \varphi_1)}, \quad D_1'' + D_2'' = 0,$$

$$D_1'' - D_2'' = D_s' = E_s' \frac{\sin 2\varphi}{\cos(\varphi - \varphi_1) \sin(\varphi + \varphi_1)},$$

$$-D_1' + D_2' = D_s'' = E_s'' \frac{\sin 2\varphi}{\cos(\varphi - \varphi_1) \sin(\varphi + \varphi_1)}.$$

Die Ellipticität ist bei den bekannten Medien nur sehr gering, das Verhältniss der Axen nämlich $(n_2 - n_1)/2(n_1 n_2 - 1)$, d. i. bei Quarz ca. $1/25000$. Das Interesse der vorstehenden Untersuchung ist also ein ausschliesslich theoretisches, insofern gezeigt ist, wie man bei geeigneter Erweiterung auch die Vorgänge an der Grenze circularpolarisirender Medien aus dem Kirchhoff'schen Princip ableiten kann.

XVI. *Duplik gegen Hrn. E. Ketteler; von W. Voigt.*

Hr. Ketteler hat auf meine Kritik¹⁾ der Grundgleichungen seiner Lichttheorie ausführlich geantwortet.²⁾ Seine Erwiderung veranlasst mich, auf einige Punkte zurückzukommen, über welche ich mich früher vielleicht zu kurz oder undeutlich geäußert habe. Zur Aufgabe irgend eines meiner Bedenken sehe ich mich indess nicht veranlasst.

1. Ich habe Elasticitätstheorie die Anwendung der allgemeinen Dynamik auf diejenigen Massensysteme genannt, welche wir „gebräuchlicher Weise“ als elastische Körper ansehen.³⁾ Hr. Ketteler monirt die Unklarheit dieses Ausdrucks⁴⁾; ich bemerke daher zur Erläuterung Folgendes. Die „gebräuchliche“ Anschauung ist die atomistische im weitesten Sinne des Wortes, nach welcher die Körper aus kleinsten Theilchen bestehen, die nicht etwa materiell miteinander verbunden sind, sondern sich durch ihre Wechselwirkungen im

1) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 691. 1883.

2) E. Ketteler, Wied. Ann. 21. p. 178. 1884. In dieser Replik sind einige persönliche Bemerkungen des Hrn. Ketteler — so über das Ueberraschende meines Angriffs, über meine frühere Billigung seiner Theorie (die durch ein unvollständiges Citat belegt wird), über meine wiederholten „plötzlichen“ und „eiligen“ Stellungswechsel — in hohem Grade geeignet, eine irrige Auffassung der Sachlage zu veranlassen. Ich beschränke mich ihnen gegenüber auf die Bemerkungen, dass ich mit der (Hrn. Ketteler zuvor angekündigten) Publication meiner Kritik erst vorgegangen bin, nachdem eine private Mittheilung meiner Bedenken lange Zeit unbeantwortet geblieben war, und dass ich von der ersten bis zur letzten darauf bezüglichen Publication meine Ansichten unverändert beibehalten habe, was aus diesen selbst zur Genüge hervorgehen dürfte.

3) W. Voigt, l. c. p. 691. Von einer Beschränkung auf feste Körper ist nicht die Rede. Die ganze Elasticitätstheorie gilt auch für Flüssigkeiten und Gase, aber mit speciellen Werthen der Constanten. Nur sind solche Verschiebungen auszuschliessen, welche die Theilchen aus dem Bereich ihrer stabilen Ruhelagen herausführen, denn diese gehören in die Hydrodynamik.

4) E. Ketteler, l. c. p. 181 u. f.

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXII.

*I. Ueber die Diffusion von Gasen und Dämpfen;
von A. Winkelmann.*

Die Diffusion der Gase ist theoretisch vorzugsweise von Maxwell, Stefan, Boltzmann und O. E. Meyer behandelt worden; es hat sich gezeigt, dass der Diffusionscoefficient aus der Weglänge und der molecularen Geschwindigkeit der ineinander diffundirenden Gase sich berechnen lässt. Während aber die Formel von Maxwell¹⁾, resp. Stefan²⁾ einen constanten Diffusionscoefficienten liefert, ist nach der Meyer'schen Formel³⁾ der Coefficient von dem Mischungsverhältniss abhängig, in welchem die Gase stehen.

Als Hr. Meyer seine Theorie aufstellte, war eine Entscheidung zwischen seiner und der Stefan'schen Formel nicht möglich, weil es an Beobachtungen hierfür fehlte. Nur ein Versuch von Graham über die Diffusion von Kohlensäure in Luft, bei welcher die Luft in der Mischung vorherrschend war, konnte zu einer Vergleichung herangezogen werden. Diese fiel zu Gunsten der Meyer'schen Theorie aus, wenn auch eine endgültige Entscheidung nicht gegeben war.⁴⁾

Hr. v. Obermayer⁵⁾ zeigte durch zahlreiche Versuche, dass der Diffusionscoefficient von der Länge der Diffusionszeit abhängig ist, und zwar in der Art, dass kleinen Zeiten kleinere Werthe des Diffusionscoefficienten entsprechen, und dass diese Werthe sich mit wachsender Zeit rasch einem

1) Maxwell, Phil. Mag. 20. p. 21. 1860.

2) Stefan, Wien. Ber. 65. p. 323. 1872.

3) O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase. p. 173. 1877.

4) O. E. Meyer, l. c. p. 180.

5) v. Obermayer, Wien. Ber. 85. p. 147. 748. 1882.

Grenzwerthe nähern. Diese Abhängigkeit des Diffusionscoëfficienten von der Zeit ist nach Hrn. v. Obermayer¹⁾ darin begründet, dass der fragliche Coëfficient von dem Dichtigkeitsgefälle abhängt, indem derselbe grösser wird, wenn das Gefälle abnimmt. Die v. Obermayer'schen Versuche zeigen also, dass der Diffusionscoëfficient der Gase keine constante, sondern eine veränderliche Grösse ist. Die beobachtete Veränderung lässt sich indes nicht unmittelbar durch die Theorie des Hrn. O. E. Meyer erklären, da nach dieser der Diffusionscoëfficient vom Dichtigkeitsgefälle unabhängig ist.

Hr. Waitz²⁾ hat die Frage über die Veränderlichkeit des Diffusionscoëfficienten von neuem aufgenommen, indem er die Diffusion von Kohlensäure in freier Luft nach einer optischen Methode, welche es möglich machte, den Diffusionscoëfficienten an verschiedenen Stellen des Apparates der Zeit nach zu verfolgen, beobachtete. Bei diesen Versuchen stellte sich ebenfalls heraus, dass der Diffusionscoëfficient nicht constant ist. Derselbe nimmt vielmehr für jeden Querschnitt mit der Zeit ab³⁾ und erreicht einen bestimmten constanten Grenzwert, welcher aber für die verschiedenen Querschnitte des Gefässes verschieden ist. Hierdurch ist also in Uebereinstimmung mit den Versuchen des Hrn. v. Obermayer bewiesen, dass die Maxwell'sche, resp. Stefan'sche Formel nicht den Thatsachen entspricht. Aber auch die Meyer'sche Formel kann die Versuche des Hrn. Waitz nicht darstellen. Denn nach den letzteren hängt der Diffusionscoëfficient nicht bloß von dem Mischungsverhältniss der beiden Gase in dem betrachteten Querschnitte ab, sondern auch noch von anderen Umständen; zeigten doch die Versuche verschiedene Werthe des Diffusionscoëfficienten, wenn dieser

1) v. Obermayer, Wien. Ber. 87. 1883. Reper. d. Phys. 19. p. 630. 1883.

2) Waitz, Wied. Ann. 17. p. 201. 1882.

3) Der scheinbare Widerspruch dieses Resultates mit dem von Hrn. v. Obermayer gefundenen wird dadurch erklärt, dass die Beobachtungen des Hrn. v. Obermayer den mittleren Diffusionscoëfficienten der ganzen Gasmasse darstellen, während die Waitz'schen Versuche sich auf die einzelnen Schichten beziehen. Vgl. Waitz, Wied. Ann. 17. p. 351. 1882. v. Obermayer, Reper. d. Phys. 19. p. 639. 1883.

bei dem gleichen Mischungsverhältnisse an verschiedenen Stellen des Gefässes ermittelt wurde. Da ferner der Diffusionscoefficient nach den Beobachtungen des Hrn. Waitz einen constanten, wenn auch für jeden Querschnitt verschiedenen Grenzwert erreicht, so wird derselbe schliesslich von dem Mischungsverhältniss der Gase unabhängig und liefert so wiederum ein Resultat, welches durch die Meyer'sche Formel nicht dargestellt wird.¹⁾

Es bleibt nun noch eine offene Frage, ob die Meyer'sche Formel nicht genügt, den Diffusionscoefficienten, welcher der Natur der Versuche nach von der Zeit unabhängig ist, darzustellen. Man denke sich eine beiderseits offene Röhre, deren oberste Grenzschicht Luft unter dem Drucke P , deren unterste Grenzschicht Luft unter dem Drucke p und Kohlensäure unter dem Drucke $(P - p)$ enthalte. Wenn durch irgend ein Mittel diese Druckvertheilung an den Enden erhalten bleibt, so wird sich ein stationärer Zustand herstellen, bei welchem durch jeden Querschnitt der Röhre die gleiche Menge Kohlensäure, resp. Luft in derselben Zeit hindurchgeht, und bei welchem das Mischungsverhältniss der beiden Gase in jedem Querschnitt von der Zeit unabhängig wird. Aus der durch den Querschnitt in der Zeiteinheit durchtretenden Gasmenge lässt sich der Diffusionscoefficient, welcher einen bestimmten Mittelwerth darstellt, berechnen. Es wäre dann zu untersuchen, wie sich der Diffusionscoefficient ändert, wenn man dem Drucke $(P - p)$ der Kohlen-

1) In einer Arbeit „Ueber die Veränderlichkeit der Diffusionscoefficienten zwischen Kohlensäure und Luft“, auf welche Hr. E. Wiedemann mich aufmerksam zu machen die Güte hatte, bringt Hr. V. Hausmaninger, Wien. Ber. 86. 2. Abth. 1882, gegen die Berechnung der Waitz'schen Versuche wichtige Einwendungen vor, indem er zeigt, dass den von Hrn. Waitz berechneten Diffusionscoefficienten eine andere Bedeutung zukommt, als ihnen H. Waitz zuschreibt. Hr. Hausmaninger unterzieht hierauf die Waitz'schen Versuche einer neuen Berechnung, aus welcher hervorgeht, dass die Veränderlichkeit des Diffusionscoefficienten zwischen Kohlensäure und Luft zwar sehr wahrscheinlich ist, dieselbe aber wegen der allzugerungen Uebereinstimmung der zu gleichen Mischungsverhältnissen gehörigen Werthe des Diffusionscoefficienten noch nicht zweifellos erwiesen ist.

säure bei gleichbleibendem Gesamtdruck P verschiedene Werthe gibt. Man kann den eben beschriebenen Vorgang mit Hülfe von Dämpfen annähernd realisiren. Schon Hr. Stefan¹⁾ hat Versuche über die Verdampfung aus engen Röhren angestellt und sie mit Hülfe seiner Theorie der Diffusion berechnet. Diese Versuche sind indes nicht geeignet, die Frage, ob der Diffusionscoefficient von dem Mischungsverhältniss des Dampfes und Gases abhängig ist, sicher zu beantworten, weil eben Hr. Stefan von vornherein seiner Berechnung die Annahme zu Grunde legte, dass der Diffusionscoefficient constant sei.

In der folgenden Arbeit stellt

- § 1. den Plan und die Methode der Untersuchung dar,
- § 2. die Beobachtungen über die Diffusion des Wasserdampfes,
- § 3. die Berechnung des Quotienten der Diffusionscoefficienten,
- § 4. die Vergleichung dieser mit den nach der Theorie von Hrn. O. E. Meyer berechneten Werthen,
- § 5. die Berechnung des Diffusionscoefficienten aus den Beobachtungen,
- § 6. die Resultate über die Diffusion des Aetherdampfes,
- § 7. diejenigen des Alkoholdampfes,
- § 8. Schlussbemerkungen.

§ 1. Plan und Methode der Untersuchung.

Die von Hrn. Meyer für die Diffusion zweier Gase aufgestellte Formel lautet²⁾:

$$D = \frac{\pi}{8N} \left\{ \frac{N_2 \omega_1^2}{C_1} + \frac{N_1 \omega_2^2}{C_2} \right\}.$$

Hier bedeutet N_1 die Anzahl der in der Raumeinheit vorhandenen Theilchen des ersten, N_2 die des zweiten Gases. N ist gleich $N_1 + N_2$.

ω_1 , resp. ω_2 sind die molecularen Geschwindigkeiten der beiden Gase.

1) Stefan, Wien. Ber. 68. 2. Abth. p. 385. 1874.

2) Nach Verbesserung eines Druckfehlers, den schon Hr. Waitz bemerkt hat.

C_1 bedeutet die Zahl der Zusammenstösse, welche ein Molecül des ersten Gases in der Zeiteinheit erfährt:

$$C_1 = N_1 \pi \zeta_1^2 \omega_1 \sqrt{2} + N_2 \pi \sigma^2 \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

C_2 hat dieselbe Bedeutung für das zweite Gas:

$$C_2 = N_2 \pi \zeta_2^2 \omega_2 \sqrt{2} + N_1 \pi \sigma^2 \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Führt man in diese Werthe die mittleren Weglängen der Molecüle ein nach den Gleichungen:

$$N \pi \zeta_1^2 \sqrt{2} = \frac{1}{l_1}, \quad N \pi \zeta_2^2 \sqrt{2} = \frac{1}{l_2},$$

$$N \pi \sigma^2 = \frac{1}{4 \sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{l_1}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}} \right\}^2 \quad \text{und setzt}$$

$$\omega_1 = \omega \sqrt{\frac{m}{m_1}}, \quad \omega_2 = \omega \sqrt{\frac{m}{m_2}}, \quad \text{so wird:}$$

$$D = \frac{\pi}{8} \omega \sqrt{m} \left\{ \frac{1}{m_1 \left\{ \frac{N_1}{N_2} \frac{1}{l_1 \sqrt{m_1}} + B \right\}} + \frac{1}{m_2 \left(\frac{N_2}{N_1} \frac{1}{l_2 \sqrt{m_2}} + B \right)} \right\},$$

$$\text{wo:} \quad B = \frac{1}{4 \sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}} \right)^2 \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}}.$$

Eine leichte Rechnung nach dieser Formel ergibt, dass die Aenderung von D für verschiedene Gascombinationen eine sehr verschiedene ist, wenn man N_1/N_2 in gleicher Weise sich ändern lässt. Um grosse Aenderungen von D zu erhalten, ist besonders die Anwendung von Wasserstoff wegen seines kleinen Moleculargewichtes empfehlenswerth. Mit Rücksicht auf die späteren Versuche führe ich als Beispiel die Combination Wasserdampf-Wasserstoff und Wasserdampf-Kohlensäure an. Bezieht sich N_1 auf Wasserdampf, N_2 auf Wasserstoff, so wird nach obiger Formel:

$$\text{für } \frac{N_1}{N_2} = \frac{44,8}{685,2} \text{ der Diffusionscoëfficient } D_{1,2} = 0,131,$$

$$\text{" } \frac{N_1}{N_2} = \frac{288}{442} \text{ " " " } D'_{1,2} = 0,482.$$

Bezieht sich ferner N_3 auf Kohlensäure, so hat man für die gleichen Verhältnisse:

$$D_{1,3} = 0,165, \quad D' = 0,128.$$

Während daher $D_{1,2}$ mit wachsendem Werthe von N_1 zunimmt,

wird $D_{1,3}$ unter gleichen Umständen kleiner. Infolge dessen ändert sich das Verhältniss der beiden Coëfficienten mit wachsendem Werthe von N_1 ganz bedeutend; es ist:

$$\frac{D_{1,2}}{D_{1,3}} = 0,80; \quad \frac{D_{1,2}'}{D_{1,3}'} = 3,76.$$

Dies Verhältniss der beiden Coëfficienten ist experimentell leicht bestimmbar, und dies war die erste Aufgabe der folgenden Untersuchung.

Lässt man nämlich Wasserdampf einmal in Wasserstoff, das andere mal in Kohlensäure unter ganz gleichen Umständen diffundiren, und bezeichnet man die in der Zeiteinheit durchtretende Dampfmenge bei der Diffusion in Wasserstoff mit $a_{1,2}$, diejenige in Kohlensäure mit $a_{1,3}$, so kann man setzen:

$$a_{1,2} = D_{1,2} f(P, p), \quad a_{1,3} = D_{1,3} f(P, p).$$

Es bezeichnet hier f eine nicht näher zu bestimmende Function des Gesamtdruckes P von Gas und Dampf und des Maximaldruckes p des Dampfes. Man hat daher:

$$\frac{D_{1,2}}{D_{1,3}} = \frac{a_{1,2}}{a_{1,3}}.$$

In gleicher Weise lässt sich das Verhältniss der Diffusionscoëfficienten für einen anderen Maximaldruck p' des Dampfes bestimmen und so eine Vergleichung der Theorie mit der Erfahrung ausführen, ohne dass eine Kenntniss der Function f nothwendig ist.

Die folgende Untersuchung bezieht sich auf die Gase Wasserstoff, Kohlensäure und Luft, ferner auf die Dämpfe von Wasser, Aether und Alkohol. Die Resultate, welche beim Wasserdampf erhalten wurden, sind zuerst und getrennt von den übrigen Dämpfen behandelt, weil die Constanten dieses Dampfes am sichersten bekannt sind.

Hr. Stefan hat die Aufgabe, eine Flüssigkeit aus einer offenen Röhre in einem beliebigen Gase verdampfen zu lassen, auf folgende Weise gelöst.¹⁾ Ein Glasröhrchen, welches die zu verdampfende Flüssigkeit enthält, wurde in den vertical

1) Stefan, l. c. p. 418.

gestellten Schenkel einer T förmigen Glasröhre gebracht; dieser Schenkel wurde unten durch einen Kork geschlossen und dann durch den horizontalen Theil der Röhre ein continuirlicher Strom jenes Gases geleitet, in welchem die Verdampfung stattfinden soll. Bei dieser Einrichtung wird die im Innern des Apparates vorhandene Luft allmählich von dem Gasstrom fortgenommen, ebenso wird auch der aus der Röhre austretende Dampf mitgeführt, sodass man die Spannung des letzteren am offenen Ende der Verdampfungsröhre nach Hrn. Stefan gleich Null setzen kann.

Um das letztere sicherer zu erreichen, und da ich die Absicht hatte, bei weiter auseinander liegenden Temperaturen zu arbeiten, habe ich dem Apparate folgende Gestalt gegeben. Ein Glasrohr *ab* (siehe beistehende Figur) von 20 mm Durchmesser und 200 mm Höhe besitzt unten ein enges Rohr *bc* (6 mm Durchmesser, 90 mm Höhe). In letzteres wird das unten geschlossene Röhrchen gebracht, welches eine Millimetertheilung besitzt, und welches die zu verdampfende Flüssigkeit enthält. Das obere Ende dieses Röhrchens ragt etwas über das untere Ende der Röhre *fh* hinaus, welches letztere durch einen Kork in dem Rohre *ab* befestigt ist. Das Gas, in welchem die Verdampfung vor sich gehen soll, wird durch *fh* ein- und durch *l* ausgeführt.



Die untere Verengung des Rohres *ab* zur Aufnahme der Verdampfungsröhre hatte den Zweck, letzterer mit grösserer Sicherheit die Temperatur des Wasserbades zu geben, in welches der ganze Apparat bis nahe an den Kork eingelassen wurde. Einige Versuche, welche mit einem Apparat ohne diese Verengung angestellt wurden, zeigten, dass man keine constanten Resultate erhielt, und dass insbesondere die Stärke des Gasstromes von Einfluss war. Da dieser Einfluss aber bei Versuchen mit Wasserstoff viel weniger stark hervortrat, als bei solchen mit Kohlensäure, so lag die Vermuthung nahe, dass Temperaturänderungen die Ursache seien. Eine directe Untersuchung durch Einführung eines Thermometers

liess diese Temperaturänderungen, welche bei dem gleichen Apparate von der Wärmeleitungsfähigkeit des durchströmenden Gases und der Stärke dieses Stromes bedingt sind, erkennen.

Die Beobachtungen wurden so angestellt, dass, nachdem der Gasstrom einige Zeit den Apparat durchsetzt hatte, die Zeiten bestimmt wurden, welche verstrichen, damit das Niveau der Flüssigkeit in dem Verdampfungsrohre jedesmal um 1 oder 2 mm fiel. Zu diesem Zwecke hatten die Röhrenchen, wie schon erwähnt, eine Millimetertheilung, deren Nullpunkt mit dem Röhrenende zusammenfiel. Zu den Beobachtungen diente ein Kathetometer mit stark vergrößerndem Fernrohr.

§ 2. Beobachtungen über die Diffusion des Wasserdampfes.

Es wurde aus zwei Gründen zunächst Wasser als Verdampfungsflüssigkeit gewählt. Erstens ist die Spannkraft dieses Dampfes am sichersten bekannt, zweitens ist durch die Herren Kundt und Warburg¹⁾ der Reibungscoëfficient des Dampfes ermittelt und daher auch die mittlere Weglänge des Molecüles bestimmt.

Die folgende Versuchsreihe bezieht sich auf die Verdampfung in einer Wasserstoffatmosphäre. Der Wasserstoff wurde in der bekannten Weise aus Zink und verdünnter Schwefelsäure entwickelt. Um das Gas zu trocknen, wurde dasselbe durch eine Waschflasche mit concentrirter Schwefelsäure und dann durch einen grossen Thurm (35 cm Höhe) mit Chlorcalcium geleitet.

Der Apparat stand in einem Wasserbad, dessen Inhalt durch ein Rührwerk lebhaft bewegt wurde.

Die erste Reihe in der folgenden Tabelle stellt den Abstand h des Flüssigkeitsniveau vom Ende der Röhre in Millimetern dar; die zweite gibt die Zeit t in Secunden, in welcher das Niveau um je 1 mm fiel; die dritte zeigt die Temperatur des Bades; die vierte gibt den Quotienten aus der Zeit t und dem Mittelwerth des Abstandes h .

1) Kundt u. Warburg, Pogg. Ann. 155. p. 540. 1876.

Wasserdampf in Wasserstoff.

Durchmesser der Verdampfungsröhre 2,3 mm. Barometerstand 733,3 mm.

Tabelle I.



Abstand h	Zeit t	Temp. des Bades	$\frac{t}{\frac{1}{2}(h_0 + h_1)}$
23	241	92,5	10,26
24	263	92,5	10,73
25	269	92,4	10,54
26	284	92,3	10,72
27	292	92,4	10,62
28	299	92,4	10,49
29	2.307	92,3	2.10,23
31	4.331	92,55	4.10,03
35	2.361	92,5	2.10,03
37		92,5	
Mittel		92,44	10,28
64	585	92,4	9,07
65	590	92,4	9,01
66	595	92,35	8,94
67	2.610	92,35	2.8,97
69	620	92,25	8,92
70		92,35	
Mittel		92,35	8,98

Gleichzeitig mit den obigen Beobachtungen wurde die Verdampfung des Wassers in Kohlensäure beobachtet. Die Kohlensäure wurde aus Marmor und verdünnter Salzsäure entwickelt und dieselbe durch eine Flasche mit doppeltkohlensaurem Natrium geleitet. Das Trocknen des Gases geschah in gleicher Weise, wie beim Wasserstoff.

Wasserdampf in Kohlensäure.

Durchmesser der Verdampfungsröhre 2,3 mm. Barometerstand 733,3 mm.

Tabelle II.

Abstand h	Zeit t	Temp.	$\frac{t}{\frac{1}{2}(h_0 + h_1)}$
18	904	—	48,65
19	945	—	48,46
20		—	
Mittel		92,44	48,55

Abstand h	Zeit t	Temp.	$\frac{t}{\frac{1}{2}(h_0 + h_1)}$
49	2217	—	44,80
50	2278	—	45,09
51	2320	—	45,05
52		—	
Mittel		92,39	44,98

Wie aus den obigen Zahlen hervorgeht, sind die Quotienten $t/\frac{1}{2}(h_0 + h_1)$ nicht vollständig constant, sondern nehmen mit wachsendem Werthe von h ab. Beim Wasserstoff erhält man für den mittleren Werth $h = 30$ den Quotienten 10,28

„ „ „ „ 67 „ „ 8,98.

Bei der Kohlensäure sind die entsprechenden Werthe:

$h = 19$ 48,55

50,5 44,98.

Da Hr. Stefan bei seinen Versuchen den fraglichen Quotienten als constant ansieht, habe ich zur Constatirung der obigen Thatsache noch einige weitere Versuche ausgeführt.

Wasserdampf in Wasserstoff.

Durchmesser der Verdampfungsröhre 2,4 mm. Barometerstand 722,6 mm.

Mittlere Temperatur 92,45.

Tabelle III.

Abstand h	Zeit t	$\frac{t}{\frac{1}{2}(h_0 + h_1)}$	Abstand h	Zeit t	$\frac{t}{\frac{1}{2}(h_0 + h_1)}$
26	2.267	2.9,90	57	515	8,97
28	2.280	2.9,60	58	530	9,06
30	300	9,83	59	530	8,91
31	315	9,84	60	540	8,91
32	325	9,75	61		
33	335	9,85			
34					
Mittel: 30		9,80	59		8,96

Abstand h	Zeit t	$\frac{t}{\frac{1}{2}(h_0 + h_1)}$
87	710	8,11
88	740	8,36
89	750	8,38
90	775	8,60
91	760	8,30
92	760	8,21
93		
Mittel: 90		8,33

Auch diese Versuche zeigen deutlich eine Abnahme des Quotienten mit wachsendem Werthe von h . Die obigen

Zahlen sind indess mit den früher gefundenen (Tabelle I) nicht unmittelbar vergleichbar, weil der Barometerstand in beiden Versuchsreihen nicht der gleiche ist.

Da mit wachsendem Abstand des Flüssigkeitsniveau vom Ende der Röhre die Verdampfung langsamer erfolgt, so lag zunächst der Gedanke nahe, die Abnahme des Quotienten werde dadurch herbeigeführt, dass die Dämpfe durch den Gasstrom nicht hinreichend schnell fortgeführt werden. Diese Auffassung machen indess die Beobachtungen mit Kohlensäure nicht wahrscheinlich; denn obschon hier die Verdampfung etwa fünfmal langsamer erfolgt, nehmen die Quotienten mit wachsendem h auch hier ab. Um aber einen directen Aufschluss zu erhalten, wurden zwei Versuche mit einer engeren und weiteren Röhre unter den gleichen Umständen angestellt. Die enge Röhre hatte einen Durchmesser von 2,3 mm, die weite von 3,7 mm. Bei der ersten Röhre ergab sich der fragliche Quotient in dem Intervall von 64 bis 66 mm zu 9,05, bei der zweiten in dem gleichen Intervall zu 9,19. Obschon also in der gleichen Zeit aus der weiten Röhre etwa 2,5 mal soviel verdampft, als aus der engen, sind die Quotienten fast vollkommen gleich. Schon Hr. Stefan hatte gezeigt, dass die Weite der Röhre innerhalb sehr weiter Grenzen keinen Einfluss ausübt.

Ferner war es möglich, dass die Abnahme des Quotienten mit wachsendem h in Temperaturänderungen der verdampfenden Flüssigkeitsoberfläche begründet sei. Wenn durch die Verdampfung die Temperatur der Oberfläche sinkt, so wird diese Temperaturabnahme mit wachsendem h wegen der geringeren Verdampfungsgeschwindigkeit kleiner werden, und daher der betrachtete Quotient abnehmen. Die Versuche bei einer niedrigeren Temperatur ($49,5^{\circ}$) zeigen aber ebenfalls eine Abnahme des Quotienten, wie aus Tabelle IV hervorgeht. Auf die Abnahme des Quotienten mit wachsendem h werde ich am Schluss der Arbeit (§ 8), nachdem die Resultate auch für die Dämpfe von Aether und Alkohol mitgeteilt sind, zurückkommen.

Was endlich die Geschwindigkeit des durchgeleiteten Gasstromes angeht, so zeigt sich die Grösse der Ver-

dampfung innerhalb weiter Grenzen davon unabhängig. Als Beispiel führe ich eine Messung der Verdampfung des Wassers in Kohlensäure an, wenn die Temperatur $92,4^{\circ}$ war, und die engste Röhre verwandt wurde. Es war hierbei ohne Einfluss, wenn der durchgeführte Gasstrom, welcher in einer Minute 400 ccm. Kohlensäure lieferte, so weit abgeschwächt wurde, dass nur 100 ccm durchgingen. Die untere Grenze der nothwendigen Menge des durchgeleiteten Gases wird um so grösser sein, je mehr Flüssigkeit in der Zeiteinheit verdampft. Daher wurde der Strom von Wasserstoff immer stärker, als jener von Kohlensäure gewählt.

Nachdem die oben angeführten Versuche ausführlich dargestellt sind, will ich mich bei den folgenden darauf beschränken, die erhaltenen Mittelwerthe mitzutheilen.

Wasserdampf in Wasserstoff.

Tabelle IV.

Nr. des Versuchs	Barometer	Tem- peratur	Druck des Wasser- dampfes	Mittlere Höhe h	l
					$\frac{1}{2} (h_0 + h_1)$
1	733,3	92,44	576,1	30	10,28
2	"	92,35	574,2	67	8,98
3	725,9	92,50	577,4	40	9,64
4	727,2	92,32	573,5	45	9,90
5	726,2	92,38	574,8	50	9,61
6	723,3	92,36	574,4	48	9,36
7	729,4	92,40	575,3	42	9,96
8	731,4	"	"	48	9,74
9	734,9	"	"	65	9,03
10	"	"	"	64	9,23
11	722,6	92,45	576,3	30	9,80
12	"	"	"	59	8,96
13	"	"	"	90	8,33
14	729,0	92,47	576,8	35	9,69
15	"	"	"	36	9,66
16	730,1	49,0	87,5	22	115,6
17	723,6	49,2	88,4	20	116,2
18	725,8	49,5	89,7	20	112,2
19	727,1	"	"	18	113,7
20	721,7	"	"	18	111,5
21	"	"	"	32	108,2
22	720,2	"	"	20	109,5
23	"	"	"	36	106,2
24	729,8	"	"	19	111,2
25	728,8	"	"	20	112,8

Wasserdampf in Kohlensäure.
Tabelle V.

Nr. des Versuchs	Barometer	Tem- peratur	Druck des Wasser- dampfes	Mittlere Höhe h	t $\frac{1}{2}(h_0 + h_1)$
1	733,3	92,44	576,1	19	48,55
2	"	92,89	575,0	50,5	44,98
3	725,9	92,50	577,4	18	47,80
4	727,2	92,32	573,5	25	48,00
5	726,2	92,38	574,8	34	46,39
6	721,7	"	"	25	46,60
7	723,3	92,34	573,9	45	44,71
8	"	92,38	574,8	19	48,81
9	730,1	49,0	87,5	14	609,3
10	725,6	49,2	88,4	11	611,0
11	725,8	49,5	89,7	16	601,1
12	727,1	"	"	17	616,5

Wasserdampf in Luft.
Tabelle VI.

1	729,4	92,40	575,3	26	33,49
2	731,4	"	"	32	32,56
3	721,7	92,38	574,8	19	32,84
4	"	"	"	26	31,37
5	723,3	"	"	22	32,94
6	"	"	"	44	30,15
7	729,8	49,5	89,7	18	383,1
8	728,8	"	"	18	390,8

§ 3. Berechnung der Versuche.

Wie schon in § 1 angegeben wurde, lässt sich die in der Zeiteinheit verdampfte Flüssigkeitsmenge, die der Dampfmenge gleich ist, welche in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt des mit dem Gase gefüllten Röhrchens diffundirt, gleich:

$$a_{1,2} = D_{1,2} f(P, p)$$

setzen, wo $D_{1,2}$ den Diffusionscoefficienten des Dampfes und Gases, und f eine Function des Gesamtdruckes P (d. i. der Barometerstand) und des Maximaldruckes p des Dampfes bedeutet. Bleibt alles ungeändert bis auf das Gas, durch welches die Diffusion stattfindet, so erhält man für die durch ein anderes Gas durchtretende Dampfmenge:

$$a_{1,3} = D_{1,3} f(P, p).$$

Daher:

$$\frac{D_{1,2}}{D_{1,3}} = \frac{a_{1,2}}{a_{1,3}}.$$

Die Grössen a sind den reciproken Werthen der in den Tabellen angegebenen $t/\frac{1}{2}(h_0 + h_1)$ proportional. Da die letzteren Werthe ausser von P und p auch noch von h abhängen, so sind nur solche Versuche direct miteinander vergleichbar, welche auch für nahe übereinstimmende h gelten.

Bezieht sich der Index 1 auf Wasserdampf,
 2 „ Wasserstoff,
 3 „ Kohlensäure,
 4 „ Luft,

so hat man folgende vergleichbare Werthe.

Temp.	Nr. des Vers.	$\frac{1}{a_{1,2}}$	Nr. des Vers.	$\frac{1}{a_{1,3}}$	Nr. des Vers.	$\frac{1}{a_{1,4}}$
92,35	6	9,36	7	44,71	6	30,15
49,5	19	113,7	12	616,5	—	—
49,5	24	111,2	—	—	7	383,1

Aus diesen Werthen ergibt sich:

Temperatur	$\frac{D_{1,2}}{D_{1,3}}$	$\frac{D_{1,2}}{D_{1,4}}$
92,35	4,78	3,22
49,5	5,42	3,44

Den so bestimmten Werthen des Verhältnisses zweier Diffusionscoefficienten liegen nur folgende zwei Annahmen zu Grunde: 1) Die in der Zeiteinheit durchtretende Dampfmenge ist dem Diffusionscoefficienten proportional; 2) der Druck des Dampfes an der Flüssigkeitsoberfläche ist von der Natur des Gases, in welchem die Verdampfung stattfindet, unabhängig.

Die Quotienten $D_{1,2}/D_{1,3}$, resp. $D_{1,2}/D_{1,4}$, wie sie oben berechnet wurden, stützen sich nur auf wenige Beobachtungen. Will man die übrigen Beobachtungen verwerthen, so müssen dieselben auf gleiche Werthe von h reducirt werden. Das Gesamtergebn ist indess nur wenig verschieden von dem bereits angegebenen. Wie eine Uebersicht der Werthe $t/\frac{1}{2}(h_0 + h_1)$ ergibt, nehmen diese, innerhalb der beobachteten Grenzen, annähernd der Grösse h ab. Reducirt man nun

die Beobachtungen auf $h = 20^1$), so erhält man bei der mittleren Temperatur $92,4^0$.

Tabelle VII.

Nr. des Vers.	$\frac{1}{a_{1,2}}$	Nr. des Vers.	$\frac{1}{a_{1,3}}$	$\frac{a_{1,2}}{a_{1,3}}$
1	10,52	1	48,45	4,61
2	9,87	2	48,03	4,86
3	10,12	3	47,60	4,70
4	10,50	4	48,50	4,62
5	10,33	5	47,79	4,62
6	10,03	7	47,21	4,77
Mittel:				4,70

Der Quotient schwankt also zwischen 4,61 und 4,86; der Mittelwerth 4,70 ist nur wenig von dem oben bestimmten 4,78 verschieden.

Da später (§ 5) noch eine weitere Berechnung der Versuche mitgetheilt ist, wurde hier von einer solchen für die übrigen Versuche abgesehen.

§ 4. Vergleichung der Beobachtungen mit der Theorie des Hrn. O. E. Meyer.

Nach der Theorie des Hrn. Meyer wird der Diffusionscoefficient zweier Gase durch eine Formel dargestellt, welche schon in § 1 angegeben wurde. Der Ableitung dieser Formel liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass die beiden Gase sich nach entgegengesetzten Richtungen durch das Diffusionsrohr bewegen. Bei den von mir ausgeführten Versuchen ist dies nicht der Fall, indem hier nur der Dampf sich durch das betreffende Gas zum Ausgange der Röhre bewegt, das Gas selbst dagegen fast vollständig in Ruhe bleibt. Da aber der Widerstand, den der Dampf durch die Gasmoleculé erfährt, nicht wesentlich verändert wird, wenn dem Gase eine doch in jedem Falle nur schwach fortschreitende Bewegung ermöglicht ist, habe ich auch auf meine Versuche die Formel des Hrn. Meyer angewandt.

Nach derselben ist der Diffusionscoefficient an jeder Stelle des Rohres verschieden und von dem Verhältnisse der in der Raumeinheit vorhandenen Moleculé oder von N_1/N_2

1) Die Reduction für $1/a_{1,2}$ beträgt 0,024 für 1 mm; für $1/a_{1,3}$ beträgt sie 0,10.

abhängig. Welcher Werth von N_1/N_2 bei den Versuchen massgebend ist, lässt sich nicht von vornherein entscheiden; zunächst möge deshalb ein Mittelwerth berechnet werden, der sich in folgender Weise ergibt.

An der Oberfläche der Flüssigkeit ist der Druck des Dampfes gleich p , an dem Ende der Röhre Null, sodass der mittlere Werth dieses Druckes $p/2$ ist. Der mittlere Druck des Gases ist dementsprechend $(P - p/2)$. Setzt man daher:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\frac{p}{2}}{P - \frac{p}{2}},$$

so erhält man für die Versuche mit Wasserstoff:

$$\begin{array}{cc} \text{bei der Temperatur } 92,4^\circ & 49,5^\circ \\ \frac{N_1}{N_2} = \frac{288}{442} & \frac{N_1}{N_2} = \frac{44,8}{685,2} \end{array}$$

Zur Berechnung des Diffusionscoëfficienten nach der Meyer'schen Formel wurden folgende Werthe für die Weglänge und das Moleculargewicht benutzt:

Wasserdampf ¹⁾	$l = 0,000\ 006\ 33\ \text{cm}$	$m = 18$
Wasserstoff . .	17 65 „	2
Kohlensäure . .	6 46 „	44
Luft	9 50 „	29

Ferner wurde $\omega = 169\ 800\ \text{cm}$ gesetzt.

Mit diesen Werthen wird:

	für $\frac{N_1}{N_2} = \frac{288}{442}$	$\frac{N_1}{N_2} = \frac{44,8}{685,2}$
Wasserdampf-Wasserstoff	$D_{1,2} = 0,482$	0,131
„ Kohlensäure	$D_{1,3} = 0,128$	0,165
„ Luft	$D_{1,4} = 0,159$	0,184.

1) Die Werthe beziehen sich auf 0° und 760 mm Druck. Der Werth 0,000 009 5 für Luft ist der Mittelwerth der verschiedenen Beobachtungen (vgl. O. E. Meyer, Kinetische Theorie der Gase p. 140). Die übrigen Werthe wurden nach der Formel:

$$l_1 = \frac{l}{\sqrt{d}} \cdot T$$

berechnet, wo T den Transpirationscoëfficienten und d die Dichte des Gases, beides bezogen auf Luft als Einheit, bedeutet. Für T wurden die von Graham beobachteten Werthe eingesetzt. Der für Wasserstoff benutzte Werth wurde von den Herren Kundt und Warburg bestimmt.

Daher sind die Quotienten:

für $\frac{N_1}{N_2} = \frac{288}{442}$		$\frac{N_1}{N_2} = \frac{44,8}{685,2}$	
berechn.	beobacht.	berechn.	beobacht.
$\frac{D_{1,2}}{D_{1,3}} = 3,76$	4,78	0,80	5,42
$\frac{D_{1,2}}{D_{1,4}} = 3,03$	3,22	0,71	3,44

Die vorstehenden Zahlen zeigen, dass die beobachteten Werthe ganz bedeutend von den berechneten abweichen, besonders für $N_1/N_2 = 44,8/685,2$ sind die Differenzen sehr stark.

Die berechneten Werthe beziehen sich auf die Temperatur 0° , während die beobachteten Werthe $92,4^\circ$, resp. $49,5^\circ$ angehören. Würden die verschiedenen Combinationen, um welche es sich handelt, den gleichen Temperaturcoefficienten besitzen, so würde eine Aenderung der Temperatur die in Betracht kommenden Quotienten nicht ändern. Diese Gleichheit der Temperaturcoefficienten ist nun zwar nach den Versuchen des Hrn. von Obermayer nicht zu erwarten, aber auch bei Berücksichtigung einer solchen Verschiedenheit sind die Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung doch zu gross, als dass sie hierdurch eine Erklärung finden könnten.

Es wurde früher bemerkt, dass das Verhältniss N_1/N_2 , welches für die Berechnung der Versuche massgebend ist, nicht nothwendig das in die Rechnung eingeführte ist. Einen der Wahrheit näher stehenden Werth erhält man in folgender Art. Die Meyer'sche Formel lässt sich, indem man $N_1 = N - N_2$ setzt, kurz so schreiben:

$$D = a \left\{ \frac{1}{b_1 \frac{N - N_2}{N_2} + c_1} + \frac{1}{b_2 \frac{N_2}{N - N_2} + c_2} \right\}.$$

Bezieht man hierbei N_2 auf das Gas in dem Röhrchen, und bezeichnet man N/N_2 mit x , so ist D eine Function von x , und man wird den mittleren Werth von D zwischen den Grenzen x_2 und x_1 erhalten, wenn man das Integral:

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} D \cdot dx \quad \text{bildet.}$$

In unserem Falle ist $x_1 = 1$, da am Ende des Röhrchens $N_2 = N$ ist; x_2 ist der Werth von x an der Oberfläche der Flüssigkeit. Der Integralwerth von D wird:

$$D_1 = \frac{a}{x_2 - 1} \left\{ \frac{1}{b_1} \log_n \left(\frac{b_1}{c_1} (x_2 - 1) + 1 \right) - \frac{b_2}{c_2} \log_n \left(\frac{c_2}{b_2} (x_2 - 1) + 1 \right) + \frac{x_2 - 1}{c_2} \right\}.$$

Nach dieser Formel werden die Diffusionscoefficienten:

	$x_2 = 4,74$	$x_2 = 1,14$
Wasserdampf-Wasserstoff	0,623	0,137
„ -Kohlensäure	0,108	0,166
„ -Luft . . .	0,146	0,186

Die Quotienten sind daher:

$$\begin{aligned} \frac{D_{1,2}}{D_{1,3}} &= & 5,77 & \quad 0,82 \\ \frac{D_{1,2}}{D_{1,4}} &= & 4,27 & \quad 0,74 \end{aligned}$$

Eine Vergleichung dieser Zahlen zeigt, dass für den höheren Druck des Dampfes die Quotienten grösser, als nach der früheren Berechnung sind; für den kleineren Druck ergeben sich dagegen nur unbedeutende Unterschiede. Man wird daher zu der Folgerung geführt, dass die Beobachtungen nicht durch die Meyer'sche Formel dargestellt werden; die Veränderlichkeit des Diffusionscoefficienten scheint nach den Versuchen geringer zu sein, als die Formel verlangt. Da indess die Versuche den Voraussetzungen der Meyer'schen Theorie nicht vollkommen entsprechen, so ist eine allgemeine Verwerfung der Formel wohl noch nicht gerechtfertigt.

§ 5. Berechnung der Diffusionscoefficienten aus den Beobachtungen.

Zur Ermittlung der Diffusionscoefficienten aus den vorliegenden Beobachtungen ist die Kenntniss des Gesetzes nothwendig, durch welches die Verdampfungsgeschwindigkeit als Function des Druckes bestimmt wird. Nach Dalton

ist die Verdampfungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit dem Maximaldruck p ihres Dampfes direct, dem Luftdruck P umgekehrt proportional. Hr. Stefan¹⁾ hat dagegen gefunden, dass die Verdampfungsgeschwindigkeit proportional dem Logarithmus eines Bruches ist, dessen Zähler der Luftdruck P , und dessen Nenner die Differenz des Luftdruckes und des Maximaldruckes p des Dampfes ist. Hr. Stefan leitete diese Beziehung theoretisch ab und hat dieselbe durch seine Versuche bestätigt gefunden. Die zu Grunde gelegte Theorie schliesst sich unmittelbar an die Diffusionstheorie an, welche einen constanten Diffusionscoefficienten liefert; die Bestätigung könnte daher nur dann als erbracht gelten, wenn der Diffusionscoefficient constant wäre. Es ist deshalb noch nicht endgültig entschieden, sondern nur wahrscheinlich, dass das fragliche Gesetz richtig ist. Da es von Interesse war, die nach diesem Gesetze berechneten Diffusionscoefficienten mit den theoretisch bestimmten zu vergleichen, habe ich die Rechnung durchgeführt.

Berücksichtigt man die verschiedenen Temperaturen, bei denen die Versuche ausgeführt wurden, so gelangt man zu einer Formel, welche von der Stefan'schen etwas abweicht.

Die Formel, von der wir ausgehen, ist die folgende:

$$v = \frac{k}{h} \log_n \frac{P}{P-p},$$

Hier bezeichnet:

v das Volumen des Dampfes, reducirt auf den Druck P und die Temperatur τ des Versuches, welches in der Zeiteinheit durch die Einheit des Querschnittes geht;

k den Diffusionscoefficienten des Dampfes und Gases, welcher sich ebenfalls auf den Druck P und die Temperatur τ bezieht;

h den Abstand des Flüssigkeitsniveau von dem Ende der Röhre;

P den Druck der Atmosphäre;

p den Maximaldruck des Dampfes.

Dem in der Zeit dt entwickelten Dampfvolumen $v \cdot dt$

1) Stefan, l. c. p. 408.

entspricht eine Senkung des Niveaus der Flüssigkeit um dh . Wenn daher s die Dichtigkeit der Flüssigkeit bei der Temperatur τ ist und d die Dichtigkeit des Dampfes, bezogen auf den Druck P und die Temperatur τ , so ist:

$$d \cdot v \cdot dt = s \cdot dh,$$

daher:
$$\frac{s}{d} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{k}{h} \log_n \frac{P}{P-p},$$

oder:
$$h \cdot dh = \frac{k \cdot d}{s} \left(\log_n \frac{P}{P-p} \right) dt.$$

Entspricht die Tiefe h_0 der Zeit $t = t_0$, die Tiefe h_1 der Zeit $t = t_1$, so hat man:

$$\frac{h_1^2 - h_0^2}{2} = \frac{k \cdot d}{s} (t_1 - t_0) \log_n \frac{P}{P-p}.$$

Die Dichtigkeit d , bezogen auf P und τ , lässt sich unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Boyle'schen und Gay-Lussac'schen Gesetzes auf die normale Dichte d_1 (bezogen auf $P_0 = 760$ mm und 0°) zurückführen:

$$d = \frac{P}{P_0} \cdot \frac{273}{273 + t} \cdot d_1.$$

Reducirt man ferner den Coëfficienten k (bezogen auf P) auf den Coëfficienten K (bezogen auf $P_0 = 760$ mm), so hat man:

$$k = K \cdot \frac{P_0}{P}.$$

Mit diesen Werthen wird:

$$K = \frac{(h_1 + h_0)(h_1 - h_0)}{2} \cdot \frac{s}{d_1} \cdot \frac{273 + t}{273} \cdot \frac{1}{(t_1 - t_0) \left\{ \log_n P - \log_n (P-p) \right\}}.$$

Der so bestimmte Diffusionscoëfficient K bezieht sich auf den normalen Druck 760 mm und die Temperatur τ des Versuches.¹⁾

Berechnet man nach der obigen Formel den Versuch Nr. 1 bei der Verdampfung des Wassers in Wasserstoff, so ist, wenn man 1 cm als Längeneinheit und 1 Sec. als Zeiteinheit zu Grunde legt:

$$\frac{t_1 - t_0}{\frac{1}{2}(h_1 + h_0)} = 102,8; \quad h_1 - h_0 = 0,1; \quad \tau = 92,44;$$

$$P = 73,33; \quad p = 57,61.$$

1) Die obige Formel unterscheidet sich von der Stefan'schen durch den Coëfficienten $(273 + t)/273$.

Die Dichtigkeit s des Wassers bei $92,4^\circ$, bezogen auf Luft von 0° und 76 cm Druck als Einheit, ist $964/1,293$; die Normaldichte d_1 des Wasserdampfes, ebenfalls bezogen auf Luft von 0° und 76 cm als Einheit, ist 0,623. Mit Rücksicht auf die Abweichung des Dampfes von den Gasgesetzen ist für d_1 zu setzen 0,640. Es ist daher:

$$\frac{s}{d_1} = \frac{964}{1,293 \cdot 0,640} = 1165.$$

Hiermit wird $K = 0,973$.

In der niedrigeren Temperatur $49,5^\circ$ ist:

$$\frac{s}{d_1} = \frac{989}{1,293 \cdot 0,627} = 1220 \text{ gesetzt.}$$

In der folgenden Tabelle sind die berechneten Werthe der Diffusionscoëfficienten Wasserdampf-Wasserstoff zusammengestellt. Um ein Urtheil über die Abweichungen der Werthe untereinander zu gewinnen, sind die Werthe K auf $h = 20$ mm reducirt. (K_1).

Wasserdampf-Wasserstoff.

Tabelle VIII.

Nr. des Vers.	h in mm	K	K_1 red. auf $h = 20$ mm	Nr. des Vers.	h in mm	K	K_1 red. auf $h = 20$ mm
1	30	0,973?	0,943	16	22	0,972	0,967
2	67	1,136?	95	17	20	0,951	51
3	40	1,019	59	18	20	0,970	70
4	45	1,013	38	19	18	0,959	64
5	50	1,035	45	20	18	0,941	46
6	48	1,069	85	21	32	1,000	69
7	42	1,007	41	22	20	0,986	86
8	48	1,036	52	23	36	1,017	75
9	65	1,126	91	24	19	0,984	87
10	64	1,101	69	25	20	0,969	69
11	30	0,998	68	Mittl. Temp. $49,5^\circ$; $K_1 = 0,968$			
12	59	1,090	76				
13	90	1,172	62				
14	35	1,027	82				
15	36	1,030	82				

Mittl. Temp. $92,4^\circ$; $K_1 = 0,964$

Die Grössen K_1 sind, wie die Tabelle zeigt, in beiden Versuchsreihen nahezu gleich. Da sich die Werthe aber auf

verschiedene Temperaturen beziehen, so ist dieser Uebereinstimmung eine Bedeutung nicht beizulegen.

Die übrigen Versuche sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt.¹⁾

Wasserdampf-Kohlensäure.

Tabelle IX.

Nr. des Vers.	h in mm	K	K_1 red. auf $h = 20$ mm	Nr. des Vers.	h in mm	K	K_1 red. auf $h = 20$ mm
1	19	0,2085	0,2091	9	14	0,1846	0,1882
2	50,5	259	76	10	11	809	863
3	18	055	67	11	16	810	834
4	25	094	64	12	17	779	797
5	34	144	60	Mittl. Temp. 49,5°; $K_1 = 0,1844$			
6	25	102	72				
7	45	214	56				
8	19	018	24				
Mittl. Temp. 92,4°; $K_1 = 0,2064$							

Wasserdampf-Luft.

Tabelle X.

Nr. des Vers.	h in mm	K	K_1 red. auf $h = 20$ mm	Nr. des Vers.	h in mm	K	K_1 red. auf $m = 20$ mm
1	26	0,2995	0,2935	7	18	0,2858	0,2879
2	32	3101	2981	8	18	2797	2817
3	19	2980	2990	Mittl. Temp. 49,5°; $K_1 = 0,2848$			
4	26	3120	3060				
5	22	2985	2965				
6	44	3261	3021				
Mittl. Temp. 92,4°; $K_1 = 0,2992$							

Um die beobachteten Werthe mit den theoretisch berechneten zu vergleichen, sind erstere auf 0° zu reduciren. In der Formel:

$$K_t = K_0 \left(\frac{273 + t}{273} \right)^n$$

1) In der niedrigeren Temperatur ist die Reduction unter der Annahme durchgeführt, dass die Grösse der Reduction jener in der höheren Temperatur gleich sei. Diese Annahme ist nicht richtig; indess ist die Reduction so klein, dass dieselbe ohne eine grössere Bedeutung ist.

ist für die vorliegenden Combinationen n nicht bekannt; es wird daher die Reduction nothwendig mit einer gewissen Unsicherheit behaftet sein. Setzt man $n = 2$, so erhält man:

	für $\frac{N_1}{N_2} = \frac{288}{442}$		$\frac{N_1}{N_2} = \frac{44,8}{685,2}$		
	beob.	ber. nach Meyer	beob.	ber. nach Meyer	ber. nach Stefan
Wasserdampf-Wasserstoff	0,536	0,482	0,693	0,131	0,738
„ -Kohlensäure	0,113	0,128	0,132	0,165	0,179
„ Luft . . .	0,167	0,159	0,204	0,184	0,230

Nach dieser Zusammenstellung nimmt der Coëfficient für Wasserdampf-Wasserstoff mit wachsendem Werthe von N_1/N_2 ab, während die berechneten Werthe (Meyer) das umgekehrte Verhalten zeigen. Die Coëfficienten für Wasserdampf-Kohlensäure und Wasserdampf-Luft nehmen mit wachsendem Werthe von N_1/N_2 zu, und die berechneten Werthe verhalten sich ebenso. Den grössten Unterschied zeigen die Werthe 0,693 und 0,131, welche beim Wasserstoff für den kleineren Druck sich ergeben. Die Stefan'sche Formel liefert einen Coëfficienten, welcher von N_1/N_2 unabhängig, ist. Die Differenzen dieser Formel gegenüber den Beobachtungen sind für den grösseren Druck beträchtlicher, als für die kleineren; ich werde hierauf in § 8 zurückkommen.

§ 6. Beobachtungen über die Diffusion des Aetherdampfes.

Nach den Beobachtungen des Hrn. Stefan ist die Grösse $t/\frac{1}{2}(h_1 + h_0)$ von dem Werthe $\frac{1}{2}(h_1 + h_0)$ unabhängig oder die Verdampfungsgeschwindigkeit ist umgekehrt proportional dem Abstände des Flüssigkeitsniveau vom Ende der Röhre. Durch die früher mitgetheilten Versuche über die Verdampfung des Wassers wurde dieses Resultat nicht bestätigt, vielmehr zeigte sich, dass der Quotient mit wachsendem h abnimmt.

Da Hr. Stefan das obige Resultat aus Versuchen über die Verdampfung des Aethers gefolgert hatte, habe ich die Versuche mit dieser Substanz wiederholt.¹⁾

1) Den benutzten Aether, welcher mit besonderer Sorgfalt wasserfrei dargestellt wurde, verdanke ich der Güte des Hrn. Prof. Dr. Behrend.

Aether-Wasserstoff.

Tabelle XI.

Nr. des Versuchs	Barometer	Tempe- ratur	Druck des Dampfes ¹⁾	Mittlere Höhe h in mm	t $\frac{1}{2}(h_1 + h_0)$
1	727,3	19,9	431,2	25	7,64
2	"	"	"	50	7,43
3	723,5	"	"	25	7,53
4	"	"	"	50	7,37
5	725,5	10,4	292,1	24	13,72

Aether-Kohlensäure.

1	727,3	19,9	431,2	20	40,00
2	"	"	"	52	40,48
3	723,5	"	"	20	40,09
4	"	"	"	52	39,97
5	725,5	10,4	292,1	19	73,61

Aether-Luft.

1	727,3	19,9	431,2	20	28,77
2	"	"	"	53	28,56
3	723,5	"	"	21	28,51
4	"	"	"	52	28,52
5	725,5	10,4	292,1	19	52,59

Aus diesen Beobachtungen folgt, dass, in Uebereinstimmung mit den Versuchen des Hrn. Stefan, für die Combination Aether-Luft der Quotient $t/\frac{1}{2}(h_1 + h_0)$ von $\frac{1}{2}(h_1 + h_0)$ unabhängig ist. In gleicher Weise verhält sich Aether-Kohlensäure. Bei der Combination Aether-Wasserstoff scheint eine kleine Abnahme des fraglichen Quotienten zu bestehen, die aber viel geringer ist, als dies bei den Versuchen mit Wasser der Fall war. Auch eine Versuchsreihe des Hrn. Stefan mit Aether-Wasserstoff zeigt eine kleine Abnahme des Quotienten. Die Resultate des Hrn. Stefan werden also durch die obigen Versuche durchaus bestätigt, nur dürfen dieselben nicht verallgemeinert werden.

Bildet man die Quotienten der Diffusionscoëfficienten, so erhält man:

¹⁾ Der Druck wurde aus den Beobachtungen von Regnault abgeleitet.

	$\frac{N_1}{N_2} = \frac{215,6}{509,4}$	$\frac{N_1}{N_2} = \frac{146}{579,5}$
Aether-Wasserstoff	= 5,36	5,36
„ -Kohlensäure		
„ -Wasserstoff	= 3,81	3,83.
„ -Luft		

Wie man sieht, sind die vorstehenden Werthe von N_1/N_2 unabhängig.

Um die Diffusionscoëfficienten aus den vorliegenden Beobachtungen nach der Formel des § 5 zu berechnen, ist s/d_1 zu bestimmen.

Die Dichte des Aetherdampfes, bezogen auf Luft als Einheit, ist 2,565, die Dichte des flüssigen Aethers bei 0°, bezogen auf Wasser von 0° als Einheit, ist 0,7336; aus der letzten Zahl berechnet sich die Dichte des Aethers bei 19,9° zu 0,7114 und bei 10,4° zu 0,7227. Es ist daher:

$$\text{bei } 19,9^\circ \quad \frac{s}{d_1} = 214,5, \quad \text{bei } 10,4^\circ \quad 217,9.$$

Mit diesen Werthen erhält man folgende Diffusionscoëfficienten:

Diffusionscoëfficient.

Nr. des Versuchs	Aether-Wasserstoff	Aether-Kohlensäure	Aether-Luft
1	0,335	0,0640	0,0890
2	0,345	0,0633	0,0897
3	0,337	0,0634	0,0891
4	0,345	0,0635	0,0891
5	0,320	0,0596	0,0835

Hr. Stefan erhielt bei 19° für Aether-Wasserstoff 0,305 und für Aether-Luft 0,0827. Die Differenz gegenüber dem obigen Resultate ist vermuthlich in der nicht vollständigen Uebereinstimmung des verwendeten Materiales begründet. Das Verhältniss der Stefan'schen Werthe 3,7 stimmt mit dem von mir gefundenen 3,8 nahe überein.

Reducirt man die obigen Werthe auf 0°, indem man $n = 2$ setzt, so erhält man ganz übereinstimmende Resultate für die beiden Verhältnisse von N_1/N_2 , wie folgende Zahlen zeigen.

	$\frac{N_1}{N_2} = \frac{215,6}{509,4}$	$\frac{146}{579,5}$
	Diffusionscoefficient	
Aether-Wasserstoff	0,296	0,297
„ -Kohlensäure	0,0552	0,0553
„ -Luft	0,0776	0,0775

Obschon die Stefan'sche Formel des Diffusionscoefficienten nicht vollständig richtig ist, wie die v. Obermayer'schen und Waitz'schen Versuche andeuten, so wird man doch dieselbe verwerthen können, um aus derselben die Weglänge mit einer gewissen Annäherung berechnen zu können, wie dies schon Hr. Stefan selbst gethan hat.

Benutzt man den Werth 0,0776 für den Diffusionscoefficienten von Aether-Luft, so erhält man für die Weglänge des Aetherdampfes unter Annahme der früher angegebenen Constanten: 0,000 001 86.

Mit Hülfe dieser Zahl lässt sich dann der Diffusionscoefficient der beiden anderen Combinationen bestimmen; man erhält:

	beobachtet	berechnet
Aether-Wasserstoff	0,296	0,301
„ -Kohlensäure	0,0552	0,0594

Unter der Annahme etwas anderer Constanten hatte Hr. Stefan für die Weglänge des Aetherdampfes $23 \cdot 10^{-7}$ abgeleitet. Der Unterschied der beiden Werthe ist besonders darin begründet, dass Hr. Stefan den bei 19^0 beobachteten Diffusionscoefficienten zur Berechnung benutzt. Würde ich in der gleichen Weise den bei $19,9^0$ erhaltenen Werth direct in die Rechnung einführen, so würde die moleculare Weglänge sich zu $22,4 \cdot 10^{-7}$ ergeben. Hr. Puluj¹⁾ hat aus Reibungsversuchen für dieselbe Grösse $22 \cdot 10^{-7}$ erhalten.

§ 7. Ueber die Diffusion des Alkoholdampfes.

Nachdem Wasser und Aether verschiedene Resultate betreffs der Abhängigkeit der Verdampfung von der Grösse h ergeben hatten, wurde die Untersuchung noch auf

1) Puluj, Beibl. 3. p. 463. 1879.

eine dritte Substanz, den Alkohol ausgedehnt. Die Resultate sind in den folgenden Tabellen angegeben.

Tabelle XII.
Alkohol-Wasserstoff.

Nr. des Versuchs	Barometer	Temperatur	Druck des Dampfes ¹⁾	Mittlere Höhe h in mm	t $\frac{1}{2}(h_1 + h_0)$
1	728,5	67,02	479,0	21	8,32
2	"	66,97	478,0	43	7,77
3	728,7	66,85	475,5	26	8,32
4	"	66,92	477,0	44	7,72
5	733,2	40,4	136,8	20	41,03
6	732,1	40,5	137,5	20	40,86

Alkohol-Kohlensäure.

1	728,5	67,02	479,0	17	42,26
2	"	66,97	478,0	41	40,91
3	728,7	66,85	475,5	17	42,51
4	"	66,92	477,0	42	41,10
5	733,2	40,4	136,8	17	230,5
6	732,1	40,5	137,5	14	228,5

Alkohol-Luft.

1	728,5	66,97	478,0	41	28,31
2	728,7	66,85	475,5	18	29,70
3	"	66,92	477,0	42	28,75
4	733,2	40,4	136,8	16	149,7
5	732,1	40,5	137,5	16	152,1

Die vorstehenden Werthe zeigen, dass der Quotient $t/\frac{1}{2}(h_1 + h_0)$ mit wachsendem h abnimmt. Es verhält sich also in dieser Beziehung Alkohol ähnlich wie Wasser.

Bildet man die Quotienten der Diffusionscoefficienten, indem man in der höheren Temperatur die nahe übereinstimmenden Werthe für $h = 42$ mm benutzt, so erhält man:

	$N_1 = \frac{238}{490,6}$	68,6
Alkohol-Wasserstoff		664,1
„ -Kohlensäure	= 5,30	5,60
„ -Wasserstoff	= 3,68	3,68
„ -Luft		

1) Der Druck wurde aus den Beobachtungen von Regnault abgeleitet.

Zur Berechnung des Diffusionscoefficienten nach der Formel des § 5 wurde $d_1 = 1,613$ gesetzt; mit diesem Werthe wird bei der Temperatur $67,0^\circ$ $s/d_1 = 359,9$; bei $40,5^\circ$ $s/d_1 = 371,5$.

In der folgenden Tabelle sind die direct aus den Beobachtungen berechneten Diffusionscoefficienten K und die auf $h = 20$ mm reducirten K_1 zusammengestellt.

Diffusionscoefficient.

Nr. des Versuchs	Alkohol-Wasserstoff		Alkohol-Kohlensäure		Alkohol-Luft	
	K	K_1	K	K_1	K	K_1
1	0,514	0,513	0,0990	0,0994	0,1484	0,1442
2	0,540	0,506	0,1026	0,0999	0,1427	0,1431
3	0,510	0,501	0,0997	0,1001	0,1466	0,1422
4	0,546	0,510	0,1026	0,0997	0,1386	0,1394
5	0,503	0,503	0,0896	0,0904	0,1357	0,1365
6	0,503	0,503	0,0899	0,0907		

Reducirt man die Werthe K_1 auf 0° , indem man $n = 2$ setzt, so findet man:

	$\frac{N_1}{N_2} = \frac{238}{490,6}$	$\frac{68,6}{664,1}$
	Diffusionscoefficient	
Alkohol-Wasserstoff	0,327	0,382
„ -Kohlensäure	0,0643	0,0687
„ -Luft	0,0923	0,1046.

Legt man die Werthe zu Grunde, welche für $N_1/N_2 = 68,6/664,1$ gefunden wurden, so erhält man für die Weglänge des Alkoholdampfes aus dem Diffusionscoefficienten Alkohol-Luft nach der Stefan'schen Formel:

$$0,000\ 002\ 53.$$

Mit diesem Werthe wird der Diffusionscoefficient der anderen Combinationen nach der gleichen Formel:

	beobachtet	berechnet
Alkohol-Wasserstoff	0,382	0,385
„ -Kohlensäure	0,1046	0,0809.

§ 8. Schlussbemerkungen.

Nach den Beobachtungen des Hrn. v. Obermayer nimmt der Diffusionscoefficient mit abnehmendem Gefälle im Diffusionsrohr zu. Dieses Resultat wird durch meine Ver-

suche mit Wasser- und Alkoholdampf scheinbar bestätigt, da mit wachsendem h , d. h. mit abnehmendem Gefälle der Diffusionscoefficient wächst. Die Meyer'sche Formel gibt für diese Aenderung des Coefficienten keine Erklärung, da nach ihr das Gefälle keinen Einfluss auf den Diffusionscoefficienten ausübt, solange das Mischungsverhältniss der diffundirenden Substanzen nicht geändert wird.

Ich glaube aber, dass meine Versuche auch ohne die Annahme über den Einfluss des Druckgefälles erklärt werden können. Betrachtet man die Resultate für die drei untersuchten Dämpfe, so findet man, dass Wasser die stärkste und Aether die schwächste Zunahme des Coefficienten mit wachsendem h zeigt; bei dem letzteren Dampfe war für die Combinationen Aether-Luft und Aether-Kohlensäure eine Aenderung des Coefficienten überhaupt nicht nachweisbar. Hieraus geht zunächst hervor, dass die Stärke der Aenderung von der Natur der Flüssigkeit abhängt. Ferner ist die Natur der Gase von Einfluss, wie die Versuche mit Alkohol und Aether beweisen; die Combinationen dieser Dämpfe mit Wasserstoff zeigen unter gleichen Umständen eine stärkere Aenderung des Coefficienten, als die Combinationen mit Kohlensäure oder Luft. Beim Wasserdampf tritt dieser Unterschied nicht deutlich hervor; indessen ist die Genauigkeit der Versuche nicht so gross, um diesem Umstande eine besondere Bedeutung beizulegen. Endlich deutet der Versuch mit Wasserdampf-Wasserstoff, welcher bis zu $h = 90$ mm reicht, darauf hin, dass die Zunahme des Diffusionscoefficienten langsamer erfolgt, als h wächst. Die Tabelle III liefert nämlich für den dort berechneten Quotienten die Werthe 9,80; 8,96; 8,33 entsprechend den Abständen $h = 30$; 59; 90 mm. Hiernach beträgt die Aenderung pro Millimeter in dem Intervall 30 bis 59 mm 0,31 Proc., in dem Intervall 59 bis 90 mm dagegen nur 0,23 Proc. Es scheint mir daher wahrscheinlich, dass die Zunahme des Diffusionscoefficienten mit wachsendem h in dem Drucke des Dampfes an der Oberfläche der Flüssigkeit begründet ist, indem dieser Druck mit wachsendem h bis zu seinem Maximalwerth zunimmt. Je grösser h , um so langsamer erfolgt unter sonst gleichen Um-

ständen die Verdampfung, und daher ist es sehr wohl möglich, dass für die kleinen Werthe von h die Diffusion so rasch erfolgt, dass an der Oberfläche der Flüssigkeit sich nicht die Maximalspannung des Dampfes erhalten kann; gleichzeitig kann auch bei kleineren Werthen von h eine geringe Temperaturerniedrigung an der Oberfläche der Flüssigkeit infolge der Verdampfung eintreten.¹⁾ Auffallend bleibt es hierbei allerdings, dass für den Aetherdampf auch im Wasserstoff nur eine so kleine Aenderung hervortritt.

Wenn die vorstehende Auffassung richtig ist, dann sind die früher bestimmten Werthe der Diffusionscoefficienten, welche sich für die verschiedenen Drucke auf $h = 20$ mm beziehen, nicht direct miteinander vergleichbar. Die constanten Werthe der Coefficienten, welche bei hinreichend grossem h eintreten müssen, lassen sich nun zwar nicht mit Sicherheit bestimmen; man wird aber diesen Werthen schon bedeutend näher kommen, wenn man die bei dem höheren Druck bestimmten Coefficienten auf jenen Werth h reducirt, welcher für beide Versuchsreihen das gleiche mittlere Druckgefälle liefert. Bezeichnet p den Maximaldruck des Dampfes an der Oberfläche der Flüssigkeit, h die Entfernung derselben vom Ende des Rohres, so wurde die Reduction in der Art vorgenommen, dass p/h für beide Versuchsreihen des Dampfes constant war; dabei wurde der Werth, welcher für den kleineren Druck in der niedrigeren Temperatur für $h = 20$ mm ermittelt wurde, festgehalten.

Die Werthe für Wasserdampf²⁾ wurden daher für den höheren Druck auf $h = 128$ mm, für Alkoholdampf auf $h = 70$ mm reducirt. Der Vollständigkeit halber sind auch die Resultate des Aetherdampfes, bei welchen eine Reduction nicht nöthig war, beigelegt. Die Diffusionscoefficienten, bezogen auf 0° , sind:

1) Nach dieser Ansicht müssen die Werthe des Diffusionscoefficienten mit wachsendem h sich einer bestimmten Grenze nähern; ich habe die Absicht, dies weiter zu verfolgen.

2) Die reducirten Werthe für Wasserdampf sind wahrscheinlich etwas zu gross.

	$\frac{N_1}{N_2} = \frac{288}{442}$	44,8
		685,2
Wasserdampf-Wasserstoff	0,719	0,693
„ -Kohlensäure	0,151	0,132
„ -Luft	0,227	0,204
	$\frac{N_1}{N_2} = \frac{238}{490,6}$	68,6
		664,1
Alkoholdampf-Wasserstoff	0,374	0,382
„ -Kohlensäure	0,0684	0,0687
„ -Luft	0,0986	0,1046
	$\frac{N_1}{N_2} = \frac{215,6}{509,4}$	146
		579,5
Aether-Wasserstoff	0,296	0,297
„ -Kohlensäure	0,0552	0,0553
„ -Luft	0,0776	0,0775

Eine Vergleichung dieser Werthe zeigt, dass die Unterschiede für die gleichen Combinationen nur klein sind, oder dass das Verhältniss N_1/N_2 für die Versuche von geringem Einfluss ist. Ferner ist es beachtenswerth, dass die für den Wasserdampf bestimmten Werthe von den nach der Stefan'schen Formel berechneten Coëfficienten (§ 5), mit Ausnahme von Wasserdampf-Kohlensäure, nur wenig abweichen. Hierdurch erscheint die Verwendung der Stefan'sche Formel gerechtfertigt, um die moleculare Weglänge der Dämpfe wenigstens annähernd zu berechnen.

Hohenheim, im Februar 1884.

II. Ueber eine von Hrn. Bartoli entdeckte Beziehung der Wärmestrahlung zum zweiten Hauptsatze; von Ludwig Boltzmann in Graz.

Bei Gelegenheit meines Referates über Eddy's „radiant heat as an exception of the second law of thermodynamics“¹⁾ wurde ich durch die Güte Hrn. Prof. E. Wiedemann's auf eine interessante Abhandlung Bartoli's²⁾ aufmerksam ge-

1) Eddy, Beibl. 7. p. 251. 1883.

2) Bartoli, *Sopra i movimenti prodotti dalla luce e dal calore*, Florenz bei Le Monnier 1876.

macht. Nebst einer sehr vollständigen Uebersicht über die Vorgeschichte der Radiometer und sorgfältigen eigenen Beobachtungen darüber (wovon besonders das Studium der Bedingungen wichtig sein dürfte, unter denen allein empfindliche Drehwagen gegen den störenden Einfluss radiometrischer Kräfte geschützt werden können) enthält dieselbe den Nachweis einer neuen Beziehung der strahlenden Wärme zum zweiten Hauptsatze. Obwohl meine Ansichten über diesen Gegenstand, der auch im Referate der Fortschritte der Physik über Bartoli's Abhandlung¹⁾ nicht erwähnt wird, noch nicht zum Abschlusse gelangt sind, so glaube ich doch, an dieser Stelle einige darauf bezügliche Ueberlegungen mittheilen zu dürfen, um entweder Hrn. Bartoli selbst oder andere Physiker zur weiteren Discussion dieses Gegenstandes anzuregen, der mir jedenfalls mehr Aufmerksamkeit zu verdienen scheint, als ihm bisher zu Theil wurde.

Hr. Bartoli geht von der Thatsache aus, dass in einem von Wärme durchstrahlten Raume eine wenn auch kleine, aber doch endliche Energie in Form von Wärmestrahlung vorhanden ist²⁾, welche durch Verkleinerung des Raumes einem darin befindlichen Körper zugeführt werden kann. Denken wir uns etwa vier in sich geschlossene Flächen A , B , C und D . B soll ganz innerhalb A liegen, ebenso C innerhalb B , D innerhalb C ; A und D seien absolut schwarz, B und C in- und auswendig absolut spiegelnd, die Wärme nicht leitend; die Temperatur von D sei höher als von A . Der gesammte Raum zwischen A und D sei ein absolutes Vacuum. Zu Anfang der Zeit soll B ein Loch haben, sodass A den ganzen Raum zwischen B und C durchstrahlt. Nun soll sich B schliessen, dagegen C irgendwo ein Loch bekommen; dann verkleinert sich die Fläche B , bis der zwischen ihr und C übrig bleibende Raum sehr klein geworden ist im Vergleich zu dem Raume, welcher anfangs zwischen den beiden Flächen lag. Dabei wird fast alle zwischen B und C in Form von Strahlung vorhandene Energie der Fläche D zugeführt. Nun schliesst

1) Bartoli, Fortschritte (2.) 32. p. 888, 1541. 1876.

2) Vergl. Thomson, Edinb. transact. 21. p. 57. Phil. Mag. (4) 9. p. 36. Compt. rend. 39. p. 529. 1854.

sich wieder das Loch der Fläche C , und das von B öffnet sich. Endlich nimmt B wieder seine alte Gestalt und Grösse an.¹⁾ Die Verkleinerung des Rauminhaltes der Fläche B kann entweder durch Zusammenfallen vollkommen biegsamer Flächen (nach Analogie der Ziehharmonika) oder durch ineinanderschieben reibungsloser Röhren (analog den Auszugsröhren der Fernröhre) geschehen. Nach den bisher in der Wärmetheorie gebräuchlichen Vorstellungen würde durch den geschilderten Vorgang, der beliebig oft wiederholt werden kann, ohne Compensation von einem kälteren zu einem heisseren Körper eine Wärmemenge übergeführt, welche praktisch freilich sehr klein ist, wenn der Rauminhalt der Fläche B nicht enorme Dimensionen hat. Hält man daher die Richtigkeit des zweiten Hauptsatzes fest, so muss irgend eine der benutzten Vorstellungen einer Correctur bedürfen. Am naheliegendsten ist die Annahme, dass es absolut spiegelnde Flächen nicht gibt. Es wird daher die Innenfläche von B , sobald C offen ist, Wärme von D aufnehmen, welche sich theils durch Leitung der Aussenfläche von B mittheilt, theils später, wenn B offen ist, nach A überstrahlt. Ebenso nimmt die Aussenfläche von C Wärme auf, sobald C offen ist, welche sie an A ausstrahlt, wenn wiederum B offen ist; im letzteren Falle geht auch ein Wärmestrom quer durch C . Man wird daher B und C aus drei Schichten bestehen lassen, wovon

1) Bartoli gibt blos zwei Specialfälle des hier behandelten allgemeinen Falles; einmal sind die hier mit A, B, C, D bezeichneten Flächen concentrische Kugelflächen, welche, statt blos ein Loch zu bekommen, völlig verschwinden und wieder neu entstehen; dann sind A und D die beiden vollkommen schwarzen Gegenflächen eines Cylinders; B und C aber zwei darin verschiebbare Stempel, welche, sowie die Innenseite der Cylindermantelfläche, vollkommen spiegeln und die Wärme nicht leiten. An Stelle der Durchlöcherung tritt folgender Vorgang: 1. Stempel B wird seitwärts geschoben, Stempel C ist ganz bei D . A , welches eine tiefere Temperatur als D hat, durchstrahlt den ganzen Cylinder. 2. Stempel B wird unmittelbar an A eingeschoben und C entfernt. 3. B wird bis nach D verschoben, sodass die im Cylinder in Form von Strahlung enthaltene Energie der heisseren Fläche D zugeführt wird. Nun beginnt der Process von neuem, wobei blos die Stempel B und C ihre Rollen vertauschen. Pag. 25 verspricht Bartoli noch andere Mechanismen beschreiben zu wollen, doch ist mir die betreffende Arbeit nicht bekannt.

die beiden äussersten möglichst gut spiegeln, die mittlere die Wärme möglichst schlecht leitet. Durch hinlängliche Vergrösserung der Volumina bei gleichbleibender Dicke der Schichten wird man immer theoretisch, wenn auch nicht praktisch bewirken können, dass die von den Flächen B und C aufgenommene und wieder abgegebene Wärme klein ist gegen die in Form von Strahlung zwischen B und C vorhandene, denn erstere ist den Flächen, letztere dem Volumen proportional. Auch die beim Zusammenfallen oder Ineinanderschieben der Fläche B , sowie beim Oeffnen und Schliessen der Löcher durch die unvermeidliche innere oder äussere Reibung verlorene Arbeit, sowie der beim letzteren Vorgange etwa mögliche Wärmeausgleich kann in gleicher Weise durch Vergrösserung der Volumina bei gleichbleibender Dicke unschädlich gemacht werden; die Löcher können auch in dem als offen bezeichneten Zustande durch Steinsalzplatten verschlossen sein. Der Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatze scheint mir also hierdurch noch nicht aufgehoben zu sein; aber freilich darf die Geschwindigkeit der Contraction der Fläche B nicht unter eine gewisse Grenze sinken, weil sonst die bei kleiner Dicke quer durch die Flächen B und C geleitete Wärme über die gewonnene überwiegen würde.

- Ein Ausweg scheint mir blos in der Annahme zu liegen, dass die Wärmestrahlung selbst, oder das dieselbe vermittelnde Medium Kräfte auf die Körper ausübt. Bartoli nimmt an, dass die Wärmestrahlen einen Druck auf die Körper ausübten, wie dies ähnlich bei den Schallwellen vielfach beobachtet wurde. Ich will versuchen, dieselbe Annahme, soweit es trotz der vielfachen Unbestimmtheit des Gegenstandes geschehen kann, in Formeln zu kleiden. Wir wollen von dem Drucke, welche die Wärmestrahlung auf die Flächeneinheit ausübt, voraussetzen, dass er immer normal ist und in einem geschlossenen allseitig von gleichtemperirter Wärme undurchlässigen Körpern umgebenen Räume blos eine Function der absoluten Temperatur $f(t)$ ist. Nach dem Kirchhoff'schen Satze muss die in einem solchen Raume in Form von Strahlung vorhandene Wärme gleich

dem Volumen v multiplicirt mit einer Temperaturfunction sein. Sei die in der Zeiteinheit von der Flächeneinheit einer vollkommen schwarzen Fläche ausgestrahlte Wärme $\varphi(t)$, so wird davon die Wärmemenge $\varphi(t) \cos \vartheta d\vartheta$ so ausgestrahlt, dass der Winkel der Strahlen mit der Flächennormale zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ liegt. Betrachten wir einen Cylinder, dessen Basis die eben betrachtete schwarze Fläche vom Inhalte Eins, und dessen unendlich kleine Höhe $= \varepsilon$ ist, so wird von der unter dem oben definirten Winkel ausgesendeten Wärme diejenige im Cylinder in Form von Strahlung vorhanden sein, welche während der Zeit $\varepsilon / \cos \vartheta$ ausgesandt wird, und deren Betrag gleich $\varphi(t) \cos \vartheta \cdot d\vartheta \cdot \varepsilon / c \cos \vartheta$ ist. Integriren wir von 0 bis $\pi/2$ und multipliciren noch mit 2, da die schwarze Fläche ebenso viel absorbirt, als sie aussendet, so erhalten wir die gesammte im Cylinder vorhandene Wärme. Diese noch durch das Volumen ε des Cylinders dividirt, liefert für die in der Volumeneinheit in Form von Strahlung vorhandenen Wärme den Werth $\pi \varphi(t) / c$. Dabei ist c die freilich für alle Strahlen als gleich vorausgesetzte Fortpflanzungsgeschwindigkeit der strahlenden Wärme. Die Gleichung Bartoli's $\theta = 2KR\varepsilon/v$ auf p. 24 scheint mir bloß diejenigen Wärmestrahlen zu umfassen, welche nahe radial die Kugel durchlaufen; zu diesen kommen aber noch unendlich viele andere in den Richtungen aller möglichen Kugelsehnen hinzu, sobald die Kugel nur das mindeste Emissionsvermögen und Absorptionsvermögen besitzt. Ich bemerke hier gelegentlich, dass ich schon längere Zeit die experimentelle Untersuchung der Wärmestrahlen theils im ganzen, theils zum Zwecke spectraler Zerlegung begann, indem ich die Strahlung eines rings mit gleichtemperirten Wänden umgebenen Raumes aus einem kleinen Loche oder Spalte dieser Wände für die eines schwarzen Körpers substituirt, ein Princip benutzend, welches unlängst Christiansen¹⁾ zur Erklärung der stärkeren Strahlung geritzter Metalle anwandte. Durch Vergleichung mit der Strahlung ebener Körper könnte dann auch deren Emissionsvermögen bestimmt werden. Um den zweiten Hauptsatz auf den von

1) Christiansen, Wied. Ann. 21. p. 364. 1884.

Bartoli ersonnenen Vorgang anwenden zu können, müssen wir diesen so modificiren, dass er umkehrbar wird. Der Ausgangszustand sei derjenige, wo die Fläche B dasselbe Volumen wie C hat. C hat ein Loch, B sei geschlossen. B vergrößere nun sein Volumen um den Betrag v und werde dabei innen vom Körper D , dessen absolute Temperatur t_2 sei, aussen vom Körper A , dessen Temperatur t_1 sei, bestrahlt. Auf die Flächeneinheit der inneren Fläche von B wird daher der Druck $f(t_2)$, auf die der Aussenfläche $f(t_1)$ lasten. Zur Bewegung der ersteren muss die Arbeit $v f(t_2)$ geleistet werden, während die letztere die Arbeit $v f(t_1)$ hervorbringt. Die der ersteren Arbeit äquivalente Wärme, sowie die in Form von Strahlung im Raume v vorhandene, muss dem Körper D entzogen werden, also im ganzen $J v f(t_2) + \pi v \varphi(t_2)/c$, während dem Körper A die Wärmemenge $J v f(t_1) + \pi v \varphi(t_1)/c$ zugeführt wird. J ist das thermische Arbeitsäquivalent. Damit der Vorgang umkehrbar sei, muss nun auch das Loch der Fläche C sich schliessen, und die Fläche B ihr Volumen noch weiter vergrößern, bis der Raum zwischen B und C die Temperatur t_1 angenommen hat. Da dieser Raum ein Vacuum ist, werden wir unter seiner Temperatur die als gleich vorausgesetzte Temperatur der Innenfläche von B und der Aussenfläche von C zu verstehen haben, denen jedenfalls eine Spur von Emissionsvermögen zukommen wird, deren Masse aber als so klein vorausgesetzt wird, dass die in ihrer Masse enthaltene Wärme verschwindet gegen die in Form von Strahlung im Raume zwischen B und C enthaltene. Dieser Raum vergrößert dabei sein Volumen noch um w . Dann findet man wie oben, dass dabei dem Körper A noch die Wärmemenge $J w f(t_1) + \pi w \varphi(t_1)/c$ zugeführt wird. Schwieriger ist die Discussion der Verhältnisse im Raume zwischen B und C . Dieser Raum, oder, wenn man lieber will, seine Begrenzungsflächen haben zu irgend einer Zeit die absolute Temperatur t , sein Volumen wachse um dv und seine Temperatur um dt . (dt ist negativ, da die Temperatur sinkt.) Dann vermehrt sich die im Raume enthaltene Wärme um $(\pi/c) \cdot d[v \varphi(t)]$. Der auf der Innenfläche B lastende Druck leistet dabei die Arbeit $f(t) dv$. Da

nun die Innenfläche und Aussenfläche von B durch eine Wärme undurchlässige Schicht getrennt sind, und dasselbe von der Fläche C gilt, da ferner die Flächen B und C massenlos sind, so sind jetzt die Zustandsänderungen des Raumes zwischen B und C gewissermassen adiabatisch. Die Vermehrung des Wärmeinhaltes muss äquivalent der von aussen zugeführten Arbeit, also der negativen geleisteten sein, d. h. man hat:

$$\langle \pi/c \rangle d[v\varphi(t)] = -Jf(t)dv,$$

woraus folgt:
$$\frac{\varphi'(t)dt}{af(t) + (t)} = -\frac{dv}{v}, \quad \text{wobei:}$$

$$a = Jc/\pi \text{ ist.}$$

Integriert man hier über den ganzen zuletzt beschriebenen Vorgang, also von v und t_2 bis $v+w$ und t_1 , so ergibt sich:

$$l(v+w) - lv = \int_{t_1}^{t_2} \varphi'(t)dt / [af(t) + \varphi(t)],$$

l ist der natürliche Logarithmus.

Hieran hat sich noch ein dritter Vorgang zu schliessen, wobei B wieder ein Loch bekommt und sich bei geschlossenem C bis zum Volumen C zusammenzieht. Da es hierbei aussen und innen von derselben Temperatur bestrahlt wird, so wird weder Arbeit geleistet, noch einem Körper Wärme zugeführt oder entzogen. Wir haben nun den Ausgangszustand in vollkommen umkehrbarer Weise erreicht, und nach dem zweiten Hauptsatze müssen wir gleiche Werthe bekommen, wenn wir die dem Körper D entzogene Wärme durch t_2 , oder wenn wir die dem Körper A zugeführte Wärme durch t_1 dividiren, d. h.:

$$[af(t_1) + \varphi(t_1)](v+w)/t_1 = [af(t_2) + \varphi(t_2)]v/t_2$$

oder mit Rücksicht auf das früher Gefundene:

$$l \frac{af(t_2) + \varphi(t_2)}{t_2} - l \frac{af(t_1) + \varphi(t_1)}{t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\varphi'(t)dt}{af(t) + \varphi(t)}.$$

Da hier t_1 und t_2 unabhängig veränderlich sind, so sieht man leicht, dass zum Bestehen dieser Gleichung nothwendig und hinreichend ist, dass:

$$d \frac{af(t) + \varphi(t)}{t} = \frac{\varphi'(t)dt}{t} \text{ sei, also:}$$

$$f(t) = \frac{\pi}{c} \left[t \int \frac{q(t) dt}{t} - q t \right] = \frac{\pi}{c} t \int \frac{q(t) dt}{t^2}.$$

Für das Stefan'sche Strahlungsgesetz¹⁾ $q(t) = At^4$ wäre, abgesehen von einer mit t multiplicirten Constante, welche aus diesen Betrachtungen nicht bestimmt werden kann und wohl am zweckmässigsten gleich 0 gesetzt wird: $f(t) = \pi q(t)/3c$, was abgesehen vom numerischen Factor mit dem Resultate Bartoli's übereinstimmt. Wird eine Fläche von der einen Seite unter der Temperatur t_1 , von der anderen unter der Temperatur t_2 bestrahlt, so wirkt auf die Flächeneinheit die Druckdifferenz:

$$p = [q(t_2) - q(t_1)] \pi/3c.$$

Für $t_2 = 100^\circ \text{C}$. $t_1 = 0^\circ \text{C}$. ist $q(t_2) - q(t_1)$ gleich der von einer schwarzen Fläche von 100°C . an eine schwarze Umgebung von 0°C . ausgestrahlten Wärmemengen, also gleich:

$$0,0167 \text{ g Cal./sec (cm)}^2. \text{ } ^2)$$

Das mechanische Wärmeäquivalent $1/J$ ist:

$$43000 \text{ g Gewicht cm/g Cal.},$$

endlich ist $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}$, woraus folgt $p = 0,00002 \text{ mg}$ Gewicht auf dem Quadratcentimeter, welche Grösse allerdings 10000mal grösser würde, wenn man t_2 gegen 3000° setzte, wobei freilich dann wieder Luftströmungen um so störender auf die Beobachtungen wirken würden. Der Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatze könnte aber auch durch eine andere Hypothese gehoben werden, etwa, dass die Körper in dem die Wärmestrahlung fortpflanzenden Medium einen Widerstand nach Art der Reibung erfahren. Dasselbe würde nach Obigem freilich von der Bewegungsgeschwindigkeit unabhängig herauskommen, dagegen mit der Temperatur im selben Verhältnisse wie die Wärmestrahlung wachsen. Da aber, wie bereits bemerkt, der Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatze bei kleinen Geschwindigkeiten der Fläche B auch durch die Wärmeleitung in der Dickendimension der Flächen B und C , sobald diese dünn sind oder durch die Wärmeauf-

1) Stefan, Wien. Ber. **79**. p. 423. 1879.

2) Stefan, l. c. p. 419. Christiansen, Wied. Ann. **19**. p. 280. 1883.

nahme und -abgabe dieser Flächen (sobald sie dicker sind) gehoben werden kann, so könnte ganz gut jener hypothetische Reibungswiderstand erst bei bedeutenden Geschwindigkeiten erheblich werden. Ueberhaupt würde dann der Vorgang kaum quantitativ zu berechnen sein, da er nicht mehr umkehrbar wäre. Aber sollten selbst diese ponderomotorischen Kräfte des die Wärmestrahlung fortpflanzenden Mittels für immer ausserhalb des Bereiches des experimentell Nachweisbaren liegen, so schien es mir doch von hohem Interesse zu sein, wenn sich deren Existenz aus dem zweiten Hauptsatze a priori beweisen liesse.

Graz, im März 1884.

**III. Ueber das Arbeitsquantum, welches bei chemischen Verbindungen gewonnen werden kann;
von Ludwig Boltzmann in Graz.**

(Aus dem 88. Bde. der Sitzungsber. der k. Akad. der Wiss. zu Wien.
II. Abth. vom 18. Oct. 1883 mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Es war früher die Ansicht herrschend, dass die Arbeit, welche bei irgend einer chemischen Verbindung gewonnen werden kann, genau gleich sei der Vermehrung, welche die potentielle Energie der Molecularkräfte durch die chemische Verbindung erfährt, oder mit anderen Worten: dass alle durch die chemische Verbindung erzeugte Wärme in Arbeit verwandelt werden kann. Da aber das Temperaturniveau, bis auf welches diese Wärme durch die chemische Verbindung gebracht werden kann, eine gewisse endliche Grenze nicht übersteigt, so ist es zweifelhaft, ob bei directer chemischer Verbindung alle Wärme in Arbeit verwandelt werden kann, wenn auch jedenfalls in solchen Fällen, wo die durch die chemische Verbindung erzeugbare Temperatur eine sehr hohe ist, nahezu alle Wärme verwandelbar ist. Auch wenn die chemische Energie in anderer Weise etwa mittelst electrischer Ströme in äussere Arbeit umgesetzt wird, ist die erzeugbare Arbeit (nach v. Helmholtz die freie Energie)

nicht immer genau proportional der bei der Verbindung entwickelten Wärme.¹⁾

Wenn man daher behauptet, Arbeit könne immer ohne Verlust in andere Arbeit oder lebendige Kraft, Wärme dagegen nicht ohne Verlust in Arbeit verwandelt werden, so müsste dieser Satz meiner Ansicht nach genauer in folgender Weise ausgesprochen werden: die kinetische Energie der sichtbaren Massenbewegung und die potentielle Energie der in sichtbare Entfernungen getrennten Massen sind ohne weiteres ineinander verwandelbar; dagegen ist die lebendige Kraft der Molecularbewegung und auch die potentielle Energie der Molecularkräfte nur bedingt und theilweise in sichtbare Energie verwandelbar. Natürlich kann das Kriterium der Verwandelbarkeit nicht auf der Sichtbarkeit durch das Auge beruhen, sondern scheint mir vielmehr darin begründet zu sein, dass bei der Energie sichtbarer Massenbewegung immer einzelne Geschwindigkeitsgrößen oder Geschwindigkeitsrichtungen so überwiegend vorherrschen, dass die Vertheilung der verschiedenen Geschwindigkeitsgrößen und Richtungen unter die Molecüle unendlich viel vom Maxwell'schen (wahrscheinlichsten) Vertheilungsgesetze abweicht; daher ist sichtbare Massenbewegung (Molarbewegung) immer als Wärme von unendlicher Temperatur zu betrachten und unbedingt in sichtbare Arbeit verwandelbar.

Helmholtz bezeichnet sie daher auch als geordnete Bewegung, wogegen er die Molecularbewegung, bei welcher alle möglichen Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen vertreten und nach dem Maxwell'schen Gesetz vertheilt sind, als ungeordnete bezeichnet. Es ist übrigens hierbei zu bemerken, dass auch eine Molecularbewegung möglich ist, bei welcher alle möglichen Geschwindigkeitsrichtungen im Raume gleich wahrscheinlich und alle möglichen Größen der Geschwindigkeit vertreten sind, und welche doch nicht dem Maxwell'schen Vertheilungsgesetze entspricht. Bei ihrer Ueberführung in die Maxwell'sche Vertheilung müsste, wenn meine Schlüsse²⁾ richtig sind, noch immer sichtbare

1) Vgl. v. Helmholtz, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 26. p. 22. 1883.

2) Boltzmann, Wien. Ber. 76. p. 373. 1877.

lebendige Kraft oder Arbeit gewonnen werden können, wenn auch nicht mehr alle lebendige Kraft in sichtbare lebendige Kraft oder Arbeit verwandelt werden könnte. Obwohl also auch erstere Geschwindigkeitsvertheilung keine geordnete wäre, so müsste doch die Maxwell'sche Vertheilung gewissermassen als noch mehr ungeordnet, oder wie ich mich ausdrücke, als noch wahrscheinlicher bezeichnet werden. Die Grösse, welche ich in der citirten Abhandlung als das Permutabilitätsmaass oder Wahrscheinlichkeitsmaass einer Zustandsvertheilung bezeichnete, könnte also auch als das Maass ihrer Ungeordnetheit betrachtet werden, jede Vermehrung desselben, also jeder Uebergang von einer mehr geordneten zu einer weniger geordneten Bewegung ist mit der Möglichkeit sichtbarer Arbeitsleistung verknüpft. Es scheint mir hierin die potentielle Energie nicht wesentlich verschieden von der kinetischen zu sein. Ist sie durch sichtbare Trennung sich anziehender Massen bedingt, so ist sie als vollkommen geordnet zu bezeichnen und daher, wie Wärme von unendlicher Temperatur, unbedingt in andere sichtbare Arbeit verwandelbar.

Die potentielle Energie der Molecularkräfte dagegen ist nur theilweise geordnet und daher nur theilweise verwandelbar; und zwar umsoweniger, je mehr sich das Vorkommen der verschiedenen Positionen der Atome dem durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung geforderten wahrscheinlichsten Zustande nähert. Umgekehrt kann aber auch bei einer chemischen Verbindung mehr Energie in Arbeit verwandelbar sein, als die durch die chemischen Kräfte gewonnene potentielle Energie beträgt, weil durch die blosse Mischung der ungleichartigen Atome untereinander der Zustand des Systemes aus einem unwahrscheinlicheren in einen wahrscheinlicheren, aus einem mehr geordneten in einen weniger geordneten übergeht. Dies wird am klarsten, wenn man bedenkt, dass bei der blossen Diffusion zweier chemisch indifferenter Gase Arbeit gewonnen werden kann, ohne dass dabei irgend eine potentielle Energie frei wird, oder irgend eine Temperaturveränderung vor sich geht. In der That ist die Vertheilung der Molecüle besser geordnet, wenn alle Sauerstoffmolecüle

in der unteren, alle Wasserstoffmoleculë in der oberen Hälfte eines Gefässes sich befinden, als wenn sämmtliche Moleculë untereinander gemischt sind.¹⁾

Diese Diffusion geschieht freilich, ohne dass chemische Kräfte ins Spiel kommen, doch ist klar, dass umgekehrt keine chemische Verbindung ohne eine gleichzeitige Mischung heterogener Atome denkbar ist, dass also diejenige Ursache, welche bei der Gasdiffusion rein zur Erscheinung kommt, auch bei jeder chemischen Verbindung mitwirken und die gewinnbare Arbeit vermehren muss. Ich habe die in der citirten Abhandlung auseinandergesetzten Principien nicht auf chemische Vorgänge angewandt, und in der That ist gegenwärtig ein praktischer Gewinn hieraus wegen unserer Unbekanntschaft mit den chemischen Affinitätskräften kaum zu erwarten. Trotzdem scheint es mir nicht ohne theoretisches Interesse zu sein, den Fall zu behandeln, wo sich zwei Gase zu einer wiederum gasförmigen Verbindung vereinigen, welcher natürlich auch den Fall der Dissociation von Gasen einschliesst. Ich will, wie in der citirten Abhandlung, zuerst mit einigen numerischen Beispielen der combinatorischen Analyse beginnen, um so allmählich zu den complicirten, der Wirklichkeit entsprechenden Fällen überzugehen. Da ich in der citirten Abhandlung bereits ausführlich die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Zustandsvertheilungen unter gegebenen Moleculen erörtert habe, so bleibt gegenwärtig zunächst zu untersuchen, wie gross die Wahrscheinlichkeit der Bildung dieser oder jener Moleculë aus gegebenen Atomen sei.

1. Die einfachste Frage ist folgende: in wie vielen verschiedenen Weisen können wir aus aN gleichbeschaffenen

1) Die bei der Diffusion zweier Gase gewinnbare Arbeit wurde zuerst von Lord Rayleigh (Phil. Mag. April 1875) berechnet. In meiner bereits citirten Abhandlung habe ich gezeigt, wie sich ein numerisches Maass für die Geordnetheit einer Zustandsvertheilung aufstellen lässt. Berechnet man hiernach die bei der Diffusion gewinnbare Arbeit, so stimmt sie genau mit der von Lord Rayleigh gefundenen. Vgl. meine Abhandlung Wien. Ber. 78. p. 733. 1878, bei deren Abfassung ich übrigens die Arbeit Lord Rayleigh's nicht kannte.

Atomen N Molecüle von je a Atomen zusammensetzen? Wir können im ganzen die aN Atome $(aN)!$ mal permutiren. Die ersten a Atome sollen immer das erste, die zweiten a das zweite Molecül u. s. w. bilden.

Alsdann führt die blosse Permutation der ersten a Atome zu keiner neuen Zusammensetzung der Molecüle aus den Atomen, ebensowenig die Permutation der nächstfolgenden a Atome u. s. w. Durch alle diese Permutationen erhalten wir blos Vertauschungen der Atome in einem und demselben Molecüle. Wir werden aber ohnedies später allen möglichen Anordnungen der Atome im Molecüle Rechnung tragen. Jetzt ist ein Molecül, dessen Atome blos untereinander permutirt sind, als kein neues zu betrachten. Es ist also die Gesamtzahl $(aN)!$ der Permutationen durch $(a!)^N$ zu dividiren. Ebenso ergibt sich keine neue Gruppierung der Atome zu Molecülen, wenn das Molecül, welches früher an erster Stelle stand, jetzt an zweiter zum Vorschein kommt u. s. w.; denn auch den verschiedenen Permutationen, welche dadurch entstehen, dass die einzelnen Molecüle alle möglichen Orte im Raume einnehmen, wird später Rechnung getragen werden. Daher ist auch noch durch $N!$ d. h. durch die Zahl zu dividiren, welche angibt, wie oft sich die N Molecüle untereinander permutiren lassen. Es können daher aus aN Atomen $(aN)!/(a!)^N N!$ als verschieden zu betrachtende a -atomige Molecüle gebildet werden. Z. B.:

$$N = 2, \quad a = 2, \quad \frac{4!}{4 \cdot 2} = 3.$$

Bezeichnen wir die vier Atome mit den fortlaufenden arabischen Zahlen, so sind folgende drei Bildungsweisen der Molecüle möglich:

$$(12) (34), \quad (13) (24), \quad (14) (23)$$

$$N = 2, \quad a = 3, \quad \frac{6!}{6^2 \cdot 2} = 10,$$

$$(123) (456), \quad (124) (356), \quad (125) (346), \quad (126) (345), \quad (134) (256), \\ (135) (246), \quad (136) (245), \quad (145) (236), \quad (146) (235), \quad (156) (234).$$

$$N = 3, \quad a = 2, \quad \frac{6!}{8 \cdot (3!)} = 15,$$

(12) (34) (56), (12) (35) (46), (12) (36) (45), (13) (24) (56),
 (13) (25) (46), (13) (26) (45), (14) (23) (56), (14) (25) (36),
 (14) (26) (35), (15) (23) (46), (15) (24) (36), (15) (26) (34),
 (16) (23) (45), (16) (24) (35), (16) (25) (34).

2. Wir wollen nun sogleich zum allgemeinsten Falle übergehen. In einem Gefässe vom Volumen V sollen verschiedenartige Atomgattungen vorhanden sein; dieselben sollen zur Bildung verschiedener Gattungen von Molecülen fähig sein. Die erste mögliche Molecülgattung sei so beschaffen, dass jedes Molecül a_1 Atome von der ersten Gattung, b_1 Atome von der zweiten Gattung, c_1 Atome von der dritten Gattung u. s. w. enthält. Jedes Molecül der zweiten Molecülgattung soll a_2 Atome von der ersten Gattung, b_2 Atome von der zweiten Gattung, c_2 Atome von der dritten Gattung u. s. w. enthalten. Wir fragen uns, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass sich von der ersten Molecülgattung gerade N_1 , von der zweiten N_2 Molecüle u. s. w. von der letzten Molecülgattung N , Molecüle im Gefässe bilden.

Die Gesamtzahl der Atome erster Gattung ist also:

$$(1) \quad A = \sum_{k=1}^{k=\nu} a_k N_k;$$

ebenso ist die Gesamtzahl der Atome zweiter Gattung:

$$(2) \quad B = \sum_{k=1}^{k=\nu} b_k N_k \text{ u. s. w.}$$

Sämmtliche Atome erster Gattung lassen sich $A!$ mal permutiren, für jede dieser Permutationen lassen sich wieder die Molecüle der zweiten Gattung $B!$ mal permutiren u. s. w., sodass im ganzen $A! B! C! \dots$ Permutation möglich sind.

Dabei erscheinen aber wieder keine neuen Molecüle, wenn bloß die a_1 Atome irgend eines der N_1 Molecüle untereinander permutirt werden, weshalb die obige Permutationszahl durch $(a_1!)^{N_1}$ zu dividiren ist; ebenso ist durch $(b_1!)^{N_1}$, $(c_1!)^{N_1}$, $(a_2!)^{N_2} \dots$ zu dividiren. Endlich ist auch noch durch $N_1! N_2! N_3! \dots$ zu dividiren, da durch blosse Permutation der Stellungen der Molecüle gegeneinander keine neuen Molecüle entstehen. Man erhält daher für die gesammte

Zahl, welche angibt, wie oft sich die Molecüle aus den Atomen bilden lassen, den Ausdruck:

$$(3) \quad Z = \frac{A! B! C! \dots}{(a_1! b_1! c_1! \dots)^{N_1} (a_2! b_2! c_2! \dots)^{N_2} (a_3! b_3! c_3! \dots)^{N_3} \dots N_1! N_2! N_3! \dots}.$$

Es seien z. B. A Chlor- und B Wasserstoffatome gegeben. Es wird gefragt, wie wahrscheinlich es ist, dass sich daraus gerade N_1 Chlor-, N_2 Wasserstoff- und N_3 Chlorwasserstoffmolecüle bilden. Hier ist $a_1 = 2$, $b_1 = 0$; $a_2 = 0$, $b_2 = 2$; $a_3 = 1$, $b_3 = 1$; die Anzahl der Chloratome ist $A = 2 N_1 + N_3$; die Anzahl der Wasserstoffatome ist $B = 2 N_2 + N_3$; die Anzahl der Bildungsweisen:

$$Z = \frac{A! B!}{2^{N_1 + N_2} N_1! N_2! N_3!}.$$

Da wir die Affinitätskräfte noch nicht der Rechnung unterzogen haben, so wollen wir hier beispielsweise bloß annehmen, dass die Wechselwirkung zwischen zwei Chloratomen, zwischen zwei Wasserstoffatomen und zwischen je einem Chlor- und einem Wasserstoffatom dieselbe sein soll. Dann wird die Wahrscheinlichkeit irgend eines Mischungsverhältnisses proportional sein der Wahrscheinlichkeit der Bildung der betreffenden Molecüle, also der oben mit Z bezeichneten Zahl. Das Gemisch wird am wahrscheinlichsten sein, wenn Z ein Maximum ist, also da der Zähler von Z constant ist, wenn der Nenner ein Minimum ist. Benutzt man für die Factoriellen die bekannten Annäherungsformeln, so ist der Logarithmus jenes Nenners, abgesehen von einer Constanten:

$$N_1 \log 2 N_1 + N_2 \log 2 N_2 + N_3 \log N_3.$$

Sucht man von dieser Grösse das Minimum, unter den beiden Nebenbedingungen, dass $A = 2 N_1 + N_3$ und $B = 2 N_2 + N_3$ constant sein müssen, so ergibt sich:

$$N_1 = \frac{A^2}{2(A+B)}, \quad N_2 = \frac{B^2}{2(A+B)}, \quad N_3 = \frac{AB}{A+B}, \quad \left(\frac{N_3}{2}\right)^2 = N_1 N_2,$$

d. h. wenn die chemischen Affinitäten so wirksam wären, dass die Bildung einzelner Atome, sowie drei und mehratomiger Molecüle unendlich unwahrscheinlich wäre, dass dagegen im zweiatomigen Molecüle die Wechselwirkung zweier Chlor-

atome, zweier Wasserstoffatome oder eines Chlor- und eines Wasserstoffatoms dieselbe wäre, so würde das Gleichgewicht der Dissociation dann eintreten, wenn die halbe Anzahl der Chlorwasserstoffmoleküle die mittlere geometrische Proportionale der Anzahl der Chlormoleküle und der Anzahl der Wasserstoffmoleküle wäre. Die Bedeutung der allgemeinen Formel (3) kann man sich noch an Zahlenbeispielen versinnlichen. Seien z. B. zwei Chlor- und zwei Wasserstoffmoleküle gegeben, dann ist:

$$N_1 = N_2 = 0, \quad N_3 = 2, \quad a_3 = 1, \quad b_3 = 1, \quad A = 2, \quad B = 2;$$

daher:

$$Z = \frac{2! \cdot 2!}{2!}.$$

Bezeichnen wir die Chloratome mit arabischen, die Wasserstoffatome mit römischen Ziffern, so sind in der That nur zwei Bildungsweisen der Moleküle möglich, nämlich:

$$(1\text{ I}) (2\text{ II}), \quad (1\text{ II}) (2\text{ I});$$

seien aus vier Wasserstoffatomen und zwei Sauerstoffatomen zwei Wasserdampfmoleküle zu bilden, so ist:

$$N_1 = 2, \quad a_1 = 2, \quad b_1 = 1, \quad A = 4, \quad B = 2,$$

daher:

$$Z = \frac{4! 2!}{(2!)^2 \cdot 2!} = 6.$$

Die Bildungsweisen der Moleküle sind folgende:

$$(12\text{ I}) (34\text{ II}), \quad (12\text{ II}) (34\text{ I}), \quad (13\text{ I}) (24\text{ II}), \quad (13\text{ II}) (24\text{ I}), \\ (14\text{ I}) (23\text{ II}), \quad (14\text{ II}) (23\text{ I}).$$

3. Nun handelt es sich weiter darum, wie oftmal aus den gegebenen Molekülen eine gegebene Zustandsvertheilung gebildet werden kann. Wir kehren da wieder zu dem unter Nr. 2 zu Anfang behandelten allgemeinen Fall zurück. Um den abstracten Charakter der Betrachtung nicht noch mehr zu steigern, wollen wir nicht von generalisirten, sondern von gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten Gebrauch machen. Statt der Differentiale führen wir sehr kleine Intervalle ein, welche für sämtliche x -Coordinaten gleich δ , für die y - und z -Coordinaten, sowie für die drei Geschwindigkeitscomponenten nach den Axen, respective gleich ϵ , ζ , η , ϑ , ι sein sollen. κ , λ , μ , ρ , σ , τ sollen sehr grosse ganze Zahlen sein, und zwar so, dass $\kappa\delta$, $\lambda\epsilon$, $\mu\zeta$, $\rho\eta$, $\sigma\vartheta$, $\tau\iota$ auch noch sehr gross sind. Statt zu sagen, die x -Coordinaten haben alle möglichen

Index 3 an Stelle von 2 u. s. w., für die Molecüle letzter Gattung der untere Index ν .

Nach den Principien, welche ich jedesmal beim Uebergange von einer endlichen Anzahl lebendiger Kräfte oder überhaupt Zustände zu einer unendlichen Reihe derselben angewendet habe, sind jene φ_1 Molecüle als in demselben Zustande befindlich zu betrachten, welchen wir als den Zustand p_1 bezeichnen wollen.

Die Werthe, welche die Function f annimmt, wenn man den ganzen Zahlen $k^1, l^1 \dots$ andere und andere Werthe beilegt, sollen mit χ_1, ψ_1 u. s. w. bezeichnet werden, dann sind auch die χ_1 Molecüle als in demselben Zustande (q_1) befindlich aufzufassen, ebenso die ψ_1 in demselben Zustande (r_1) u. s. w.

Die Aufgabe ist also jetzt folgende: In einem Sacke befinden sich sehr viele (n) Zettel, auf jedem ist einer der Zustände p_1, q_1 , oder r_1 u. s. w. aufgeschrieben, und zwar auf gleichviel Zetteln der erstere, wie der zweite Zustand u. s. w.¹⁾

1) Dass von allen diesen Zuständen gleichviel genommen werden müssen, ist darin begründet, dass, wenn gar keine Bedingungsgleichung gegeben ist, die Wahrscheinlichkeit vollkommen gleich ist, dass ein Atom oder der Endpunkt einer Geschwindigkeit in einem beliebigen Volumenelemente liegt. Vgl. hierüber Watson a treatise of the kinetic theory of gases. 3. p. 13. oder Boltzmann, Wien. Ber. 84. p. 136. 1881. Aus demselben Grunde müssen auch alle Elemente der X -Coordinationen, welche wir mit δ bezeichnet haben, untereinander gleich angenommen werden, damit alle Stellen des Raumes sowohl untereinander als auch für alle Atome als gleichberechtigt erscheinen. $\delta, s, \zeta, \eta, \vartheta, \iota$ brauchen nicht untereinander gleich zu sein, denn die X -Coordinate steht in keiner Beziehung zur Y -Coordinate. Man könnte bezweifeln, ob die Grenzen aller Coordinationen der Atome eines Molecüls mit $-\infty$ und $+\infty$ festzusetzen sind, da ja die Atome sich niemals sehr weit entfernen werden, allein dieser Zweifel wird dadurch gehoben, dass die zu grösserer Entfernung notwendige Arbeit einen sehr grossen Werth hat, sodass solche grössere Entfernungen praktisch sehr unwahrscheinlich werden. In der Theorie werden wir immer die möglichen Entfernungen der Atome eines zweiatomigen Molecüls von Null bis ∞ variiren lassen und darunter verstehen, dass auch Entfernungen, welche gegen die mittlere Entfernung ziemlich gross sind, oder besser gesagt, für welche die Kraftfunction gegen die mittlere sehr gross ist, in einzelnen seltenen Fällen vorkommen können. Die Kraftfunction könnte ja für kleine Zuwächse der Entfernung schon riesig anwachsen.

für jedes der N_1 Molecüle wird nun ein Zettel gezogen, wie wahrscheinlich ist es, dass gerade die obige Zustandsvertheilung gezogen wird, d. h. auf wie viele verschiedene Weisen können die Zettel gezogen werden, sodass dabei φ_1 Molecüle den Zustand p_1 , χ_1 den Zustand q_1 u. s. f. erhalten. Offenbar auf so viele verschiedene Weisen, als sich N_1 Elemente permutiren lassen, von denen φ_1 untereinander gleich sind, ebenso χ_1 , ψ_1 u. s. f. also:

$$(7) \quad \frac{N_1!}{\varphi_1! \chi_1! \psi_1! \dots} \text{ mal.}$$

Bezeichnen wir die analogen Grössen für die zweite Molecülgattung mit dem unteren Index 2, so werden sich die Zustände der Molecüle zweiter Gattung:

$$(8) \quad \frac{N_2!}{\varphi_2! \chi_2! \psi_2! \dots}$$

mal permutiren lassen. Und Aehnliches gilt für die übrigen Molecülgattungen. Um also das Permutabilitätsmaass, d. h. die Wahrscheinlichkeit irgend eines bestimmten Zustandes der gesamten Gasmasse zu erhalten, ist der Ausdruck (3) mit (6), (7) u. s. w. zu multipliciren, was liefert:

$$(9) \quad P = \frac{A! B! C! \dots}{(a_1! b_1! c_1! \dots)^{N_1} (a_2! b_2! c_2! \dots)^{N_2} (a_3! b_3! c_3! \dots)^{N_3} \dots \varphi_1! \chi_1! \psi_1! \dots \varphi_2! \chi_2! \dots} \cdot ^{1)}$$

1) Um hier nochmals ein illustrirendes Beispiel mit endlichen Zahlen anzugeben, seien vier Chlor- und vier Wasserstoffatome gegeben; wenn daraus zwei zweiatomige Chlor- und zwei zweiatomige Wasserstoffmolecüle gebildet werden (Fall *A*), so ist $N_1 = N_2 = 2$, $a_1 = b_2 = 2$, daher sind $4! 4! / 2^2 2^2 2 \cdot 2 = 9$ Bildungsweisen möglich; werden dagegen vier zweiatomige Chlorwasserstoffmolecüle (Fall *B*) gebildet, so ist $N = 4$, $a = b = 1$, daher existiren $4! 4! / 4! = 24$ verschiedene Bildungsweisen. Es verhält sich daher die Wahrscheinlichkeit des Falles *A* zu der des Falles *B* wie 3:8, wenn, wie wir voraussetzen, das Wirkungsgesetz für die Chlor- und Wasserstoffatome aufeinander und der Chlor- auf die Wasserstoffatome dasselbe ist. Seien etwa für jedes Molecül nur zwei Zustände *C* und *D* möglich, z. B. eine grössere und eine kleinere Entfernung der Atome oder die Anwesenheit des Schwerpunktes in zwei verschiedenen Volumenelementen. Wir können hier nicht die wahrscheinlichste Zustandsvertheilung berechnen, wir wollen daher sowohl im Falle *A* als auch im Falle *B* alle überhaupt möglichen Zustandsvertheilungen addiren. Im Falle *B* können alle vier Molecüle den Zustand *C* in $4! / 4!$ verschiedenen Weisen haben. Es ist dann $N = 4$, $\varphi = 4$. Ebenso oft

Hier handelt es sich natürlich blos um die Wahrscheinlichkeit, dass gegebene Atome zu verschiedenen chemischen Verbindungen combinirt werden, und diese wieder verschiedene Zustände haben. Es ist also der Zähler des Ausdruckes (9) eine constante Grösse.

Es muss ferner angenommen werden, dass von jeder Molecülgattung in jedem Volumenelemente eine sehr grosse Anzahl vorhanden ist. Wir können uns daher der Annäherungsformel bedienen:

$$(10) \quad l(q!) = \frac{1}{2} l(2\pi) + q l q + \frac{1}{2} l q - q,$$

wobei l den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Führen wir also wieder die ausführlichen Bezeichnungen ein, so ist:

$$(11) \quad \left\{ l(q_1! \chi_1! \nu_1! \dots) = \sum [f_1 (k^1 \delta, l^1 \epsilon, m^1 \zeta, r^1 \eta, s^1 \vartheta, t^1 \iota, k^2 \delta \dots \right. \\ \left. \iota^{a_1+b_1+\dots g_1 \iota}) \cdot (\delta \epsilon \zeta \eta \vartheta \iota)^{a_1+b_1+\dots g_1} \right]!$$

Die Summe ist so zu verstehen, dass jedes der k alle

können alle vier den Zustand D haben. Dass drei Molecüle den Zustand C , eines den Zustand D oder umgekehrt hat, ist in $4!/3!$ verschiedenen Weisen möglich, denn dann ist $N = 4$, $q = 3$ und $\chi = 1$. Dass zwei Molecüle den Zustand C und ebenso viele den Zustand D haben, ist in $4!/(2!)^2$ verschiedenen Weisen möglich. Alle überhaupt möglichen Zustandsvertheilungen können daher in $2 + 2 \cdot 4 + 6 = 16$ Weisen hergestellt werden. Im Falle A können alle Chlormolecüle den Zustand C oder D in einer Weise, eines C das andere D in zwei Weisen haben; es können also die Chlormolecüle ihre Zustände in vier verschiedenen Weisen annehmen und ebenso alle Wasserstoffmolecüle. Deshalb sind wieder sechzehn verschiedene Vertheilungen aller Zustände möglich. Die relative Wahrscheinlichkeit des Falles A und B bleibt also 3:8. Man überzeugt sich leicht, dass dieses Resultat nicht alterirt wird, wenn man die Möglichkeit berücksichtigt, dass in jedem Molecüle die Atome ihre Plätze vertauschen können. Die Molecülgruppe (12) (34) lässt vier verschiedene Platzvertauschungen (12) (34), (21) (34), (12) (43), (21) (43) zu. Ebenso oft lassen sich in den Molecülgruppen (13) (24) und (14) (23) die Plätze vertauschen. (12) (34) ist nicht mit (34) (12) zu vertauschen, wenn beide in demselben Volumenelemente liegen. Ebenso sind auch im Falle A zwölf Bildungsweisen der Chlormolecüle und zwölf der Wasserstoffmolecüle, also im ganzen $144 = 9 \cdot 16$ Platzvertauschungen möglich. Im Falle B existiren 24 verschiedene Bildungsweisen der vier Molecüle, für jede können die Plätze in zwei verschiedenen Weisen, folglich für vier Molecüle in sechzehn verschiedenen Weisen vertauscht werden; daher existiren $24 \cdot 16$ Platzvertauschungen.

Werthe von $-k$ bis $+k$ zu durchlaufen hat, ebenso jedes l alle Werthe von $-\lambda$ bis $+\lambda$ u. s. w. Da im ganzen $a_1 + b_1 + \dots g_1$ Grössen k vorhanden sind, deren jede $2x + 1$ Werthe annimmt, so sind $(2x + 1)^{a_1 + b_1 + \dots g_1}$ Werthcombinationen der k möglich. Ebenso $(2\lambda + 1)^{a_1 + b_1 + \dots g_1}$ Werthcombinationen der l u. s. f. Die Summe (11) hat also $[(2x + 1)(2\lambda + 1) \dots (2r + 1)]^{a_1 + b_1 + \dots g_1}$ Glieder. Eine solche Summe soll stets durch S bezeichnet werden. Setzt man daher in den Ausdruck (11) statt der Factoriellen die Annäherungsformel (10), so liefert das erste Glied dieser Annäherungsformel in dem Ausdruck $l(q_1! \chi_1! \psi_1! \dots)$ das Glied:

$$(12) \quad \frac{1}{2} l (2\pi) [(2x + 1)(2\lambda + 1) \dots (2r + 1)]^{a_1 + b_1 + \dots g_1}.$$

Das zweite Glied der Annäherungsformel liefert in (11) die beiden Glieder:

$$(13) \quad S f_1 \cdot l f_1 \cdot (\delta \varepsilon \zeta \eta \vartheta t)^{a_1 + b_1 + \dots g_1}, \text{ und}$$

$$(14) \quad S f_1 \cdot (\delta \varepsilon \zeta \eta \vartheta t)^{a_1 + b_1 + \dots g_1} \cdot l (\delta \varepsilon \zeta \eta \vartheta t)^{a_1 + b_1 + \dots g_1}.$$

Die beiden letzten Glieder der Annäherungsformel liefern:

$$(15) \quad \frac{1}{2} S l [f_1 (\delta \varepsilon \zeta \eta \vartheta t)^{a_1 + b_1 + \dots g_1}], \text{ und}$$

$$(16) \quad - S f_1 (\delta \varepsilon \zeta \eta \vartheta t)^{a_1 + b_1 + \dots g_1}.$$

Als gegeben ist hier zu betrachten die Anzahl der Atome der verschiedenen Gattungen und die möglichen Verbindungen, welche sie überhaupt eingehen können, also die $a_1 b_1 \dots g_1$. Gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit, dass die eine oder andere mögliche chemische Verbindung reichlicher eintritt und diesen oder jenen Zustand annimmt. Die zu bestimmenden Unbekannten sind also die Grössen $N_1, N_2 \dots f_1, f_2 \dots$. Der Ausdruck (12) enthält keine Unbekannte, sondern bloß Gegebenes, ist also als Constante zu betrachten. Ein Zweifel hierüber könnte bloß entstehen, wenn irgend eine mögliche chemische Verbindung gar nicht aufträte, man könnte dann glauben, dass die entsprechenden $a, b, c \dots$ gleich Null zu setzen seien, und Ausdruck (12) eine sprungweise Aenderung erfahre. Allein ein solcher Sprung wäre ganz unstatthaft; der Fall, dass eine mögliche chemische Verbindung nicht auftritt, ist also immer als Grenzfall zu

betrachten, dass sie nur sehr spärlich auftritt, und die entsprechenden $a, b, c \dots$ sind in der Rechnung zu belassen. Ferner handelt es sich immer um das Verschwinden der Variation von lP . In diese Variation liefert der Ausdruck (15) nur Grössen von der Form $1/q$, da er selbst die Form Slq hat. Da aber q gross ist, so ist $1/q$ und folglich auch der Ausdruck (15) zu vernachlässigen. Der Ausdruck (16) ist offenbar gleich $-N_1$, der Ausdruck (14) gleich $(a_1 + b_1 + \dots g_1) N_1 l(\delta \epsilon \zeta \eta \vartheta \iota)$. Endlich ist der Ausdruck (13), wenn man darin Differentiale einführt, gleich:

$$\iint \dots f_1 l f_1 dx_1 dy_1 dz_1 du_1 dv_1 dw_1 dx_2 \dots dw_{a_1+b_1+\dots g_1}.$$

Es reducirt sich also, von Constantem abgesehen, der Ausdruck $l(q_1! \chi_1! \psi_1! \dots)$ auf:

$$\iint \dots f_1 l f_1 dx_1 dy_1 dz_1 du_1 dv_1 dw_1 dx_2 \dots dw_{a_1+b_1+\dots g_1} \\ + (a_1 + b_1 + \dots g_1) N_1 l(\delta \epsilon \zeta \eta \vartheta \iota) - N_1,$$

und nach Formel (9) erhält man, abgesehen von Constantem:

$$-lP = \sum_{a=1}^{a=\nu} N_a l(a_a! b_a! c_a! \dots g_a!) - \sum_{a=1}^{a=\nu} N_a \\ + \sum_{a=1}^{a=\nu} \iint \dots f_a l f_a dx_1 dy_1 dz_1 du_1 dv_1 dw_1 dx_2 \dots dw_{a_a+b_a+\dots g_a} \\ + l(\delta \epsilon \zeta \eta \vartheta \iota) \sum_{a=1}^{a=\nu} N_a (a + b_a + c_a + \dots g_a).$$

Nun ist:

$$(17) \quad \sum_{a=1}^{a=\nu} a_a N_a = A, \quad \sum_{a=1}^{a=\nu} b_a N_a = B \quad \text{u. s. w.,}$$

daher der Ausdruck in der letzten Zeile ebenfalls constant, und es bleibt:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} -lP &= \sum_{a=1}^{a=\nu} N_a l(a_a! b_a! c_a! \dots) - \sum_{a=1}^{a=\nu} N_a \\ &+ \sum_{a=1}^{a=\nu} \iint \dots f_a l f_a dx_1 dy_1 dz_1 du_1 dv_1 dw_1 dx_2 \dots dw_{a_a+b_a+\dots g_a}. \end{aligned} \right.$$

Diese Formel ist insofern noch von überflüssiger Allgemeinheit, als daselbst die die Zustandsvertheilung charak-

terisirende Function f ganz willkürlich gelassen ist. Für den uns allein interessirenden Fall, dass sämmtliche Gase sich bei einer mittleren lebendigen Kraft eines Atoms $T = 3/2h$ im Wärmegleichgewichte befinden, ist:

$$f_a = \frac{N_a e^{-h(x_a + A_a)}}{\iint \dots e^{-h(x_a + A_a)} dx_1 dy_1 \dots dw_{a_a + b_a + \dots g_a}},$$

wobei x_a der Werth der Kraftfunction, A_a der Werth der gesammten lebendigen Kraft aller Atome eines Molecüls im betrachteten Zustande ist. Daher wird:

$$J_a = \iint \dots f_a l f_a dx_1 dy_1 \dots dw_{a_a + b_a + \dots g_a} = N_a l N_a - h N_a \bar{\chi}_a - h N_a \bar{A}_a \\ - N_a l \iint \dots e^{-h(x_a + A_a)} dx_1 dy_1 \dots dw_{a_a + b_a + \dots g_a}.$$

Hierbei ist:

$$(19) \quad \bar{\chi}_a = \frac{\iint \dots \chi_a e^{-h x_a} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\zeta_{a_a + b_a + \dots g_a}}{\iint \dots e^{-h x_a} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\zeta_{a_a + b_a + \dots g_a}}, \\ \bar{A}_a = \frac{3}{2h} (a_a + b_a + \dots g_a),$$

$\xi_a \eta_a \dots$ sind die Coordinaten der Atome eines Molecüls relativ gegen dessen Schwerpunkt. Ferner ist:

$$l \iint \dots e^{-h A_a} du_1 dv_1 \dots dw_{a_a + b_a + \dots g_a} \\ = \frac{1}{2} l \left[\frac{(2\pi)^{3a_a + 3b_a + \dots 3g_a}}{m_1^{3a_a} m_2^{3a_a} \dots m_k^{3g_a} h^{3a_a + 3b_a + \dots 3g_a}} \right].$$

Letzteres wegen:

$$-\infty \int^{+\infty} e^{-h \frac{m u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{2\pi}{h m}},$$

endlich:

$$\iint \dots e^{-h x_a} dx_1 dy_1 \dots dz_{a_a + b_a + \dots g_a} \\ = V \iint \dots e^{-h x_a} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\zeta_{a_a + b_a + \dots g_a},$$

wobei V das gesammte von allen Gasen erfüllte Volumen, $m_1, m_2 \dots$ aber die Massen der Atome erster, zweiter .. Gattung sind. Mit Rücksicht hierauf wird:

$$J_a = - N_a l \frac{V}{N_a} - N_a l \iint \dots e^{-h x_a} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\zeta_{a_a + b_a + \dots g_a} \\ - h N_a \bar{\chi}_a + \frac{3 N_a}{2} (a_a + b_a + \dots g_a) l h,$$

$$- \frac{3N_a}{2} (a_a + b_a + \dots g_a) (1 + l2\pi) + \frac{3a_a N_a}{2} l m_1 \\ + \frac{3b_a N_a}{2} l m_2 + \dots \frac{3g_a N_a}{2} l m_k.$$

Wegen den Gleichungen (17) liefert die gesammte zweite Zeile nur Constantes in $\sum_{a=1}^{a=\nu} J_a$, und es liefert die Gleichung (18):

$$(20) \left\{ \begin{aligned} -lP &= \sum_{a=1}^{a=\nu} N_a l (a_a! b_a! c_a! \dots g_a!) - \sum_{a=1}^{a=\nu} N_a - \sum_{a=1}^{a=\nu} N_a l \frac{V}{N_a} \\ &+ \frac{3lh}{2} (A+B+C..) - h \sum_{a=1}^{a=\nu} N_a \bar{\chi}_a - \sum_{a=1}^{a=\nu} N_a l \iint \dots e^{-h\chi_a} d\xi_2 d\eta_2 \dots \\ &d\zeta_{a_a+b_a+\dots g_a} + \sum_{a=1}^{a=\nu} N_a [l(a_a! b_a! \dots g_a!) - 1 - l \frac{V}{N_a} - h \bar{\chi}] \\ &+ \frac{3lh}{2} (a_a + b_a + \dots g_a) - l \iint \dots e^{-h\chi_a} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\zeta_{a_a+b_a+\dots g_a} \end{aligned} \right.$$

Um diese Formel sogleich auf den denkbar einfachsten Fall anzuwenden, wollen wir die Dissociation eines Gases mit zweiatomigen Molecülen in einzelne Atome betrachten. Von den A Atomen seien N_1 einzeln, aus den übrigen seien N_2 zweiatomige Molecüle gebildet, sodass:

$$A = N_1 + 2N_2.$$

Die Kraft, welche je zwei Atome in einem Molecüle gegeneinander zieht, sei in derselben Entfernung ρ derselben gleich $\partial\chi(\rho)/\partial\rho$, $\chi(\infty)$ sei gleich Null. Unter Voraussetzung anziehender Molecularkräfte ist daher $\chi(\rho)$ negativ, und bei ungestörter Bewegung zweier Atome $mv^2/2 + \chi$ constant. Dann ist für die zweiatomigen Molecüle:

$$(22) \quad \iint \dots e^{-h\chi_a} d\xi_2 d\eta_2 \dots = 4\pi \int_0^\infty e^{-h\chi} \rho^2 d\rho,$$

$$(23) \quad \bar{\chi} = \frac{\int_0^\infty \chi e^{-h\chi} \rho^2 d\rho}{\int_0^\infty e^{-h\chi} \rho^2 d\rho},$$

daher:

$$\begin{aligned}
 (24) \quad & -lP = N_1 \left(-l \frac{V}{N_1} + \frac{3lh}{2} - 1 \right) + N_2 \left(l2 - l \frac{V}{N_2} - \right. \\
 & \quad \left. - l4\pi \int_0^\infty e^{-hx} \varrho^3 d\varrho - h \frac{\int_0^\infty x e^{-hx} \varrho^2 d\varrho}{\int_0^\infty e^{-hx} \varrho^2 d\varrho} + 3lh - 1 \right) \\
 & = + \frac{3}{2} Alh + N_1 (lN_1 - 1) + N_2 (lN_2 - 1) - AlV \\
 & \quad + N_2 l2V - h\bar{\chi} N_2 - N_2 l4\pi \int_0^\infty e^{-hx} \varrho^3 d\varrho.
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck hat die Bedeutung, dass eine gegebene lebendige Kraft und Arbeit sich immer so vertheilen wird, dass P ein Maximum, also $-lP$ ein Minimum ist. Fragt man bloß nach dem Grad der Dissociation in einem gegebenen Volumen, so ist also ausser N_1 und N_2 noch $h = 3/2T$ als variabel zu betrachten. Die Bedingungen sind:

$$\begin{aligned}
 N_1 + 2N_2 &= A, & \delta N_1 &= -2\delta N_2, \\
 N_2 \bar{\chi} \frac{3A}{2h} &= \text{const.}, & \delta(N_2 \bar{\chi}) - \frac{3A\delta h}{h^2} &= 0.
 \end{aligned}$$

Die Variation von (24) ist:

$$\begin{aligned}
 \frac{3A\delta h}{2h} - 2lN_1 \delta N_2 + lN_2 \delta N_2 + l2V \delta N_2 - N_2 \bar{\chi} \delta h - h \delta(N_2 \bar{\chi}) \\
 - \delta N_2 l4\pi \int_0^\infty e^{-hx} \varrho^3 d\varrho + N_2 \bar{\chi} \delta h = 0,
 \end{aligned}$$

daher gemäss der Verbindungsgleichungen:

$$(25) \quad \begin{cases} lN_2 - 2lN_1 + l2V - l4\pi \int_0^\infty e^{-hx} \varrho^3 d\varrho = 0, \\ \frac{N_2}{N_1^2} = \frac{2\pi}{l^2} \int_0^\infty e^{-hx} \varrho^2 d\varrho, \end{cases}$$

welche Gleichung also die Beziehung zwischen der Anzahl der verbundenen und einzelnen Atome angibt. Wenn sich ClH in Cl und H dissociiren würde, so wäre $a_1 = 1$, $b_2 = 1$, $a_3 = b_3 = 1$, daher hätte die später folgende Determinante (28) den Werth:

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

woraus folgt:

$$P_1 + P_2 = P_3,$$

$$lN_1 + lN_2 - lV = lN_3 - l4\pi \int_0^{\infty} e^{-h\chi} \rho^2 d\rho,$$

$$\frac{N_3}{N_1 N_2} = \frac{4\pi}{V} \int_0^{\infty} e^{-h\chi} \rho^2 d\rho.$$

Betrachten wir ferner den schon früher erwähnten Fall, dass ein zweiatomiges sich in zwei zweiatomige Gase ClH in ClCl und HH dissociirt:

$$N_3 + 2N_1 = A, \quad N_3 + 2N_2 = B,$$

so ist: $a_1 = b_2 = 2, \quad a_3 = b_3 = 1,$

sei: $\chi_1 = \varphi, \quad \chi_2 = \psi, \quad \chi_3 = \chi,$

so wird:

$$\begin{aligned} -lP &= \frac{3lh}{2}(A+B) + N_1(lN_1-1) + N_2(lN_2-1) + N_3(lN_3-1) \\ &\quad - \left(\frac{A+B}{2}\right)lV + (N_1+N_2)l2, \\ &\quad - h(N_1\bar{\varphi} + N_2\bar{\psi} + N_3\bar{\chi}) - N_1 l4\pi \int_0^{\infty} e^{-h\varphi} \rho^2 d\rho \\ &\quad - N_2 l4\pi \int_0^{\infty} e^{-h\psi} \rho^2 d\rho - N_3 l4\pi \int_0^{\infty} e^{-h\chi} \rho^2 d\rho. \end{aligned}$$

Die Bedingungen des Minimums sind:

$$\begin{aligned} \delta N_1 &= -\frac{1}{2}\delta N_3, \quad \delta N_2 = -\frac{1}{2}\delta N_3, \\ N_1\bar{\varphi} + N_2\bar{\psi} + N_3\bar{\chi} + (A+B)\frac{3}{2h} &= \text{const.} \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf diese Bedingungen liefert die Gleichung $\delta lP = 0$ Folgendes:

$$(27) \left\{ \begin{aligned} l2N_1 - l4\pi \int_0^{\infty} e^{-h\varphi} \rho^2 d\rho + l2N_2 - l4\pi \int_0^{\infty} e^{-h\psi} \rho^2 d\rho \\ = 2lN_3 - 2l4\pi \int_0^{\infty} e^{-h\chi} \rho^2 d\rho \\ \frac{N_3^2}{4N_1 N_2} = \frac{\left(\int_0^{\infty} e^{-h\chi} \rho^2 d\rho\right)^2}{\int_0^{\infty} e^{-h\varphi} \rho^2 d\rho \times \int_0^{\infty} e^{-h\psi} \rho^2 d\rho} \end{aligned} \right.$$

Es hat keine Schwierigkeit, auch das Minimum des allgemeinen Ausdruckes (20) zu finden, wozu die Bedingungen:

$$\sum N_a a_a = A, \quad \sum N_a b_a = (B \dots 1),$$

$$\sum E_a \chi^a + (A + B + \dots) \frac{3}{2h} = \text{const.}$$

gehören.

Mit Rücksicht auf die letzte Bedingung folgt zunächst:

$$\delta(-lP) = \sum \delta N_a [l(a_a! b_a! \dots) + lN_a - lV \\ - l \int \dots e^{-h \chi^a} d\xi_2 d\chi_2 \dots d\xi_{a_a+b_a+\dots}].$$

Bezeichnet man den Ausdruck in der eckigen Klammer mit P_a und berücksichtigt, dass $\sum a_a \delta N_a = \sum b_a \delta N_a = \dots = 0$ sein muss, so folgt für das Verschwinden von $\delta(-lP)$ die Bedingung:

$$(28) \quad \begin{vmatrix} P_1, & P_2 \dots P_v \\ a_1, & a_2 \dots a_v \\ b_1, & b_2 \dots b_v \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnen wir die Zahl der verschiedenen Atomgattungen $A, B, \dots$ mit μ , so hat die obige Determinante $\mu+1$ Verticalreihen, repräsentirt also $v - \mu$ Gleichungen; aus diesen und den μ Gleichungen $\sum a_a N_a = \sum b_a N_a = \dots = 0$ folgen die Unbekannten $N_1, N_2 \dots N_v$. Ist $\mu = v$, so sind jedenfalls einige der Gleichungen (1) eine Folge der übrigen und sind nur solche $a, b, c, \dots$ in die Determinante aufzunehmen, welche voneinander unabhängigen Gleichungen entsprechen.

Wir wollen nun zunächst den Fall, worauf sich Formel (25) bezieht, in einer anderen Weise behandeln. Wir denken uns das ganze Gefäss vom Volumen V in $1/\omega$ gleiche Fächer vom Volumen $v = \omega V$ getheilt. Die theilweise der Dissociation unterworfenen Gasmasse, welche sich in diesem Gefässe befindet, denken wir uns durch Vermittelung einer unendlich dünnen Scheidewand mit einer noch weit grösseren Gasmasse von der Temperatur $T = 3/2h$ im Wärme Gleichgewichte. Wäre im ganzen Gefässe V die Kraftfunction für alle Atome constant, würde also keines der Atome irgend eine Wirkung erfahren, so wäre die Wahrscheinlichkeit, dass irgend ein Atom sich in irgend einem Volumenelemente befindet, einfach der Grösse des betreffenden Volu-

menelementes proportional.¹⁾ Wären nur zwei Atome im Gefässe, so wollen wir mit (2) die Wahrscheinlichkeit bezeichnen, dass beide in demselben Fach sind, mit (11), dass sie in verschiedenen Fächern sind. Es ist dann $(2) = \omega$, $(11) = 1 - \omega$. Wären drei Atome im selben Gefässe, so wäre die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei im selben Fache sind $(3) = \omega^2$, die Wahrscheinlichkeit, dass zwei in demselben, das dritte in einem anderen Fache ist, hat den Werth $(12) = (2) \cdot (1 - \omega) + 2 \omega \cdot (11) = 3 \omega (1 - \omega)$ die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei in verschiedenen Fächern seien, ist $(111) = (1 - \omega)(1 - 2\omega)$. Dieselben Bezeichnungen wollen wir auch auf den Fall anwenden, dass beliebig viel Atome vorhanden sind. Da die Wahrscheinlichkeit $(a_1 a_2 a_3 \dots a_n)$ dann jedenfalls den Factor $\omega^{a_1+a_2+\dots+a_n-n} (1 - \omega)(1 - 2\omega) \dots (1 - n\omega + \omega)$ hat, so handelt es sich nur mehr um den Coëfficienten dieses Ausdruckes. In der folgenden kleinen Tabelle sind oben immer die Wahrscheinlichkeiten, unten die zugehörigen Coëfficienten zusammengestellt:

(4)	(13)	(22)	(112)	(1111)	(5)	(14)	(23)	(113)	(122)	(1112)	(11111)
1	4	3	1	1	1	5	10	10	15	10	1
(6)	(15)	(24)	(33)	(114)	(123)	(222)	(1113)	(1122)	(11112)	(111111)	
1	6	15	10	15	60	15	20	45	15	1	
(7)	(16)	(25)	(34)	(115)	(124)	(133)	(223)	(1114)			
1	7	21	35	21	105	70	105	35			
(1123)	(1222)	(11113)	(11122)	(11112)	(111112)	(1111111)					
210	105	35	105	21	1						

Die Wahrscheinlichkeit $\frac{(111 \dots 222 \dots)}{N_1 \text{ mal } N_2 \text{ mal}}$ soll mit $f(N_1, N_2)$, der dazu gehörige Coëfficient mit $c(N_1, N_2)$ bezeichnet werden, sodass:

$$f(N_1, N_2) = c(N_1, N_2) \cdot \omega^{N_1} (1 - \omega) (1 - 2\omega) (1 - 3\omega) \dots (1 - N_1 \omega - N_2 \omega + \omega).$$

Dann ist gemäss des Bildungsgesetzes der Coëfficienten:

$$c(N_1, N_2) = c(N_1 - 1, N_2) + (N_1 + 1) c(N_1 + 1, N_2 - 1),$$

1) Vgl. meine weiteren Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmoleculen.

woraus leicht folgt:

$$c(N_1 N_2) = \frac{(N_1 + 2N_2)!}{2^{N_2} N_1! N_2!},$$

daher:

$$(28_a) \quad \left\{ \begin{aligned} f(N_1 N_2) &= \frac{(N_1 + 2N_2)!}{2^{N_2} N_1! N_2!} \omega^{N_2} (1 - \omega) (1 - 2\omega) \dots \\ &\quad (1 - N_1 \omega - N_2 \omega + \omega). \end{aligned} \right.$$

Für den Fall, dass zwei Atome eines Molecüles gar keine Kräfte aufeinander ausüben würden, und dass man sie dann als chemisch verbunden betrachten würde, wenn sie beide innerhalb eines Volumens $v = \omega V$ lägen, dagegen nicht als chemisch verbunden, wenn sie weiter entfernt wären, wäre dies zugleich die Wahrscheinlichkeit, dass N_2 Atome zu zweien chemisch verbunden, N_1 Atome aber einzeln im Gefäße V vorhanden sind. Wir haben noch den chemischen Kräften Rechnung zu tragen, was in folgender Weise geschieht. Wir denken uns den Schwerpunkt eines Atomes gegeben und den ganzen Raum v , in welchem dann ein zweites Atom liegen muss, damit es mit dem ersten chemisch verbunden sei, in sehr viel Theile getheilt; im Theile v_k sei χ_k der Werth der Kraftfunction, welche den zwischen den Atomen wirksamen chemischen Kräften entspricht. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite Atom im Raume v_k liegt, gleich $v_k e^{-h\chi_k}$ statt v_k zu setzen. Die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite Atom überhaupt mit dem ersten verbunden ist, also im Raume v liegt, ist also gleich:

$$\sum v_k e^{-h\chi_k} = 4\pi \int_0^\infty e^{-h\chi} \rho^2 d\rho$$

statt v zu setzen.

Mit Rücksicht auf die chemischen Kräfte ist also in Formel (28_a):

$$(28_b) \quad \left[\frac{4\pi}{V} \int_0^\infty e^{-h\chi} \rho^2 d\rho \right]^{N_2}$$

für ω^{N_2} zu setzen. Die chemischen Kräfte sollen zugleich so beschaffen sein, dass ein gleichzeitiges Vorhandensein dreier Atome im Raume v vollkommen ausgeschlossen ist. Dann

ist also die Wahrscheinlichkeit, dass N_2 Atome chemisch verbunden, N_1 einzeln seien gleich:

$$(29) \left\{ \begin{aligned} W &= \frac{(N_1 + 2N_2)!}{2^{N_2} N_1! N_2!} (1 - \omega)(1 - 2\omega) \dots (1 - N_1\omega - N_2\omega + \omega) \\ &\quad \left[\frac{4\pi}{V} \int_0^\infty e^{-h\epsilon} \epsilon^2 d\epsilon \right]^{N_2} \end{aligned} \right.$$

Wir setzen nun:

$$\begin{aligned} (1 - \omega)(1 - 2\omega) \dots (1 - N_1\omega - N_2\omega + \omega) &= \omega^{N_1 + N_2}, \\ \frac{1}{\omega} \cdot \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) \left(\frac{1}{\omega} - 2 \right) \dots \left(\frac{1}{\omega} - N_1 - N_2 + 1 \right) \\ &= \omega^{N_1 + N_2} \frac{\left(\frac{1}{\omega} \right)!}{\left(\frac{1}{\omega} - N_1 - N_2 \right)!}, \end{aligned}$$

ferner benutzen wir die Annäherungsformel:

$$x! = \sqrt{2\pi x} \cdot \left(\frac{x}{e} \right)^x$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} W &= \frac{(N_1 + 2N_2)! \omega^{N_1 + N_2} e^{\frac{1}{\omega}} \frac{1}{\omega}! \left[\frac{4\pi}{V} \int_0^\infty e^{-h\epsilon} \epsilon^2 d\epsilon \right]^{N_2}}{2^{N_2} \sqrt{2\pi}^{\frac{1}{\omega}} N_1^{N_1 + 1/2} N_2^{N_2 + 1/2} \left(\frac{1}{\omega} - N_1 - N_2 \right)^{\frac{1}{\omega} - N_1 - N_2 + 1/2}} \\ &= \frac{(N_1 + 2N_2)! \left[\frac{4\pi}{V} \int_0^\infty e^{-h\epsilon} \epsilon^2 d\epsilon \right]^{N_2}}{2^{N_2} N_1^{N_1 + 1/2} N_2^{N_2 + 1/2} [1 - \omega(N_1 + N_2)]^{\frac{1}{\omega} - N_1 - N_2 + 1/2}} \end{aligned}$$

$\omega(N_1 + N_2)$ verhält sich zu eins, wie der von den Moleculen erfüllte Raum zum ganzen Gefäßvolumen; ist also klein gegen eins; daher:

$$\begin{aligned} [1 - \omega(N_1 + N_2)]^{\frac{1}{\omega}} &= e^{-(N_1 + N_2)} \\ [1 - \omega(N_1 + N_2)]^{\frac{1}{\omega} - N_1 - N_2 + 1/2} &= (e^{-N_1 - N_2})^{1 - \omega N_1 - \omega N_2 + \frac{\omega}{2}}. \end{aligned}$$

Es ist also:

$$-lW = -l(N_1 + 2N_2)! - N_2 l \frac{2\pi}{V} \int_0^\infty e^{-h x} \varrho^2 d\varrho + (N_1 + \frac{1}{2}) l N_2 \\ + (N_2 + \frac{1}{2}) l N_2 - N_1 - N_2 + (N_1 + N_2)^2 \omega.$$

Sucht man das Minimum von W , also δW , so liefert;

$$\delta(\frac{1}{2} l N_1) = \frac{1}{2N_1} \delta N_1, \quad \delta(\frac{1}{2} l N_2) = \frac{1}{2N_2} \delta N_2, \quad \delta[(N_1 + N_2)^2 \omega] \\ = (N_1 + N_2) \omega (\delta N_1 + \delta N_2),$$

alle diese Glieder liefern daher Verschwindendes, und man kann setzen:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} -lW &= -l(N_1 + 2N_2)! - N_2 l \frac{2\pi}{V} \int_0^\infty e^{-h x} \varrho^2 d\varrho \\ &+ N_1 (l N_1 - 1) + N_2 (l N_2 - 1). \end{aligned} \right.$$

Das erste Glied rechts ist übrigens constant.

Das Minimum dieses Ausdruckes ist in anderer Weise zu verstehen, als das der Ausdrücke (20), (24) und (26). Da nämlich jetzt das Gas immer mit einer weit grösseren Gasmasse von constanter Temperatur $T = 3/2h$ in Verbindung ist, so ist h constant, und blos N_1 und N_2 variabel und der Bedingung $N_1 + 2N_2 = A$ unterworfen. Es wird also:

$$\delta(-lW) = [lN_2 - 2lN_1 - l \frac{2\pi}{V} \int_0^\infty e^{-h x} \varrho^2 d\varrho] \delta N_2.$$

Das Verschwinden dieses Ausdruckes führt genau wieder auf die Bedingungsgleichung (25).

Um diese Formeln an einem praktischen Beispiele zu prüfen, wollen wir sie auf die Dissociation der Untersalpetersäure N_2O_4 in $NO_2 + NO_2$ anwenden; dann ist $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_2 = 2$, $b_2 = 4$, daher liefert die Gleichung (28):

$$\left| \begin{array}{cc} P_1 & P_2 \\ 1 & 2 \end{array} \right| = 0, \quad P_2 = 2P_1,$$

$$l(2! 4!) + lN_2 - l \int \int e^{-h x_1} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\zeta_6 =$$

$$2l1! 2! + 2lN_1 - lV - 2l \int \int \dots e^{-h x_1} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\zeta_3,$$

$$(30_a) \quad \frac{N_1^2}{N_2} = V \frac{12 (\int \dots e^{-h x_1} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\zeta_3)^2}{\int \int e^{-h x_1} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\zeta_6}.$$

Diese Formel stimmt in ihrer Form vollkommen überein mit der Formel (25), nur dass der nur von der Temperatur abhängige Factor von V auf der rechten Seite eine etwas andere Form hat. Es ist übrigens höchst wahrscheinlich, dass bei der Dissociation der Untersalpetersäure die Stickstoff- und Sauerstoffatome sich nicht willkürlich untereinander vermischen, sondern dass die Gruppe NO_2 (wir wollen sie ein Untersalpetersäureatom nennen) immer gerade wie ein wirkliches Atom vereint bleibt und sich immer wechselseitig von einer gleichen Gruppe trennt und wieder mit einer gleichen Gruppe zu einem Untersalpetersäuremolekül (N_2O_4) vereinigt.

In diesem Falle spielt ein Untersalpetersäureatom genau dieselbe Rolle wie das Atom eines Grundstoffes, und wir können die Formel (25) vollkommen unverändert beibehalten. $\chi(\rho)$ ist eine negative Grösse und stellt mit negativen Zeichen genommen die Arbeit dar, welche erforderlich ist, um die Schwerpunkte zweier Untersalpetersäureatome aus der Entfernung ρ in unendliche Entfernung zu bringen. Wir wollen unter A immer die auf die Gewichtseinheit entfallende Anzahl von Untersalpetersäureatomen verstehen.

Setzen wir dann:

$$(31) \quad \frac{1}{\sigma} = 8\pi \int_0^{\infty} e^{-\chi} \rho^2 d\rho, \quad \text{so ist:}$$

$$(32) \quad \frac{N_1^2}{N_2} = 4\sigma v,$$

$$(33) \quad N_1 + 2N_2 = A,$$

v ist dabei das Volumen der Gewichtseinheit der im Dissociationsgleichgewichte befindlichen Untersalpetersäure bei der Temperatur T und dem Drucke p . Aus den Gleichungen (32) und (33) folgt zunächst:

$$(34) \quad N_1^2 = 2\sigma v (A - N_1),$$

$$(35) \quad N_1 = -\sigma v + \sqrt{\sigma^2 v^2 + 2\sigma v A},$$

$$N_2 = \frac{A}{2} + \frac{\sigma v}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 v^2 + 2\sigma v A}.$$

Nun ist bekanntlich:

$$(36) \quad pv = \frac{2}{3} (N_1 + N_2) T.$$

Hier ist T die mittlere lebendige Kraft der progressiven Bewegung eines Molecüls; da dieselbe nicht direct der Beobachtung zugänglich ist, so wollen wir $T = 3\epsilon \frac{1}{2}t$ setzen, wobei t die vom absoluten Nullpunkte an gezählte nach Celsiusgraden gemessene Temperatur ist. Die Gleichung (36) geht dann über in:

$$(37) \quad pv = (N_1 + N_2) \epsilon t.$$

Die Gleichung (37) gilt übrigens mit einem und demselben Werthe der Constanten ϵ für jedes beliebige Gas, sobald p der Druck, v das Volumen der Gewichtseinheit und $N_1 + N_2$ die Anzahl der Molecüle desselben in der Gewichtseinheit bedeuten. Nach unserer Annahme sind beim Drucke p und der Temperatur t in der Gewichtseinheit N_2 undissoziierte Untersalpetersäuremolecüle vorhanden, während $\frac{1}{2}N_1$ Molecüle sich in zwei Untersalpetersäureatome gespalten haben, sodass also im ganzen N_1 Untersalpetersäureatome in der Gewichtseinheit enthalten sind. Bezeichnen wir daher mit q den Quotienten der gesammten vor der Dissociation vorhandenen Anzahl $\frac{1}{2}A$ der Untersalpetersäuremolecüle in die Anzahl $\frac{1}{2}N_1$ der jetzt zersetzten Molecüle, so ist:

$$q = \frac{N_1}{A};$$

daher nach Gleichung (34):

$$(38) \quad q^2 = \frac{2\sigma v}{A} (1 - q)$$

oder nach Gleichung (37), welche sich in die Form:

$$(39) \quad \frac{2v}{A} = \frac{\epsilon t}{p} \left(1 + \frac{N_1}{A}\right) \text{ schreiben lässt:}$$

$$(40) \quad q^2 = \frac{\epsilon \sigma t}{p} (1 - q^2).$$

Da σ bloß Function der Temperatur sein kann, so gibt die Gleichung (40) ohne weiteres das Gesetz, nach welchem die Grösse q vom Druck abhängt. Um auch deren Abhängigkeit von der Temperatur zu bestimmen, muss noch eine Hypothese zu Hülfe gezogen werden, welche nicht in voller Strenge richtig ist. Bevor ich hierzu übergehe, will ich prüfen, was aus dem zweiten Hauptsatze allein für das Dissociationsproblem für Schlüsse gezogen werden können.

Sei dQ das auf umkehrbarem Wege der im Dissociationsgleichgewicht befindlichen Gewichtseinheit Untersalpetersäure zugeführte Wärmedifferential, so können wir setzen:

$$(41) \quad dQ = (N_1 \alpha + N_2 \beta) dt - I\gamma dN_2 + Ip dv.$$

Dabei ist γ der zur Dissociation eines Untersalpetersäuremoleculs nothwendige Arbeitsaufwand, I das thermische Arbeitsäquivalent, α, β, γ können nur Functionen der Temperatur sein. In der Gleichung (41) ist der erste Hauptsatz bereits enthalten, derselbe kann also nichts Neues lehren. Dagegen liefert der zweite Hauptsatz allerdings eine Relation zwischen den hier vorkommenden Grössen. Wenden wir ihn in der Formel:

$$(42) \quad \left(\frac{dQ}{dv}\right)_t = It \left(\frac{dp}{dt}\right)_v$$

an, so erhalten wir aus der Gleichung (41):

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right)_t = Ip - I\gamma \left(\frac{dN_2}{dv}\right)_t.$$

Ferner liefert wegen $dN_1 = -2dN_2$ der Gleichung (37):

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_v = \frac{(N_1 + N_2)\epsilon}{v} - \frac{\epsilon t}{v} \left(\frac{dN_2}{dt}\right)_v.$$

Die Substitution dieser Werthe in Gleichung (42) aber liefert:

$$v \left(\frac{dN_2}{dv}\right)_t - \frac{\epsilon t^2}{\gamma} \left(\frac{dN_2}{dt}\right)_v = 0, \text{ woraus folgt:}$$

$$(44) \quad N_2 = f \left[v e^{\int \frac{\gamma dt}{\epsilon t}} \right].$$

Ueber die Natur der Function f kann jedoch aus dem zweiten Hauptsatze allein nichts gefolgert werden. Dass unsere Gleichungen, obwohl sie viel mehr aussagen als der zweite Hauptsatz, nicht mit letzterem im Widerspruche stehen, sieht man in folgender Weise; es ist:

$$(45) \quad \frac{1}{\sigma} = 8\pi \int_0^x e^{-h\chi} \varrho^2 d\varrho \quad \text{daher:}$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{d\sigma}{dh} = 8\pi \int_0^x \chi e^{-h\chi} \varrho^2 d\varrho$$

und wegen $3/4 T = h$:

$$-\frac{2T^2}{3\sigma^2} \frac{d\sigma}{dt} = 8\pi \int_0^\infty \chi e^{-\chi^2} \rho^2 d\rho, \quad \text{daher:}$$

$$(46) \quad \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT} = -\frac{3}{2T^2} \bar{\chi}.$$

Um zwei Untersalpetersäuren voneinander zu trennen, muss deren Kraftfunction im Mittel von $\bar{\chi}$ auf den Werth 0 gebracht werden; es ist also $-\bar{\chi}$ die früher mit γ bezeichnete Grösse, daher:

$$(47) \quad \frac{1}{\sigma} \frac{3\sigma}{2dT} \frac{d\sigma}{dT} = \frac{9\epsilon^2}{4T^2} \bar{\chi} \cdot \frac{1}{\epsilon}, \quad \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\gamma}{\epsilon t^2}, \quad \sigma = e^{\int \frac{\gamma dt}{\epsilon t^2}},$$

und in der That fanden wir N_2 als eine Function von $v \times \sigma$.

Die letzten Betrachtungen führen auf eine einfache Annahme über die Abhängigkeit der Grösse v von der Temperatur. Es lehrt nämlich die Erfahrung, dass die Verbindungswärme zweier Stoffe nur unbedeutend mit der Temperatur, welche die Stoffe vor und nach geschehener Verbindung besitzen, variirt, dass also die Grösse $\gamma = -\bar{\chi}$ nahezu von der Temperatur unabhängig ist, woraus folgt:

$$(48) \quad \sigma = B e^{-\frac{\gamma}{\epsilon t}}.$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung (40) und setzt:

$$(49) \quad \epsilon B = a, \quad \frac{\gamma}{\epsilon t} = b, \quad \text{so folgt:}$$

$$(50) \quad \frac{q^2}{1-q^2} = \frac{at}{p} 10^{-\frac{b}{t}}, \quad q = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{p}{at} 10^{\frac{b}{t}}}}.$$

Das Problem der Dissociation wurde meines Wissens auf theoretischem Wege zuerst von Gibbs¹⁾ gelöst, welcher nach einer gänzlich verschiedenen Methode eine Formel ableitete, die sich von der hier entwickelten nicht wesentlich unterscheidet. Je nachdem man annimmt, die auf die Gewichtseinheit bezogenen specifischen Wärmen seien Functionen der Temperatur, oder constant, oder nebst dem sei noch ihr

1) Gibbs, Trans. of the Connect. Acad. 3. p. 1, Sill. Journ. of science. 18. p. 277. 1879.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXII.

Werth für die Verbindung die Summe der Werthe für die Bestandtheile, erhält man meine allgemeine oder Gibbs' oder meine speciellste Formel. Später gelangte wieder auf anderem Wege van der Waals¹⁾ zu genau derselben Formel. Ein Theil des Problems, die Abhängigkeit der Zusammensetzung vom Drucke wurde schon lange vor allen angeführten Arbeiten von Guldberg und Waage²⁾ gelöst. Die Uebereinstimmung des Resultates, auf welches meine Methode führt, mit den angeführten, scheint mir eine Bestätigung für die Richtigkeit meiner Methode zu sein.

Obwohl bereits Gibbs ausführliche Vergleichen mit der Erfahrung angestellt hat, glaubte ich doch, der Abweichung im Werthe der Gibbs'schen Constante B' wegen auch die Formel (50) mit den Beobachtungen von Deville und Troost³⁾ vergleichen zu sollen. Da bei diesen Beobachtungen der Druck p nahe constant war, so war a/p ebenfalls constant, und ich setzte es gleich 1970270:

$$\log \frac{a}{p} = 6.294\,525.$$

Der Constanten b ertheilte ich den Werth 3080. Ich bemerke, dass diese Werthe nur beiläufig durch Versuch gefunden wurden, und eine kleine Correctur derselben die Uebereinstimmung vielleicht noch erheblich grösser machen könnte. Da bei den Beobachtungen Deville's der Druck beiläufig 755,5 mm betrug, so folgt hieraus:

$$\log a = 9.1\,727\,595.$$

In der folgenden Tabelle sind die nach meiner Formel berechneten Werthe von q mit den von Deville und Troost gefundenen zusammengestellt; man sieht, dass die Uebereinstimmung eine vollkommen befriedigende ist, es scheint also in diesem Falle unsere Annahme berechtigt zu sein, dass innerhalb der hier vorkommenden Temperaturgrenzen die

1) Waals, Verslagen en Mededel. d. k. Acad. v. Wetensch. 2. Reeks. 15. p. 19. 1880.

2) Guldberg u. Waage, Étud. sur les affinit. chimiques Programm d. Univ. Christiania. 1. Sem. 1867; Kolbe's Journ. 19. p. 69. 1879.

3) Deville u. Troost, Compt. rend. 64. p. 237. 1867; Jahresber. f. Chemie 20. p. 177. 1867; Naumann, Thermochemie. p. 117.

Dissociationswärme eines Untersalpetersäuremoleculs nahe constant ist.

Temp.	100 q beob.	100 q ber.	Diff.	Temp.	100 q beob.	100 q ber.	Diff.
26,7°	19,96	18,10	-1,86	80,6	76,61	76,82	+0,21
35,4	25,65	25,17	-0,48	90,0	84,83	84,41	-0,42
39,8	29,23	29,40	+0,17	100,1	89,23	90,07	+0,84
49,6	40,04	40,26	+0,22	111,3	92,67	94,41	+1,74
60,2	52,84	53,47	+0,63	121,5	96,23	96,28	+0,05
70,0	65,57	65,57	0,00	135,0	98,69	97,96	-0,73

Ich habe ferner auf die Beobachtungen Alexander Naumann's¹⁾ nach derselben Formel mit denselben Werthen der Constanten berechnet; da bei diesen Beobachtungen auch der Druck variabel ist, so konnte natürlich nur a , nicht aber a/p als constant angenommen werden. Folgende Tabelle gibt das Resultat.

Temp.	Druck	100 q beob.	100 q ber.	Diff.	Temp.	Druck	100 q beob.	100 q ber.	Diff.
- 6°	125,5	5,6	10,1	4,5	+ 16,5	224	23,7	21,4	-2,3
- 5	123	6,7	10,7	4,0	+ 16,8	172	24,7	24,6	-0,1
- 3	84	8,9	14,2	5,3	+ 17,5	172	26,2	25,3	-0,9
- 1	153	10,8	11,7	0,9	+ 18	279	17,3	20,6	3,3
+ 1	138	11,9	13,6	1,7	+ 18,5	136	29,8	29,4	-0,4
+ 2,5	145	11,9	14,2	2,3	+ 20	301	17,8	21,5	3,7
+ 4	172,5	11,6	14,6	3	+ 20,8	153,5	29,3	30,4	1,1
+ 10,5	163	16,5	19,3	2,8	+ 21,5	161	33,7	30,6	-3,1
+ 11	190	15,2	18,3	3,1	+ 22,5	101	39,0	39,0	0
+ 14,5	175	20,9	22,2	1,3	+ 22,5	136,5	35,3	34,1	-1,2
+ 16	228,5	20,0	20,8	0,8					

Die Uebereinstimmung ist hier bedeutend schlechter, doch ist es auffallend, dass einige Zahlen sehr gut, andere, bei denen weder Druck noch Temperatur bedeutend verschieden war, wieder sehr schlecht stimmen. Es scheint mir daher vorläufig noch nicht ausgemacht, ob meine Formel für niedrige Temperaturen, wie sie grösstentheils bei Naumann vorkommen, unrichtig wird. Neue Beobachtungen, namentlich solche, bei denen die Temperatur möglichst constant und nur der Druck veränderlich wäre, wären jedenfalls sehr

1) Naumann, Ber. d. chem. Ges. 11. p. 2045. 1878; Jahresb. f. Chemie 31. p. 120. 1878. Dessen Thermochemie p. 127.

erwünscht.¹⁾ Ich will hier noch einige Bemerkungen über die physikalische Bedeutung der Constanten a und b folgen lassen. Zunächst ist:

$$b = \frac{\gamma}{\varepsilon l 10} = \frac{\frac{A\gamma}{2}}{\frac{A\varepsilon l 10}{2}},$$

hierbei ist $A\gamma/2$ die zur Dissociation eines Kilos Untersalpetersäure erforderliche Wärme. Bezeichnen wir dieselbe mit y Cal./1 kg, so ist also wegen:

$$(49) \quad I = \frac{1 \text{ Cal.}}{430 \text{ km}}, \quad \frac{A\gamma}{2} = y \cdot 430 \text{ m.}$$

Bezeichnet ferner $v = 1/d$ das Volumen, welches nach Avogadro's Gesetz ein Kilo undissocirten Untersalpetersäuregases bei 274° C. und dem Normalbarometerstande einnehmen würde, so ist nach Gleichung (37):

$$(50) \quad \frac{A}{2} \varepsilon = \frac{pv}{274^\circ} = \frac{10334 \text{ kg}}{(\text{m})^2 274^\circ d} = \frac{10334 \text{ m}}{1293274^\circ} \frac{28,94}{M},$$

wegen:
$$d = \frac{1,293 \text{ kg}}{\text{m}^3} \frac{M}{28,94},$$

wobei M das Moleculargewicht der undissocirten Untersalpetersäure bezogen auf $H_2 = 2$ also gleich 92 ist.

Wir finden also:

$$(51) \quad b = \frac{430 \cdot 1,293 \cdot 274^\circ y}{10334 l 10} \cdot \frac{M}{28,94}.$$

Die Beobachtung ergab $b = 3080$; es würde also folgen:

$$(52) \quad y = 151,3.$$

Auch der Constanten a würde eine physikalische Bedeutung zukommen; obwohl dieselbe gegenwärtig wegen unserer Unbekanntschaft mit dem Wirkungsgesetze der Moleküle noch ziemlich zweifelhaft ist, so will ich doch einige vorläufige Bemerkungen schon jetzt darüber machen. Das Integral der Formel (45) setzt voraus, dass ein Untersalpe-

1) Ich bemerke diesbezüglich noch, dass Naumann selbst (Thermochemie p. 127) bemerkt, dass er die Dichte des N_2O_4 Dampfes wahrscheinlich zu gross fand, was die grösseren wenig, die kleineren stark herabdrücken musste, also qualitativ jedenfalls die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung erklärt.

tersäureatom nach allen Richtungen gleich beschaffen ist. Diese Annahme, schon bei chemischen Elementen unwahrscheinlich, ist im vorliegenden Falle ganz sicher falsch. Wir müssen also jedenfalls auf die Formel (30_a) zurückgreifen und setzen:

$$(53) \quad \frac{N_1^2}{N_2} = 4 \sigma v, \quad \sigma = \frac{3 \left(\iint \dots e^{-h x_1} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\zeta_3 \right)^2}{\iint e^{-h x_1} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\zeta_3},$$

wobei freilich der numerische Coëfficient ein anderer würde, wenn man keine unbedingte Umsetzbarkeit der Stickstoff- und Sauerstoffatome in den Untersalpetersäuremoleculen annimmt; ich will jedoch gegenwärtig hierauf nicht eingehen, da ja die folgenden Schlüsse ohne dies nur auf qualitative, nicht aber quantitative Resultate abzielen. Bezeichnen wir den Werth des sechsfachen Integrales, welches im Zähler der Formel (53) in der Klammer steht, erstreckt über alle Lagen des Atoms, für welche eine mit dem Atome fix verbundene Gerade eine im Raume fixe Kugel vom Radius Eins innerhalb eines sehr kleinen Flächenelementes $d\vartheta$ durchschneidet, mit $i d\vartheta$, also den ganzen Werth dieses Integrales mit $4\pi i$, so wird die Bedingung, dass χ constant ist, am einfachsten in folgender Weise realisirt. Wir denken uns das erste Atom eines Untersalpetersäuremoleculs vollkommen fix und undrehbar und nehmen folgendes an: Wenn der Schwerpunkt des zweiten Atoms in einem bestimmten Raume ω liegt, und eine mit dem zweiten Atome fix verbundene Gerade eine im Raume fixe Kugel vom Radius Eins in einem beliebigen Punkte eines Flächenstückes vom Flächenraume ϑ durchsetzt, so soll χ einen nahen constanten sehr grossen negativen Werth χ besitzen. Bei dieser relativen Lage sollen also die beiden Atome chemisch verbunden sein. Für alle anderen Lagen sei χ nahe gleich 0 oder positiv. Dann wird das Integrale im Nenner der Formel (53) für das eine Atom den Werth $4\pi i$, für das andere aber den Werth:

$$i e^{-h\chi} \iiint dx_4 dy_4 dz_4 d\vartheta = \vartheta \omega i e^{-h\chi}$$

haben, wobei x_4, y_4, z_4 die Coordinaten des Schwerpunktes des zweiten Untersalpetersäureatoms sind; $d\vartheta$ ist das Flächenelement, in welchem die mit dem Atome fix verbundene

Gerade die Oberfläche der erwähnten Kugel trifft, und ich bemerke noch, dass selbstverständlich die Gerade durch das Centrum der Kugel gehen muss. Es besitzt daher das fünfzehnfache Integral im Nenner der Formel (53) den Werth $4\pi \vartheta \omega i^2 e^{-h^2}$, woraus folgt:

$$\sigma = \frac{12\pi}{\vartheta \omega} e^{-\frac{z}{h}};$$

aus Gleichung (48) folgt: $B = \frac{12\pi}{\vartheta \omega}$,

und daher aus Gleichung (49):

$$a = \frac{12\pi \epsilon}{\vartheta \omega}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner mit $A/2$, so erhält ersterer nach Gleichung (50) den Werth:

$$\frac{12\pi 10334 \text{ m} \cdot 28,29}{1,293 \cdot 274^\circ} \cdot \frac{1}{M},$$

der Nenner verwandelt sich in $(A\omega/2)\vartheta$.

Wir wollen nun folgenden Begriff einführen: Wir denken uns ein Kilo undissociirter Untersalpetersäure. In einem Molecüle denken wir uns ein Atom festgehalten; den gesammten Raum, worin sich dann der Schwerpunkt des anderen Atomes befinden kann, ohne dass die Verbindung gelöst wird, bezeichnen wir mit ω , diese Grösse denken wir uns für alle in dem Kilo enthaltenen Molecüle gebildet und bezeichnen die Summe aller dieser ω mit $\Omega \text{ m}^3/\text{kg}$. Ferner bezeichnen wir mit $\vartheta/4\pi$ das Verhältniss aller Richtungen, welche bei festgehaltenem ersten Atome das zweite Atom in der chemischen Verbindung N_2O_4 haben kann, zu allen möglichen Richtungen im Raume überhaupt. Dann ist:

$$\frac{A}{2} \omega \vartheta = 4\pi \Omega \frac{\vartheta}{4\pi} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}},$$

und man erhält also:

$$a = \frac{3,10334 \text{ kg}}{1,293 \cdot 274^\circ \text{ m}^3} \cdot \frac{28,94}{M \Omega \frac{\vartheta}{4\pi}},$$

oder wenn wir den Druck in Millimetern Quecksilber messen:

$$a = \frac{3 \cdot 760 \text{ mm} \cdot 28,94}{1,293 \cdot 274^\circ M \Omega \frac{\vartheta}{4\pi}}.$$

Nun zeigte die Erfahrung:

$$\frac{a}{760 \text{ mm}} = 1\,970\,270.$$

Wir finden also für die Untersalpetersäure etwa:

$$\frac{\Omega \cdot g}{4\pi} = \frac{1}{700\,000\,000}.$$

Bedenken wir, dass das ganze Volumen eines Kilogrammes flüssiger Untersalpetersäure beim Normalbarometerstand und bei 0° C. in Kubikmetern ungefähr den Werth 0,0007 besitzt, so sehen wir, dass wir diesen Zahlen gerecht werden, wenn wir etwa Folgendes annehmen: Bei fixem ersten Atome soll der Raum, in dem sich der Schwerpunkt des zweiten Atomes bewegen darf, ohne dass die chemische Verbindung gelöst wird, nur ein Tausendstel von dem Volumen betragen, welches in flüssiger Untersalpetersäure beim Normalbarometerstand und 0° einem Molecüle zukommt. Zudem soll bei festgehaltenem ersten Atome die Drehung des zweiten derart beschränkt sein, dass die möglichen Richtungen, nach denen es sich drehen kann, ohne dass die chemische Verbindung gelöst wird, sich zu allen möglichen Richtungen im Raume überhaupt verhalten, wie 1:500.

A n h a n g.¹⁾

Der nach der obigen Formel gefundene Werthe von y stimmt sehr gut mit dem von Berthelot und Ogier aus seinen Versuchen über die Wärmecapacität der Untersalpetersäure berechneten. Dieselben finden nämlich, dass bei Erwärmung von 46 g Untersalpetersäuredampf von 27 bis 150° C. 5300 Grammc calorien auf Dissociation der Dampfmolecüle verwendet werden. Bedenkt man, dass bei 27° C. bereits etwa 20% des Gases dissociirt sind, so folgt hieraus, dass zur völligen Dissociation von 46 g undissociirter Molecüle 6625 Grammc calorien nothwendig sind, sodass zur Dissociation von 1 g etwa 144 g nothwendig sind, welche Grösse mit der von mir mit y bezeichneten identisch ist und auch dem Zahlenwerth nach vollkommen befriedigend damit übereinstimmt, um so mehr, wenn man bedenkt, dass die Zahl von Berthelot und Ogier auch nicht direct aus Versuchen ab-

1) Vorgelegt in der Sitzung am 8. November 1883.

geleitet, sondern unter mehr oder weniger nur angenähert richtigen Hypothesen berechnet ist.

Ich habe die oben entwickelte Formel auch auf die Beobachtungen von Fr. Meier und J. M. Crafts¹⁾ über die Dissociation des Joddampfes angewendet. Setzt man $a/p = 2,617$, $b = 6300 \log(a/p) = 0,43$, $\log b = 3,8$, wobei p den mittleren Druck vorstellt, bei welchem die Beobachtungen von Meier und Crafts vorgenommen wurden, so erhält man das in der folgenden Tabelle zusammengestellte Resultat:

Temp.	100 q beob.	100 q ber.	Diff.	Temp.	100 q beob.	100 q ber.	Diff.
448°	0,23	0,19	-0,04	1043°	25,0	23,48	-1,52
680	6,4	2,5	-3,9	1275	50,5	51,31	+1,26
764	5,8	4,87	-0,93	1390	66,2	65,04	-1,16
855	8,6	8,9	+0,3	1468	73,1	72,92	-0,18
940	14,5	14,45	-0,05				

Die Uebereinstimmung dürfte auch hier als eine vollkommen befriedigende bezeichnet werden können, sodass der Versuch nicht als unberechtigt erscheint, aus dem für b gefundenen Werthe die Dissociationswärme des Joddampfes zu berechnen. Die numerische Ausrechnung der oben für y gefundenen Formel liefert:

$$y = 4,52077 \times \frac{b}{M}$$

wobei $\log 4,52077 = 0,655\,212\,9$ ist. M ist das Moleculargewicht der undissociirten Substanz, bezogen auf das Wasserstoffmolecul $H_2 = 2$. Unterlässt man die Division durch M , so erhält man direct die zur Dissociation eines Moleculs nothwendige Wärme. Für Jod fanden wir $b = 6300$, $M = 253,6$. Es ergibt sich also $y = 112,5$; zur Dissociation eines Grammes Joddampf in einzelne Molecüle sind also 112,5 Grammc calorien erforderlich. Zur Dissociation eines Moleculs, d. h. 253,6 g wären also 28530 Grammc calorien erforderlich. Dagegen ist zur Berechnung von Ω für Joddampf die Formel (25) anzuwenden. Dieselbe liefert Ω oder, wenn man will, $\Omega \vartheta / 4\pi$ etwa gleich $1/16000$, also jedenfalls der Grössenordnung nach gleich dem fünften Theile des Volumens eines Kilogrammes festen Jods in Kubikmetern.

1) Crafts, Ber. d. chem. Ges. 13. p. 851 bis 873. 1880.

**IV. Ueber electricische Schwingungen;
insbesondere über die magnetisirende Wirkung
derselben und über die Fortpflanzung
magnetischer Schwingungen; von A. Oberbeck.**

(Sechste Abhandlung.)

I. Beschreibung der Beobachtungsmethode.

In meiner letzten Mittheilung über diesen Gegenstand¹⁾ handelte es sich um die Feststellung des magnetischen Zustandes von Eisenmassen, welche periodisch wechselnden, aber überall der Grösse und Richtung nach gleichen Kräften ausgesetzt waren. Das Gesammtmoment der Eisenmasse war in diesem Falle ebenfalls eine periodische Function der Zeit, deren Amplitude und Phase gemessen werden konnte.

Eine weitere hieran sich schliessende Frage, welche in der vorliegenden Abhandlung beantwortet werden soll, ist die folgende. Ein langgestreckter Eisenkern werde an einer engbegrenzten Stelle durch eine periodische, in seiner Längsrichtung wirkende Kraft magnetisirt. Welches sind die magnetischen Zustände der Eisenmasse? Nimmt man an, dass in jedem Querschnitt des Kernes eine gleiche magnetische Vertheilung stattfindet, und dass die magnetischen Momente eines jeden Querschnittes ebenfalls periodische Function der Zeit sind, so kann man auch die Frage stellen: in welcher Weise hängen die Amplituden und Phasen der Momente von der Entfernung von der Erregungsstelle ab?

Mit einem Wort, wie pflanzen sich magnetische Schwingungen in einer Eisenmasse fort?

Zur Beantwortung dieser Fragen habe ich eine Untersuchungsmethode angewandt, deren Princip bereits in der vorhergehenden Abhandlung zur Bestimmung der Phasenverzögerung benutzt wurde. Die getroffene Versuchsanordnung war dabei die folgende.

Die Wechselströme eines Sinusinductors gingen durch die festen Rollen des Electrodynamometers und durch eine

1) Oberbeck, Wied. Ann. 21. p. 672. 1884.

Drahtrolle von geringer Breite. Die Eisenkerne wurden durch den inneren Hohlraum derselben gesteckt und waren dann an einer eng begrenzten Stelle einer periodischen, magnetisirenden Kraft ausgesetzt. Eine zweite, auf dem Eisenkern verschiebbare Rolle von derselben Form war mit der beweglichen Rolle des Electrodynamometers und einem Widerstandskasten zu einem geschlossenen Stromkreis verbunden. In demselben entstehen infolge der wechselnden Magnetisirung der Eisenmasse periodische Inductionsströme. Durch die Wechselwirkung derselben mit den primären Strömen erfährt die bewegliche Rolle eine Ablenkung (α), deren Grösse nach Gleichung (14) der vorigen Abhandlung durch den folgenden Ausdruck wiedergegeben werden kann:

$$(1) \quad \alpha = A \frac{w \sin \varphi + n \pi p \cos \varphi}{w^2 + n^2 \pi^2 p^2}.$$

Hierin ist w der Widerstand und p der Inductionscoefficient des secundären Kreises, n die Schwingungszahl des magnetisirenden Stromes, φ die Phasendifferenz des inducirten Magnetismus gegen den primären Strom. Verläuft letzterer nach der Gleichung:

$$J = a \cos (n \pi t),$$

so ist das magnetische Moment der betreffenden Stelle der Eisenmasse:

$$(2) \quad m = M \cos (n \pi t - \varphi).$$

M kann als Amplitude desselben angesehen werden und steht mit A in der einfachen Beziehung:

$$(3) \quad \frac{M n \pi a P'}{2} = A.$$

Behält man bei allen Versuchen dieselbe Schwingungszahl bei, so bleiben n und a constant, und da auch P' , das Potential der Eisenmasse in Bezug auf die Drahtrolle, unverändert blieb, so sind M und A einander proportional. Wird die zweite Rolle in verschiedene Entfernungen (x) von der ersten Rolle gebracht, so verändern sich die Grössen A und φ , von welchen beiden nach Gl. (1) der Ausschlag α abhängt. Es kam nun darauf an, A und φ einzeln als Functionen von x zu bestimmen. Hierzu wurden zunächst für eine bestimmte Entfernung die Ausschläge α und α' beob-

achtet, welche zwei verschiedenen Widerständen des secundären Kreises w und w' entsprachen. Aus demselben kann, wie schon in der vorigen Abhandlung gezeigt wurde, φ berechnet werden. Es mögen solche Versuche für bestimmte Entfernungen $x_1, x_2 \dots$ angestellt sein, und es seien die entsprechenden Phasenverzögerungen $\varphi_1, \varphi_2 \dots$. Man kann dann nach Gleichung (1) die den verschiedenen Ausschlägen $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ entsprechenden Werthe $A_1, A_2 \dots$ berechnen.

Dies lässt sich leicht in der folgenden Weise ausführen. Schreibt man für Gleichung (1):

$$\alpha = \frac{A w \left\{ \sin \varphi + \frac{n \pi p}{w} \cos \varphi \right\}}{w^2 + n^2 \pi^2 p^2}$$

und führt einen Hülfswinkel ψ durch die Gleichung:

$$(4) \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{n \pi p}{w}$$

ein, so ist:

$$(5) \quad \alpha = \frac{A w \sin(\varphi + \psi)}{\cos \psi (w^2 + n^2 \pi^2 p^2)}.$$

Da sich bei veränderter Entfernung x , nur die Grössen α , A und φ verändern, so ist:

$$(6) \quad A = \text{Const.} \frac{\alpha}{\sin(\varphi + \psi)}.$$

Bei den hiernach angestellten Versuchen hatte die inducirende Rolle 1134, die Inductionsrolle 1218 Windungen von Kupferdraht, welche in beiden Rollen einen Raum von 14 mm Breite einnahmen. Die Inductionsrolle hatte einen Widerstand von 40 S.-E., die mit derselben verbundene Dynamometerrolle 144 S.-E. Durch Hinzufügen von 16 S.-E. aus dem Widerstandskasten wurde der Gesamtwiderstand w des secundären Kreises auf 200 Einheiten gebracht. Bei den Phasenbeobachtungen wurden zuerst die Ausschläge (α) gemessen, welche diesem Widerstand entsprachen. Dann wurde derselbe verdoppelt und der neue Ausschlag α' bestimmt. Der Inductionscoefficient des secundären Kreises war besonders festgestellt worden, und es betrug $\pi p:0,40$ S.-E. sec. Die Rotation des Sinusinductors wurde durch Veränderung der Treibgewichte so geregelt, dass der Magnet 1000 ganze Umdrehungen in 15 Secunden machte. Hiernach war:

$$n = \frac{2000}{15} = 133,3,$$

und man erhält nach Gl. (4) für den Hülfswinkel φ den Werth von $15\frac{1}{2}^{\circ}$.

Gleichung (2) kann in der Form geschrieben werden:

$$\alpha = \frac{A}{w} \frac{\left\{ \sin \varphi + \frac{n \pi p}{w} \cos \varphi \right\}}{1 + \frac{n^2 \pi^2 p^2}{w^2}}.$$

Führt man, wie in der vorigen Abhandlung, die Grösse ε ein, wo:

$$\varepsilon = \frac{\alpha \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 p^2}{w^2} \right)}{\alpha' \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 p^2}{w'^2} \right)},$$

so ist dieselbe:

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \frac{1 + \left(\frac{1}{15}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{15}\right)^2} = \frac{\alpha}{\alpha_1} 1,05.$$

Man erhält also ε aus dem beobachteten Verhältniss durch Multiplication mit dem Factor 1,05.

Mit Hülfe von ε ergibt sich dann die gesuchte Phasendifferenz aus der Gleichung:

$$(7) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{15} \frac{4 - \varepsilon}{\varepsilon - 2}.$$

Die einzige Schwierigkeit der Untersuchung bestand in den leider nicht ganz zu vermeidenden Schwankungen in der Rotation des Sinusinductors. Um dieselben möglichst unschädlich zu machen, wurden die Phasen und Amplituden gesondert beobachtet. Bei ersteren wurden die beiden Rollen in einer bestimmten Entfernung festgestellt, jedesmal die Widerstände 200 und 400 S.-E. mehrmals schnell gewechselt und aus den entsprechenden Ausschlägen die Mittel genommen.

Dann wurde eine zweite Beobachtungsreihe angestellt, bei welcher der Widerstand unverändert blieb, die secundäre Rolle dagegen möglichst schnell in verschiedene Entfernungen von der primären Rolle gebracht wurde. Auch diese Beobachtungen wurden stets mehrmals wiederholt und die Mittelwerthe genommen. Waren die Rollen dicht aneinander

gerückt, so betrug der Abstand ihrer Mittelebene 26 mm. Für diese Stellung wird $x = 0$ gesetzt. Es zeigte sich dabei, dass in diesem Fall auch dann ein Ausschlag von zehn Scalentheilen erhalten wurde, wenn der Eisenkern fehlte. Derselbe wurde von den erheblich grösseren Ausschlägen bei Anwesenheit des Eisenkernes abgezogen. Bei grösseren Entfernungen der Rollen wurde ein entsprechender Ausschlag durch die Rollen allein nicht beobachtet. Die Eisenkerne hatten zum Theil eine Länge von 1 m, zum Theil von 400 mm. Da die Entfernung der Rollen höchstens 200 mm betrug, so waren dieselben auf beiden Seiten noch etwa 100 mm von den freien Enden entfernt. Durch besondere Vorversuche war festgestellt worden, dass bei dieser Entfernung der Einfluss der Stabenden sich noch nicht geltend macht. Die Eisenkerne können also bei allen Versuchen als unendlich lang angesehen werden.

II. Resultate der Beobachtungen.

Die bei den Versuchen erhaltenen Zahlenwerthe sind für jeden Eisenkern in den Tabellen I bis VII zusammengestellt. In denselben bedeutet x die Entfernung der beiden Rollen auf dem Kern. Die nächste Spalte φ gibt die Phasendifferenzen der magnetischen Momente und der magnetisirenden Kräfte, berechnet nach Gleichung (7).

Ihre Differenzen stellen die Phasenunterschiede der Momente von zwei Querschnitten dar, welche um 100 mm voneinander entfernt sind.

Die mit (α) überschriebene Columnne gibt die beobachteten Scalentheile, aus welchen nach Gleichung (6) die relativen Werthe der Amplituden (A) berechnet wurden, wobei die überall gleiche Constante gleich Eins gesetzt wurde. In der letzten Columnne sind die logarithmischen Decremente zusammengestellt, welche in der Weise erhalten wurden, dass $x = n.50$ gesetzt und:

$$\frac{\log A_0 - \log A_n}{n}$$

gebildet wurde.

Zur besseren Uebersicht der Abnahme der Amplituden sind die relativen Werthe derselben nochmals in Tabelle VIII

zusammengestellt, wobei in allen Fällen die Amplitude für $x = 0$ als 1000 angenommen wurde.

Tabelle I.

59 Drähte aus weichem Eisen, von 2 mm Durchmesser und 1 m Länge.

x	q	Differenz	α	A	Decrement
0	6° 28'	—	504	1347	—
50	—	1° 48'	285,5	734,7	0,26336
100	8 16	—	174	431,7	0,24712
150	—	1 48	117	280,3	0,22726
200	10 4	—	78,5	181,9	0,21766

Tabelle II.

7 Stäbe aus weichem Eisen von 5 mm Durchmesser und 400 mm Länge.

0	32° 36'	—	609	818,2	—
50	—	38 0'	400	434,2	0,27516
100	70 36	—	269	269,6	0,24105
150	—	21 28	174	174,6	0,22362
200	92 4	—	106	111,2	0,21671

Tabelle III.

2 Stäbe aus weichem Eisen von 8,5 mm Durchmesser und 1 m Länge.

0	64° 32'	—	401	407,1	—
50	—	29° 36'	242	242,9	0,22437
100	94 8	—	134	142,3	0,22831
150	—	24 52	75	88,5	0,22093
200	119 —	—	40	56,1	0,21523

Tabelle IV.

50 Drähte aus hartem Eisen von 2 mm Durchmesser und 400 mm Länge.

0	2° 18'	—	226,5	740,9	—
50	—	2° 42'	114	347,5	0,32879
100	5 0	—	59,5	169,9	0,31978
150	—	—	30	80,6	0,32113

Tabelle V.

64 Stahldrähte von 1,8 mm Durchmesser und 1 m Länge.

0	1° 24'	—	326,5	1123	—
50	—	1° 2'	155	517,8	0,33623
100	2 26	—	47	222,7	0,32618
150	—	—	44	139,0	0,30244

Tabelle VI.

5 Stahlstäbe von 6 mm Durchmesser und 400 mm Länge.

0	5° 34'	—	196,3	546,1	—
50	—	4° 56'	92	230,4	0,37477
100	10 30	—	46,7	106,5	0,35490
150	—	—	24	50,3	0,34509

Tabelle VII.

Ein Stahlstab, 12 mm Durchmesser und 400 mm Länge.

x	q	Differenz	a	A	Decrement
0	41° 32'	—	201	238,7	—
50	—	54° 20'	104	104,5	0,35881
100	96 12	—	46,5	47,5	0,35062

Tabelle VIII.

	Weiches Eisen			Hartes Eisen	Stahl		
	I	II	III	IV	V	VI	VII
0		1000		1000		1000	
50	545	531	596	469	461	422	438
100	320	329	349	229	212	195	199
150	208	213	217	109	124	92	—
200	135	136	139	—	—	—	—

Aus den mitgetheilten Zahlentabellen kann man Folgendes entnehmen.

1. Im Vergleich mit der magnetisirenden Kraft zeigen die beobachteten, magnetischen Momente sämmtlich Phasenverzögerungen, welche Functionen der Entfernung von der Erregungsstelle sind. Die Anfangswerthe derselben ($x = 0$) und ihr weiterer Verlauf fallen bei den einzelnen Kernen sehr verschieden aus. Am kleinsten bei dünnen Stahldrähten (V) und Eisendrähten (I und IV), wachsen dieselben schnell mit den Durchmessern der Stäbe und erreichen die grössten Werthe bei dicken Eisen- und Stahlstäben (III und VII).

Von den hier untersuchten Kernen waren Nr. II, IV, VI und VII schon bei den in der vorangehenden Abhandlung beschriebenen Versuchen benutzt worden. Die dort bei der Magnetisirung durch überall gleiche Kräfte beobachteten Phasenverzögerungen stimmen in ihrer Grössenfolge vollständig mit den hier gefundenen überein. Dieselben sind klein bei den dünnen Eisendrähten (IV) und bei den mässig dicken Stahlstäben (VI), viel grösser bei den Eisenstäben (II), am grössten bei dem dicksten Stahlstab (VII).

Es wurde damals nachgewiesen, dass diese Phasenverzögerungen durch die Mitwirkung der Inductionsströme in

den Kernen entstehen. Den gleichen Schluss glaube ich auch in dem vorliegenden Fall unbedenklich ziehen zu können, wenn auch die Inductionsströme und ihr Einfluss auf die magnetischen Momente sich hier nicht so vollständig durch die Rechnung verfolgen lassen.

Die Beschaffenheit der Eisenmasse, insbesondere der Gegensatz: Eisen und Stahl, kommt nur insoweit in Betracht, als bei den grösseren Momenten in weichem Eisen stärkere Inductionsströme entstehen, als bei dem schwächer magnetisirbaren Stahl. Hieraus erklärt es sich, dass gerade die dünnen Stahldrähte die kleinsten Phasenverzögerungen zeigen, und dass dieselben bei den Stahlstäben (VI) kleiner ausfallen als bei den Eisenstäben (II), obgleich letztere einen kleineren Durchmesser haben, als erstere.

2. In drei Fällen (I, II, III) wurde die Zunahme der Phasendifferenz beobachtet, während die Entfernung von 0 auf 100 und von 100 auf 200 mm vergrössert wurde. Bei I sind die Veränderungen von φ in beiden Fällen gleich; bei III stimmen dieselben nahezu überein. Bei II sind die Unterschiede allerdings ziemlich gross. Sieht man von diesem Fall ab, und nimmt man an, dass der Fortpflanzung der magnetischen Schwingungen eine constante Geschwindigkeit zukommt, so kann man dieselbe aus den beobachteten Phasendifferenzen berechnen.

Schreibt man die Gleichung (2) in der für fortschreitende Schwingungen gewöhnlichen Form:

$$m = M \cdot \cos \left\{ \pi n t - \varphi_0 - \frac{\pi n x}{a} \right\},$$

so ist a die gesuchte Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welche nach der Gleichung:

$$\frac{\pi \varphi'}{180} = \frac{\pi n x}{a},$$

berechnet werden kann, worin φ' die in den Tabellen angegebenen Differenzen von φ bei einer Zunahme der Entfernung um 100 mm bedeuten. Je kleiner dieselben sind, um so grösser ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Ordnet man nach der Grösse derselben, so ergeben sich die folgenden Werthe für die Secunde als Zeiteinheit:

Tabelle IX.

Dünne Stahldrähte (V) .	2323 m	Stahlstäbe (V)	489,4 m
„ Eisendrähte (I) .	1333 „	Eisenstäbe (III) im Mittel	88,7 „
„ Eisendrähte (IV) .	888,7 „	Dicker Stahlstab (VII) .	44,1 „

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der magnetischen Impulse jedenfalls eine sehr grosse ist und nur durch die Einwirkung der Inductionsströme verkleinert wird, ferner dass die Beschaffenheit der Eisenmasse keinen directen Einfluss auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit hat.

3. Dass die Grösse der Phasenverzögerung nicht ohne Einfluss auf die Berechnung der Amplituden (A) aus den unmittelbar beobachteten Ausschlägen (α) ist, wurde schon früher ausführlich besprochen. Da dieselbe nach der Gleichung:

$$A = \frac{\alpha}{\sin(\varphi + \psi)}$$

erfolgt, so ist ersichtlich, dass die relativen Werthe von A nahezu dieselben bleiben, wie diejenigen von α , wenn entweder φ sehr klein ist im Vergleich zu ψ , oder wenn die Summen $\varphi + \psi$ in der Nähe von 90° liegen. Letzteres ist z. B. der Fall bei den Kernen III und VII. Für mittlere Werthe von φ , welche mit zunehmendem x wachsen, ist der Einfluss der Division nicht unerheblich. Der gleichmässige Gang der logarithmischen Decremente bei allen Kernen zeigt, wie wichtig die Ausführung dieser Rechnung ist. Man würde ganz unrichtige Werthe für den Verlauf der Amplituden erhalten, wenn man als Maass derselben die direct beobachteten Ablenkungen α angesehen hätte.

4. Die Amplituden der magnetischen Momente nehmen bei allen Kernen schnell mit wachsender Entfernung ab und folgen hierbei nahezu demselben Gesetz, indem dieselben in erster Annäherung durch eine Exponentialfunction:

$$M = M_0 e^{-\beta x}$$

dargestellt werden können. Dieselbe gibt bei passender Bestimmung von β die magnetischen Momente bei den Kernen: III, IV, VII genau wieder. Bei den übrigen nimmt allerdings β mit wachsendem x ab, scheint sich aber einem un-

teren Grenzwert zu nähern. Benutzt man daher nur die letzten Werthe der Decremente, den grössten Entfernungen entsprechend, so erhält man die folgende Zusammenstellung, wenn x in Metern ausgedrückt wird:

Tabelle X.

	Nr.	β		Nr.	β
Weiches Eisen . . .	I	10,27	Stahl	V	14,51
	II	10,17		VI	16,16
	III	10,07		VII	16,37
Hartes Eisen . . .	IV	14,80			

Die Werthe des Coëfficienten β stimmen bei dem Eisen vollständig untereinander überein. Dass bei dem Stahl nur zwei Sorten gleiche β haben, die dünnen Stahldrähte dagegen wieder mit dem harten Eisen übereinstimmen, kann sehr wohl an der Verschiedenheit ihres Härtezustandes liegen. Jedenfalls ist, im Vergleich zu den grossen Differenzen der Phasenverschiebungen, hier ein Einfluss des Durchmessers der Kerne, also der Inductionsströme nicht zu erkennen, und wir können den Schluss ziehen:

Die Grösse der Abnahme der Amplituden der magnetischen Momente bei wachsender Entfernung von der Erregungsstelle ist nur von der Beschaffenheit der Eisensorte abhängig und unabhängig von den Querdimensionen der Stäbe.

5. Dass bei constanter Magnetisirung eines Theiles eines langen Eisenkernes die magnetischen Momente an Orten, welche von der äusseren Kraft nicht angegriffen werden, annähernd nach dem Gesetz einer Exponentialfunction abnehmen, ist schon mehrfach beobachtet worden.¹⁾

Sehr bemerkenswerth scheint mir indess, dass schon in der kurzen Zeit einer Schwingung, welche hier kleiner als 0,01 Secunde ist, ein Zustand eintritt, welcher dem endlichen Gleichgewichtszustand bei constanter Wirkung nahe kommt. Hierin liegt wohl ein neuer Beweis, dass sich die magnetische

1) Vgl. G. Wiedemann, Die Lehre von d. Electr. 3. p. 382 und 581. 1883; ferner Beibl. 1. p. 406. 1877.

Induction an sich mit sehr grosser Geschwindigkeit ausbreitet und nur durch die hierbei erregten Inductionsströme eine Verzögerung erleidet.

Die mehrfach behauptete Analogie zwischen der Ausbreitung des magnetischen Zustandes in Eisenmassen und dem Vorgang der Wärmeleitung ist daher nur dann einigermaßen zutreffend, wenn man die Inductionsströme in der Eisenmasse mit berücksichtigt, worauf ich schon in der vorangehenden Abhandlung hingewiesen habe. Wollte man aber von dieser Aehnlichkeit der beiden Erscheinungen in der Weise Gebrauch machen, dass man für die Fortpflanzung des magnetischen Momentes in einem Eisenstab die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial m}{\partial t}$$

aufstellt, so würde dieselbe den beobachteten Thatsachen nicht entsprechen. Das Integral der Differentialgleichung wäre für den hier betrachteten Fall:

$$m = m_0 e^{-cx \sqrt{\frac{n\pi}{2}}} \cos \left\{ n\pi t - \varphi_0 - cx \sqrt{\frac{n\pi}{2}} \right\},$$

während die magnetischen Momente nach den Beobachtungen sich annähernd durch die Gleichung:

$$m = m_0 e^{-\beta x} \cos \{ n\pi t - \varphi_0 - \gamma x \}$$

ausdrücken lassen. Nach der oben aufgestellten Differentialgleichung der Wärmeleitung müssten die beiden Coëfficienten β und γ einander gleich sein. Dies ist keineswegs der Fall. Vielmehr hängt, wie aus Tabelle X folgt, β nur von der inneren Beschaffenheit der Eisenmasse, γ hauptsächlich von den Durchmessern der einzelnen Kerne, resp. von den Inductionsströmen ab. Bei den dünneren Kernen ist γ sehr klein im Vergleich zu β und nur bei den dicksten Stäben von derselben Grössenordnung.

Ich verzichte hier darauf, durch Heranziehung neuer Hypothesen eine passendere Differentialgleichung aufzustellen, um so mehr, da sich aus den Versuchsergebnissen direct die Gesetze der Fortpflanzung magnetischer Schwingungen ent-

nehmen lassen, welche man in folgender Weise zusammenfassen kann:

Periodische Veränderungen des magnetischen Momentes, welche an einer Stelle eines langgestreckten Eisenkernes durch äussere Kräfte hervorgerufen werden, pflanzen sich in der Weise fort, dass die Amplituden der Momente mit wachsender Entfernung von der Erregungsstelle abnehmen, wobei die Grösse dieser Abnahme allein von der inneren Beschaffenheit der Eisenmasse abhängt, während die Fortpflanzungsgeschwindigkeit an sich sehr gross ist, durch die bei der Ausbreitung entstehenden Inductionsströme aber je nach den Umständen mehr oder weniger verkleinert wird.

Halle a. S., im März 1884.

V. Ueber die electromotorische Kraft, den Widerstand und den Nutzeffect von Ladungssäulen (Accumulatoren); von Wilhelm Hallwachs.¹⁾

Die erste Ladungssäule wurde schon 1803, drei Jahre nach Entdeckung der Electrolyse, von Ritter gebaut. Später hat Sinsteden²⁾ darauf aufmerksam gemacht, dass Voltameter, deren Electroden aus Blei, Silber oder Nickel bestehen, Ladungssäulen liefern, welche zur Erzeugung starker Ströme geeignet sind. Planté³⁾ hat dann von 1859 ab eingehende und mühevollen Versuche mit Ladungssäulen gemacht, die aus Bleiplatten in verdünnter Schwefelsäure bestanden. Sie führten ihn zu einem Verfahren, die Bleiplatten so zu präpariren, dass die Säule anhaltendere Polarisationsströme liefert. Dieses Verfahren ist sehr umständlich und erfordert einen grossen Arbeitsaufwand. Ausserdem sind die schliess-

1) Aus der electrotechnischen Zeitschrift 1883. p. 200.

2) Sinsteden, Pogg. Ann. 92. p. 16. 1854.

3) Planté, Compt. rend. 50. p. 640 u. a.; Recherches sur l'électricité

lich auf der Oberfläche der Bleiplatten gebildeten Schichten von schwammigem Blei verhältnissmässig dünn. Faure hat eine Verbesserung dieser Elemente dadurch erreicht, dass er beide Electroden von vornherein mit Mennige bedeckt. Die Formirung wird dadurch wesentlich beschleunigt, ausserdem aber das Element für eine stärkere Ladung befähigt, weil die auf der Oberfläche der Electroden gebildete Schicht von schwammigem Blei und Oxyden desselben viel dicker ist.

Ueber diese neueren Ladungssäulen lagen erst sehr wenige Untersuchungen vor. Namentlich fehlte es an Beobachtungen ihres Nutzeffectes. Ich habe daher auf Anregung des Hrn. Prof. Kundt Untersuchungen über die electromotorische Kraft, den Widerstand und den Nutzeffect von Ladungssäulen angestellt. Während meiner Arbeit erschienen Berichte über eine Bestimmung des Nutzeffectes, welche die Herren Allard, Le Blanc, Joubert, Potier und Tresca¹⁾, sowie über eine grössere Anzahl derselben, welche die Herren Prof. W. E. Ayrton und John Perry²⁾ vorgenommen hatten. Die Herren Gladstone und Tribe haben über die chemischen Vorgänge in den Ladungssäulen gearbeitet.³⁾ Ich selbst habe über die letzteren keine Untersuchungen angestellt.

Es standen mir zwei Elemente von Tommasi, ein grösseres und kleineres von Bréguet, sowie zwei verschiedenen präparirte von Hrn. Otto Schulze dahier zur Verfügung.

Die Schulze'schen Elemente bestehen aus einer Serie von Bleiplatten, von denen die erste, dritte, fünfte u. s. w. unter sich und die zweite, vierte, sechste u. s. w. unter sich metallisch verbunden waren. Diese Platten besaßen 20 cm Höhe und 10 cm Breite und waren in einen viereckigen Kasten eingesetzt. Das erste Element (Nr. I) hatte fünf Platten, auf die 1 kg Mennige aufgetragen war. Damit diese besser haften blieb, waren die Platten waffelartig eingepresst

1) Allard, Le Blanc, Joubert, Potier, Tresca, *Compt. rend.* 94. p. 600. 1882; *La lumière électrique* 6. Nr. 10. Beibl. 6. p. 508.

2) W. E. Ayrton u. J. Perry, *Phil. Mag.* (5) 14. p. 41. 1882. vgl. Beibl. 6. p. 687.

3) Gladstone u. Tribe, *Nature* 25. p. 221 u. 461. 1881. 26. p. 603. 1882. Beibl. 6. p. 688, 949.

worden. Das Element wog mit Säure 8,1 kg. Das zweite Element (Nr. IV) hatte dreissig Platten, die für die Herstellung gekratzt, dann mit Schwefelblumen bestreut und erhitzt wurden, sodass sich auf der Oberfläche eine Schicht von Schwefelblei bildete. Bei der Ladung des aus diesen Platten hergestellten Elementes wird zunächst der Schwefel wieder ausgeschieden. Das Element wog mit Flüssigkeit 10,5 kg.

Bei den Elementen von Tommasi (Nr. II) stehen zwei viereckige Rahmen von 30 cm Höhe und 30 cm Breite, die aus viereckigen, fingerdicken Bleistäben gebildet sind, in parallelepipedischen Kästen von Hartgummi. Die beiden verticalen Seiten eines jeden Rahmens sind durch 500 bis 600 von oben nach unten dicht aufeinander folgende Blei- lamellen von etwa 0,3 mm Dicke und 15 mm Breite verbunden. Eine Berührung der beiden so gebildeten Platten wird durch dazwischen stehende Stäbe von Hartgummi verhindert. Ein Element wog mit Montirung 21,4 kg.

Bei den Elementen von Bréguet (Nr. III) bestanden die beiden Electroden aus einfachen Bleiplatten, die durch zwischengelegte Kautschukstreifen an der gegenseitigen Berührung gehindert und dann spiralig aufgewunden in einen Glascylinder gesetzt waren. Das grössere Element wog 4,9 kg. Sowohl diese Elemente als auch die von Tommasi waren auf Planté'sche Weise präparirt worden.

Zum Füllen der Elemente wurde eine mit zehn Volumen Wasser verdünnte Schwefelsäure verwendet.

Bevor ich zur Mittheilung der Versuchsanordnung über- gehe, seien hier die im Folgenden gebrauchten Bezeichnun- gen zusammengestellt. Es bedeuten:

1. Bei der Ladung:

J die Intensität,	} in einem bestimmten Moment
W den Widerstand der Ladungssäule,	
E ihre electromotorische Kraft,	
E' die Potentialdifferenz an den Enden der geschlossenen Säule,	

$$\text{also } E' = E + JW.$$

(J_0) die mittlere Intensität	} während der Ladung.
(E_0) die mittlere electromotorische Kraft	
T die Ladungsdauer	

2. Bei der Entladung sind die entsprechenden kleinen Buchstaben genommen. Es ist hier aber:

$$e' = e - iw,$$

wie ohne weiteres ersichtlich.

Der äussere Widerstand, durch den sich das Element entladet, ist mit r bezeichnet.

Alle Grössen sind in den vom internationalen Congress der Electriciker festgesetzten Einheiten¹⁾ angegeben. Als Einheit der Stromarbeit ergibt sich dann:

$$1 \text{ Volt} \times 1 \text{ Ampère} \times 1 \text{ Secunde} = \frac{1}{g} \text{ Kilogrammometer.}$$

Bei nöthigen Umrechnungen wurden die Beziehungen:

$$1 \text{ S.-E.} = 0,972 \text{ Ohm,}$$

$$1 \text{ Daniell} = 1,12 \text{ Volt}$$

angewendet.²⁾

Versuchsanordnung und Methode.

Während der Ladung und der Entladung wurden in bestimmten Zeitintervallen folgende Grössen nach den später beschriebenen Methoden gemessen:

1. der Widerstand der Ladungssäule,
2. die Stromintensität,
3. die Potentialdifferenz an den Enden der geschlossenen Säule.

Letztere Messung war während der Entladung nur bei grosser Intensität (i) nöthig, weil sich dann der äussere Schliessungskreis zu stark erwärmte, um den Werth von e' aus i und r nach der Formel $e' = ir$ richtig berechnen zu können, wie es bei schwächeren Strömen geschah.

Aus den beobachteten Grössen wurden die electromo-

1) Wied. Ann. 14. p. 708. 1881.

2) Kohlrausch, Leitfaden.

torische Kraft und der Nutzeffect, wie es weiter unten angegeben ist, berechnet.

Beistehendes Schema, Fig. 1, zeigt die Versuchsanordnung:

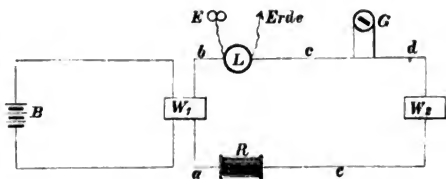


Fig. 1.

B Batterie, resp. Gramme'sche Maschine, die zum Laden dient,

W_1 und W_2 Pohl'sche Wippen ohne Kreuz, um B , resp. eine Wheatstone'sche Brückencombination aus- und einschalten zu können,

R ein Siemens'scher Stöpselrheostat,

L die zu untersuchende Ladungssäule,

E Electrometer,

G Galvanometer;

der geschlossene Kreis $abcde$ soll als Hauptleitung bezeichnet werden.

Die Intensitäten wurden mittelst des Galvanometers G von Sauerwald gemessen, welches sich in einem Nebenschluss der Hauptleitung befand. Wurde nicht eine Bunsen'sche Batterie, sondern die Gramme'sche Maschine zum Laden benutzt, so schwankte die Intensität entsprechend den Explosionen in dem Gasmotor, welcher die Maschine trieb. Die starke Dämpfung des Galvanometers machte indess eine Ablesung auf 0,5% Genauigkeit möglich.

Die Galvanometeraus schläge wurden mit Zugrundelegung einer Siemens-Einheit eines Stöpselrheostaten und der electromotorischen Kraft eines Normaldaniells auf Ampère's zurückgeführt, und zwar in folgender Weise. Mehrere nebeneinander geschaltete Daniell'sche Elemente, deren electromotorische Kraft unmittelbar vorher mittelst eines Electro-



meters bestimmt worden war, schickten einen Strom durch die Hauptleitung. Der von demselben bewirkte Galvanometerausschlag wurde abgelesen, darauf der Widerstand des Stromkreises bestimmt, der Galvanometerausschlag und die electromotorische Kraft der offenen Batterie nochmals beobachtet, sodann aus den Mitteln der correspondirenden Bestimmungen die Intensität in Ampère berechnet. Diese Operation habe ich während der Versuche mehrfach wiederholt.

Die Potentialdifferenzen wurden mittelst eines Mascart'schen Quadrantenelectrometers (*E* des Schemas) gemessen. Ein Ende der secundären Säule war stets zur Erde abgeleitet (durch einen Draht, der zur Gasleitung führte), das andere mit der Nadel des Electrometers in Verbindung gebracht. Ein Commutator gestattete, die Verbindungen zu vertauschen. Die hierbei erhaltenen Electrometerausschläge nach entgegengesetzten Seiten stimmten miteinander überein.

Eine Batterie von 100 isolirt aufgestellten Daniell'schen Elementen, deren Mitte zur Erde abgeleitet war, brachte die beiden Quadrantenpaare auf entgegengesetzt gleiches Potential. Mittelst eines Normaldaniells wurde von Zeit zu Zeit untersucht, in wie weit diese Batterie constant blieb; sobald eine Aenderung in der Ladung der Quadranten eintrat, wurde die Batterie frisch zusammengesetzt.

Die electromotorischen Kräfte wurden mit derjenigen eines Normalelementes verglichen, dessen electromotorische Kraft zu 1,12 Volt angenommen wurde. Als solches diente theils ein „hoher Daniell“¹⁾, theils ein Daniell mit Heber. Die Constanz dieser Elemente wurde öfters controlirt. Ein Normaldaniell bewirkte einen Electrometerausschlag von 55 bis 60 mm; dieser Ausschlag wurde während der einzelnen Versuche öfters ermittelt.

Die Widerstandsmessungen wurden in der Wheatstone'schen Brücke mit Telephon und Wechselströmen ausgeführt²⁾,

1) Beschrieben von König, Wied. Ann. 16. p. 16. 1882.

2) Wietlisbach, Inauguraldiss., Zürich 1879. Beibl. 3. p. 651. Berl. Ber. 1879. p. 280. F. Kohlrausch, Wied. Ann. 11. p. 653. 1880. Less, Wied. Ann. 15. p. 80. 1882.

und zwar nach untenstehendem Schema, Fig. 2. Zweig 1 und 2 bestanden aus einem durch einen Contactklotz *K* getheilten, ausgespannten Neusilberdraht von 1 m Länge und 1,50 Ohm Widerstand. Zweig 3 war ebenfalls ein ausgespannter Neu-

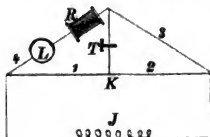


Fig. 2.

silberdraht, von dem beliebige Intervalle benutzt werden konnten; er besass im ganzen etwas über 1 Ohm Widerstand. Zweig 4 ist die Hauptleitung des Schema Fig. 1, die mittelst der Wippe *W*₂ in die Brückencombination eingefügt werden konnte.

Die Neusilberdrähte waren durch Vergleichung mit zwei Stöpselrheostaten calibriert worden. Als Stromerregere diente ein kleiner, im Nebenzimmer aufgestellter Inductionsapparat (*J*), dessen primäre Spirale 0,57, dessen secundäre 387 Ohm Widerstand besass. Die Zahl der Unterbrechungen betrug gewöhnlich etwa 100 in der Secunde und konnte von 70 bis 130 verändert werden. Das Telephon (*T*) hatte zwei Rollen von 3,79 und 3,74 Ohm Widerstand, welche nebeneinander geschaltet wurden. Mit den dünnen Zuleitungsdrähten zum Telephon besass dann der Brückenweig im ganzen 2,89 Ohm Widerstand. In den Zweig 4 wurde gewöhnlich noch 1 S.-E. aus dem Rheostat *R* zugefügt, um die durch das inconstante Element selbst im Telephon erregten Töne abzuschwächen.¹⁾ Diese S.-E. war inductionsfrei und genügte meist vollständig, um die Einstellung des Contactes *K* auf das Minimum der Tonstärke im Telephon bis auf 0,5 mm genau zu ermöglichen, wodurch eine Genauigkeit der Widerstandsbestimmung von 0,2 % erreicht wurde. Es ergaben z. B. vier Messungen des Widerstandes einer Ladungssäule plus einem Stück Neusilberdraht die Werthe:

$$w = 1,135, 1,135, 1,136, 1,134 \text{ Ohm.}$$

Die Widerstandsmessungen wurden so ausgeführt, dass die ganze Hauptleitung mittelst der Wippe *W*₂ als Zweig 4 in die Brückencombination eingefügt wurde. Im Falle der Ladung war vorher selbstverständlich die Ladungsbatterie,

1) Less, Wied. Ann. 15. p. 83. 1882.

resp. Maschine mit Hülfe von W_1 ausgeschaltet worden. Es ging dann allerdings zur Zeit der Widerstandsmessung ein Strom von anderer Stärke durch die Säule als in dem Augenblick, für welchen die Kenntniss des Widerstandes gewünscht wurde. Um zu sehen, ob eventuell der Widerstand mit der Stromintensität variire, habe ich, soweit es die Methode erlaubt, die Widerstände bei möglichst verschiedenen Intensitäten bestimmt und keine merklichen Aenderungen gefunden. Kleine Aenderungen würden übrigens, wenn sie auch vorhanden wären, auf die Bestimmung der electromotorischen Kraft und des Nutzeffectes, wie die folgenden Beobachtungen und Formeln ergeben, von verschwindendem Einfluss sein. Auch die procentisch erheblichen Fehler der Widerstandsbestimmungen, welche von der nothwendigen Einschaltung der vorher erwähnten Widerstände in Zweig 4 herrühren, bedingen wegen ihres sehr geringen absoluten Betrages keine erheblichen Fehler bei der Ermittlung der electromotorischen Kraft und des Nutzeffectes.

Die Beobachtungen.

I. Electromotorische Kraft.

Die electromotorische Kraft wurde aus den beobachteten Grössen nach folgenden Formeln berechnet:

$$E = E' - IW \quad (\text{Ladung}),$$

$$e = e' + iw = i(r + w) \quad (\text{Entladung}).$$

Von Zeit zu Zeit wurde auch die electromotorische Kraft des offenen Elementes gemessen.

Die electromotorische Kraft einer Ladungssäule hängt unter sonst gleichen Umständen von dem Zustande der Säule ab. Diese Abhängigkeit soll weiter unten besprochen werden. Bestimmt man ferner die electromotorische Kraft während der Ladung, öffnet die Säule und bestimmt sofort wieder, lässt dann schnell den Entladungsstrom circuliren und bestimmt abermals, so ergeben sich merklich verschiedene Werthe. Um diese Verhältnisse kurz aussprechen zu können, wollen wir einen Strom, welcher die Ladungssäule durchfließt, positiv nennen, wenn er sie ladet, negativ, wenn er sie entladet; es entspricht dann Strom Null der offenen Säule. Man

kann dann kurz sagen: die electromotorische Kraft hängt von der Stromintensität ab. Die Versuche ergaben bezüglich dieser

Abhängigkeit von der Stromintensität:

Wenn man von positiven Werthen der Stromintensität durch Null zu negativen Werthen übergeht, so nimmt die electromotorische Kraft ständig ab. Verschiedene mal, so schnell als möglich hintereinander angestellte Messungen ergaben:

Strom positiv	Offene Säule	Strom negativ
2,28 ¹⁾	2,06	—
2,34	2,10	—
2,41	2,18	2,08
2,20	2,06	1,99
2,31	2,11	2,01
2,32	—	2,03.

Je stärker der Entladungsstrom ist, um so schneller fällt die electromotorische Kraft ab. Bei sehr grosser Entladungsintensität (*i*) kann sie in kurzer Zeit fast auf Null herab-

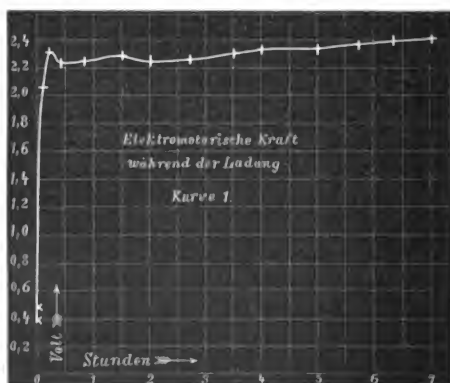


Fig. 3.

sinken, ohne dass das Element völlig entladen ist. Sie kommt wieder zu ihrem Anfangswerthe zurück, wenn man den Entladungsstrom einige Zeit unterbricht (Rückstände).

1) Die in einer Horizontalreihe stehenden Zahlen gehören zusammen.

Abhängigkeit der electromotorischen Kraft von dem Zustande des Elementes. — Der Zustand ist bestimmt:

1. durch die momentan in dem Elemente vorhandene, verfügbare, electriche (chemische) Energie;

2. durch die gesammten Ladungen und Entladungen, die das Element bereits erfahren hat.

1. Mit dem Inhalte der Ladungssäule an verfügbarer Energie wächst die electromotorische Kraft (E). Sie hat bei einer so vollständig als möglich entladenen Säule immer noch einen Werth von 0,2 bis 0,4 Volt. Im Anfange der Ladung steigt sie zunächst sehr schnell an (vgl. Fig. 3), und zwar je nach der Stromintensität (J) bis zu Werthen von 2 bis 2,4 Volt. Erhält man J constant, so nimmt sie bei weiterem Laden langsam zu. Ihr Maximum habe ich nicht erreicht. Fällt J gegen Ende der Ladung ab, so kann es kommen, dass auch E absinkt.

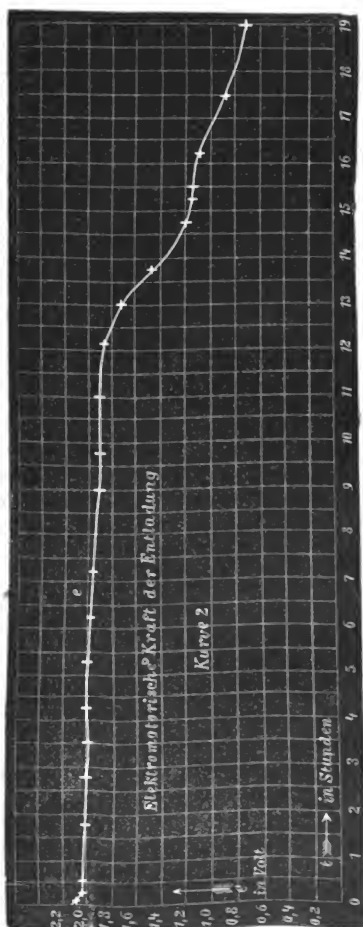


Fig. 4.

Zu Anfang der Entladung besitzt die electromotorische Kraft (e) einen Werth von ungefähr 2 Volt. Wenn der Inhalt der Säule an verfügbarer Energie geringer wird, sinkt e ab. Dies geschieht zuerst langsam, später schnell (vgl. Fig. 4). Die allerletzten Reste von verfügbarer Energie gibt die Ladungssäule sehr langsam und mit einer sehr kleinen electromotorischen Kraft ab.

2. Die electromotorische Kraft ändert sich für sonst gleiche Umstände auch etwas mit dem Gebrauche der Ladungssäule.

Mittelwerthe der electromotorischen Kraft. — Für die Technik haben hauptsächlich die Mittelwerthe der electromotorischen Kraft für die Ladung und die Entladung Interesse. Zu ihrer Ermittlung wurde das Zeitintegral der electromotorischen Kraft auf die weiter unten angegebene Weise für die Ladung, resp. Entladung graphisch berechnet und durch die Ladungs-, resp. Entladungsdauer dividirt.

a) Für die Ladung müssen nach dem Vorhergehenden die Mittelwerthe der electromotorischen Kraft mehr oder minder von der Ladungsintensität und der Stärke der Ladung abhängen, auch werden mit dem Gebrauche der Säule Veränderungen in denselben eintreten. Folgende Tabelle möge einige Beispiele für die Zahlenwerthe von (E_0), dem Mittelwerth bei der Ladung, geben:

Vers. Nr.	Element	(J_0)	T	(E_0)
6	I	3,9	4 ^h	2,19
16	I	4,0	4	2,27
13	I	7,4	7	2,33
14	I	6,7	1	2,20
7	I	17,1	4	2,46
8	I	1,1	4	1,95.

Die beiden ersten Versuche zeigen, dass (E_0) mit dem Gebrauche variirt, die beiden folgenden, dass es auch von der Ladungsdauer (T) abhängt, und die beiden letzten, dass es sich auch mit der Intensität (J_0) verändert. Die Mittelwerthe, welche bei den übrigen Versuchen sowohl mit Element I als auch mit den übrigen Elementen erhalten wurden, lagen alle zwischen 1,9 und 2,5 Volt.

b) Entladung. Weil die letzten Reste der aufgespeicherten Energie nur sehr langsam und mit einer sehr ge-

ringen electromotorischen Kraft (e) abgegeben werden, sind sie für die directe technische Verwendung werthlos und deshalb bei der Berechnung von (e_0), dem Mittelwerth bei der Entladung, nicht berücksichtigt worden. Der Werth von (e_0) beträgt etwa 2 Volt. Die äussersten Werthe, welche sich für extreme Versuchsbedingungen ergaben, waren 1,84 und 2,22 Volt.

II. Widerstand.

Der Widerstand der Ladungssäulen verläuft im allgemeinen so, wie Fig. 5 es angibt. Je nach den verschiede-

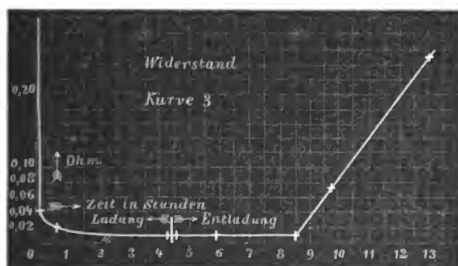


Fig. 5.

nen Versuchsbedingungen der Grösse von J , T , i und t , der Stärke der Ladung und der Länge des Gebrauches modificirt sich diese Curve etwas.

Der Widerstand sinkt bei der Ladung schnell zu einem während des weiteren Verlaufes derselben nahezu constanten Werthe. Die Grösse dieses Werthes hängt etwas von den gesammten früheren Ladungen und Entladungen ab. Er betrug für:

Element	I	0,009 bis 0,014 Ohm,
„	II	0,020 „ 0,025,
„	III	0,015,
„	IV	0,015.

Bei der Entladung bleibt w zunächst constant, im weiteren Verlaufe steigt es, gleichzeitig mit dem stärkeren Abfalle von e , ziemlich proportional mit der Zeit an (vgl. Fig. 5). Die erwähnte Abnahme des Widerstandes zu Anfang der

Ladung erklärt sich wohl dadurch, dass an Stelle schlecht leitenden Bleioxydes leitendes PbO_2 , resp. Pb tritt. Infolge des entgegengesetzten Vorganges nimmt w bei der Entladung zu.

III. Nutzeffect.

Bei der Ladung einer Ladungssäule leistet der einer beliebigen Stromquelle entfließende Strom zwischen den beiden Polen der Säule die Arbeit:

$$L = \int J E' dT = \int J E dT + \int J^2 W dT = L_e + L_w,$$

wo die Integrale über die gesammte Ladungsdauer zu erstrecken sind. L_e ist die electrolytische Arbeit, L_w die im Element auftretende Joule'sche Wärme. Bei der Entladung der Säule durch einen Widerstand r wird, wenn keine Wirkungen nach aussen stattfinden, die Arbeit geleistet:

$$l = \int e i dt = \int i^2 r dt + \int i^2 w dt = l_r + l_w; (ir = e'),$$

l_r äussere Arbeit, l_w Joule'sche Wärme. Wie weit diese letzteren Integrale zu erstrecken sind, bedarf einer Erläuterung. Das Element gibt die letzten Reste von verfügbarer Energie so langsam ab, dass man sich genöthigt sieht, die Entladung irgendwo abubrechen. Der dafür geeignete Zeitpunkt wird durch die Art der Arbeitsabgabe des Elementes angezeigt. Die Curve Fig. 6, die $i^2 w$ als Function von t darstellt, gibt an die Hand, die Entladung dann abubrechen, wann $i^2 w$ den starken Abfall (vgl. Curve) vollendet hat.¹⁾ Um mich zu überzeugen, was eigentlich noch in der Folgezeit an Arbeit von dem Elemente geleistet wird, habe ich bei zwei Versuchen noch zwei Tage weiter entladen und in dieser Zeit nur etwa 3 Proc. der Ladungsarbeit herausbekommen.

Die Integrale L , L_w , l und l_w wurden auf folgende Weise ermittelt. Die zu integrierenden Functionen wurden

1) Man hat auch vorgeschlagen die Entladung bei Beginn des stärkeren Abfalles abubrechen, was jedoch zu bedeutenden Unsicherheiten bei der Berechnung von l führt. Siehe darüber meine zweite „Bemerkung zur Berechnung des Nutzeffectes von Ladungssäulen“, *Electrotechn. Zeitschr.* p. 504. 1883.

aus den beobachteten Grössen berechnet und als Ordinaten zur Zeit als Abscisse aufgetragen. Die Endpunkte der Ordi-

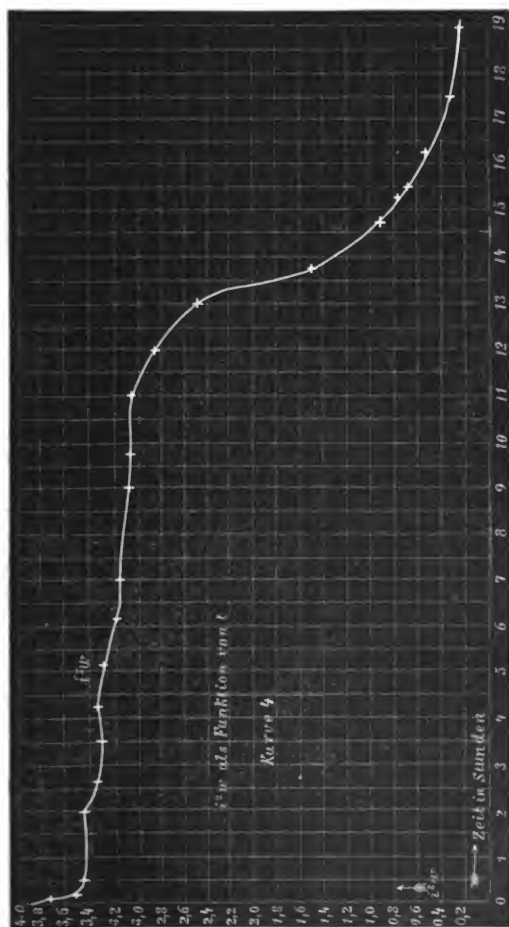


Fig. 6.

naten wurden durch Curven verbunden und die bezüglichlichen Flächenräume mit Hülfe eines Polarplanimeters, zuweilen, wenn die Curve geeignet verlief, auch durch directe Abzählung auf quadrirtem Papier gefunden.

Bei der Entladung könnte im günstigsten Falle von dem Elemente soviel Arbeit geleistet werden, als durch die Electrolyse in ihm aufgespeichert wurde. Durch secundäre Umstände geht aber ein Theil der letzteren Arbeit für die Entladung verloren. Das Verhältniss der bei der Entladung wiedergewonnenen Arbeit zur electrolytischen Ladungsarbeit heisse electrischer Nutzeffect oder Nutzeffect kurzweg:

$$N = \frac{l}{L_e}.$$

Durch folgende zwei Umstände tritt ein Verlust der Säule an aufgespeicherter Energie ein. Erstens verbinden sich bei der Ladung nicht die gesammten Ionen chemisch mit dem Material der Electroden, sondern sie entweichen zum Theil gasförmig. Die Stärke dieser Gasentwicklung ist von der Intensität und der Ladungsdauer abhängig. Zweitens finden locale Ströme zwischen dem Blei und dem Bleisuperoxyd der Anode statt, wie Gladstone und Tribe zeigten¹⁾, wodurch ein mit der Versuchsdauer wachsender Theil des gebildeten Bleisuperoxydes wieder reducirt wird. Da die Stärke dieser beiden Processe von der Ladungsintensität und der Versuchsdauer abhängt, so muss auch der Nutzeffect von letzteren abhängig sein. Ich ging darauf aus, diese Abhängigkeit zu untersuchen, um die für den Nutzeffect günstigsten Bedingungen aufzufinden. Zunächst arbeitete ich mit Element I, das, nach einigen Vorversuchen zu urtheilen, den höchsten Nutzeffect gab. Intensität und Versuchsdauer wurden variirt. Der Nutzeffect nahm aber im Verlaufe der Versuche auf eine Weise zu, dass ich annehmen musste, das Element habe sich verändert, was aus den folgenden Versuchen erhellt.

1) Gladstone u. Tribe, *Nature* **25**. 1881. Beibl. **6**. p. 688, 949.

1. Abhängigkeit des Nutzeffectes vom Gebrauche der Ladungssäule.

Der Nutzeffect (N) nimmt mit dem Gebrauche der Ladungssäule im allgemeinen zu; dem Zerfall der Säule geht aber wieder eine Abnahme desselben voraus:

Element Nr.	Versuch Nr.	N	T (Ladungs- dauer)	(J_0) (mittlere Ladungs- intensität)	r (äusserer Entladungs- widerstand)
I ¹⁾	6	0,21	4 ^a	3,9	0,138
I	16 ²⁾	0,47	4	4,0	0,135
I	20 ³⁾	0,48	4	4,0	0,135
I	22 ⁴⁾	0,28	4	4,2	0,118
II ⁵⁾	21	0,23	4	4,1	0,135
II	23 ⁴⁾	0,32	4	4,0	0,113

Nachdem ich einmal die grossen Veränderungen des Nutzeffectes mit dem Gebrauche des Elementes bemerkt hatte, schien mir eine weitere Untersuchung der Abhängigkeit desselben von der Ladungsintensität und der Ladungsdauer wenig Interesse zu bieten. Die bereits angestellten Versuche genügten indessen, obwohl sie wegen der Veränderlichkeit des Elementes nicht vollständig in dieser Richtung ausgenutzt werden konnten, zu zeigen, in welchen Grenzen Ladungsdauer und Intensität gehalten werden müssen, damit der Nutzeffect nicht erheblich unter seinem höchsten Werthe zurückbleibt. Die vergleichbaren Versuche sollen

1) Element I war vor diesem Versuche zunächst etwa zwei Monate zu Beleuchtungszwecken verwendet, dann nach einmonatlicher Ruhe etwa zehnmal geladen und entladen worden.

2) Das Element war inzwischen etwa zwanzigmal geladen und entladen worden.

3) Das Element war inzwischen viermal geladen und entladen worden.

4) Das Element war inzwischen 27mal geladen und jedesmal nach einer Pause von 12^h wieder entladen worden. Element I zerfiel während des auf Versuch 22 folgenden Versuches.

5) Element II erhielt ich formirt von Tommasi und hatte es vor diesem Versuche längere Zeit zu verschiedenen Zwecken im Gebrauche.

im Folgenden dazu benutzt werden, diese Grenzen zu bestimmen.

2. Abhängigkeit des Nutzeffectes von der Ladungsintensität.

Element	Versuch	(J_0)	N	T	r
I	7	17,1	0,24	4 ^h	1,136
I	8	1,1	0,06	4	1,136.

Aus diesen beiden Versuchen ersieht man, dass unter sonst gleichen Bedingungen bei $(J_0) = 17$ der Nutzeffect viel grösser ist wie bei $(J_0) = 1$.

Element	Versuch	(J_0)	N	T	r
I	11	7,2	0,37	4 ^h	1,136
I	12	10,8	0,34	4	1,136

Der Nutzeffect ist also für $(J_0) = 7$ grösser wie für $(J_0) = 11$. Mit dem Vorhergehenden zusammengekommen ergibt sich: N muss zwischen $(J_0) = 1$ und $(J_0) = 11$ ein Maximum haben.

Element	Versuch	(J_0)	N	T	r
I	16	4,0	0,47	4 ^h	0,135
I	17	6,6	0,49	4	0,195
I	20	4,0	0,48	4	0,135.

Für $(J_0) = 4$ ist N nur sehr wenig kleiner wie für $(J_0) = 7$; für $(J_0) = 7$ aber grösser wie für $(J_0) = 11$.

Das Maximum des Nutzeffectes liegt also etwa zwischen 4 und 11 Ampère. Innerhalb dieser Grenzen schwankt der Werth von N nur wenig; sehr kleine Intensitäten wie sehr grosse muss man beim Laden vermeiden.

3. Abhängigkeit des Nutzeffectes von der Ladungszeit.

Element	Versuch	T	N	(J_0)	r
I	11	4 ^h	0,37	7,2	1,137
I	13	7	0,40	7,4	1,136
I	14	1	0,45	6,7	1,142.

Da der Nutzeffect mit dem Gebrauche des Elementes zunimmt, so kann derselbe von der Ladungsdauer innerhalb der gegebenen Grenzen von 1^h und 7^h bei einer Intensität von 7 Ampère nur wenig abhängig sein. Dasselbe ergibt sich bei einer Intensität $(J_0) = 1$.

Element	Versuch	T	N	(J_0)	r
I	8	4 ^b	0,06	1,1	1,137
I	9	13	0,09	1,0	1,137.

4. Eine Abhängigkeit des Nutzeffectes von dem äusseren Entladungswiderstande lässt sich aus den angestellten Versuchen nicht erkennen.

5. Tritt zwischen Ladung und Entladung eine Pause ein, so erleidet das Element auch dann einen Verlust an verfügbarer Energie, wenn die Electroden während dieser Pause aus der Flüssigkeit genommen werden.

Element	Versuch	T	N	(J_0)	r
I	10	4 ^b	6,9	1,137	0,10 ¹⁾
I	11	4	7,2	1,137	0,37.

6. Maximalwerth des Nutzeffectes.

Der höchste Werth des Nutzeffectes, den ich überhaupt erreicht habe, betrug 0,50; er wurde bei Versuch 15 erhalten:

Element	Versuch	T	(J_0)	r	N
I	15	4 ^b	8,3	0,5	0,50.

In dem Element in Joule'sche Wärme umgesetzte Arbeit.

a. Ladung. Beim technischen Gebrauche der Ladungssäulen muss man auch darauf bedacht sein, das Verhältniss der im Element in Joule'sche Wärme umgesetzten Arbeit (L_w) zur gesammten Ladungsarbeit (L) möglichst klein zu machen.

L_w/L ist zunächst für eine kürzere Ladungsdauer grösser wie für eine längere, wie folgende Beobachtungen zeigen:

T	(J_0)	L_w/L	Versuch	Element
1 ^b	6,7	0,139	14	I
4	6,9	0,055	10	I
7	7,4	0,047	13	I
4	1,1	0,089	8	I
13	1,0	0,017	9	I

Ferner ist L_w/L für sehr starke und für sehr schwache Ströme besonders gross; es hat seine geringsten Werthe für diejenigen Intensitäten, für welche der Nutzeffect sein Maximum hat.

1) Zwischen Ladung und Entladung lag eine vierzehnstündige Pause, während der die Electroden aus der Flüssigkeit genommen wurden.

T	J_0	L_w/L
4 ^b	17	0,22
4	11 bis 8	0,07
4	7 bis 4	0,03 bis 0,05
4	1	0,10

Die Aenderungen von $L_w/L = \int J^2 W dT / \int J E' dT$ erklären sich leicht, wenn man das Verhalten des Widerstandes W und der Potentialdifferenz E' ins Auge fasst.

b. Entladung. Es ist noch von Interesse, das Verhältniss der bei der Entladung im Elemente geleisteten Arbeit (l_w) zu der im äusseren Stromkreise geleisteten (l_r) zu kennen.

l_w/l_r ist dem äusseren Widerstande nahe umgekehrt proportional; es hatte folgende Werthe, wenn zur Füllung des Elementes im Verhältnisse 1:10 verdünnte H_2SO_4 benutzt wurde:

r	l_w/l_r	i_0
1,14	0,02 bis 0,03	1,7
0,50	0,04	3,8
0,19	0,11	9,4
0,11	0,17	18

Maximalinhalt der Ladungssäule an verfügbarer Energie.

Die meiste Arbeit gab Element I in Versuch 13 ab, nämlich rund 175 000 V. $\times$ A. $\times$ S. oder 18000 Kilogramm-meter. Es wog 8,1 kg, wovon 6 kg auf die Electroden kommen. Auf 1 kg Bleigewicht wurden also rund 3000 Kilogramm-meter aufgespeichert. Besondere Versuche, um den Maximalinhalt der Säule an verfügbarer Energie zu finden, habe ich nicht angestellt. Aus Beleuchtungsversuchen glaube ich jedoch schliessen zu dürfen, dass ein Element vielleicht bis rund 20000 Kilogramm-meter aufzuspeichern vermag.

Dauer der Brauchbarkeit des Elementes.

Element I war, ehe ich es bekam, zwei Monate lang zu Beleuchtungszwecken im Gebrauche gewesen und fast täglich geladen worden.

Während meiner Versuche wurden ihm bis zu seinem Zerfall etwa 1,2 Millionen Kilogramm-meter electriche Energie durch die Ladungen zugeführt, was einem einmonatlichen

Gebrauche mit täglich einmaliger Ladung entspricht. Das Element hatte also im ganzen einen dreimonatlichen Gebrauch mit täglicher Ladung ausgehalten.

Werfen wir noch einen Blick auf die anderen Elemente.

Wir haben bei Element I gesehen, dass es sich für eine praktische Verwendung der Ladungssäulen wesentlich darum handelt, extreme Werthe der Intensität und der Ladungsdauer zu vermeiden, dass aber innerhalb ziemlich weiter Grenzen der Nutzeffect mit den Versuchsbedingungen nicht sehr stark variirt. Die Grösse dieser Extremwerthe für die übrigen Elemente mittelst einer eigens zu diesem Zwecke angestellten längeren Reihe von Versuchen zu bestimmen, halte ich nicht für lohnend, sondern glaube, dass sich jene Werthe während der praktischen Verwendung der Ladungssäule ergeben müssen. Ich habe mit den verschiedenen Elementen einen Inductionsapparat getrieben und öfters Drähte geglüht, wozu ich die Ladung unter variirenden Bedingungen vornahm. Unter den Versuchsbedingungen, die, nach dieser praktischen Benutzung zu urtheilen, am günstigsten erschienen, wurden dann mit den Elementen II, III und IV einzelne Nutzeffectsbestimmungen vorgenommen.

Element III zeigte sich beim Gebrauche in Bezug auf den Nutzeffect als sehr geringwerthig im Vergleiche zu den anderen Elementen. Ein mit ihm angestellter Versuch ergab:

T	(J_0)	r	N
3^h	6,1	0,135	0,08.

Element II ergab:

T	(J_0)	r	N
4^h	4,1	0,135	0,23.

Um mich davon zu überzeugen, dass N auch bei diesem Elemente von dem Gebrauch abhängt, habe ich dasselbe nach dem eben mitgetheilten Versuche 27 mal geladen und immer nach einer Pause von 12^h wieder entladen. Wie schon p. 99 bemerkt wurde, ergab sich eine Zunahme von N mit dem Gebrauche.

Element IV, das ich erst gegen Ende meiner Versuche erhielt, konnte, nach Beleuchtungsversuchen zu urtheilen, unter geeigneten Bedingungen nach einigem Gebrauch einen

Nutzeffect von etwa 50% geben. Zunächst wurde mit ihm ein Versuch mit extrem grosser Ladungsintensität angestellt und doch ein ziemlich beträchtlicher Nutzeffect erhalten:

(J_0)	T	r	N
21,4	2,5 ^h	0,30	0,20.

Unter den Versuchsbedingungen, die, nach dem Gebrauche zu urtheilen, für das Element am günstigsten erschienen, wurde dann ein weiterer Versuch gemacht.

T	(J_0)	r	N
4 ^h	3,6	0,12	0,405.

Das Element war, ehe ich es erhielt, noch gar nicht in Gebrauch gewesen und von mir vor dem Versuch etwa zehn- bis zwanzigmal geladen und entladen worden.

Zu der oben (p. 85) erwähnten Arbeit der Hrn. Allard, Potier, Le Blanc, Joubert und Tresca möchte ich noch einige Bemerkungen machen. Ein kurzer Bericht über dieselbe befindet sich *Compt. rend.* 94. p. 600, ein genauerer in *La lumière électrique* 6. Nr. 10. eine Uebertragung des letzteren ins Deutsche in der electrotechnischen Zeitschrift p. 149. 1882. Diese Uebersetzung enthält gleichzeitig kritische Anmerkungen. Auch Hr. Aron hat schon auf mehrere Unzulänglichkeiten der Arbeit hingewiesen.¹⁾ Auf diese Kritiken möchte ich verweisen und hier nur einige Irrtümer, die durch die Resultate der vorliegenden Arbeit näher aufgeklärt werden, berühren.

Die Verfasser ziehen aus ihren Versuchen Schlüsse über die electromotorische Kraft und den Widerstand ihrer Ladungssäulen, die nicht zulässig sind, weil übersehen wurde, dass die electromotorische Kraft der Säule bei offenem Strome einen anderen Werth hat als bei geschlossenem. An diese Schlüsse knüpfen sich dann weitere Folgerungen, welche die Verfasser zur Ansicht führen, dass man, um einen guten Nutzeffect zu erlangen, mit möglichst schwachen Strömen laden müsse, was nach meinen Versuchen nicht richtig ist.

Ferner ist in der Arbeit nichts darüber bemerkt, was vor dem Versuche mit der benutzten, aus 35 Elementen be-

1) Aron, *Electrotechn. Zeitschr.* 1882. p. 226.

stehenden Batterie geschehen war. Es ist aber angegeben, dass dieselben zu Anfang der Ladung bei offenem Strome eine electromotorische Kraft von 72 Volt besass; sie war also wohl nicht vollständig entladen, denn sonst hätte sie bei offenem Strome wohl nur höchstens 14 Volt gehabt. Die von mir untersuchten Elemente hatten wenigstens nach vollständiger Entladung immer nur eine electromotorische Kraft von 0,4 Volt höchstens. Wieviel verfügbare Energie aber noch in der Batterie vorhanden war, lässt sich aus der angegebenen Zahl für die electromotorische Kraft bei offenem Strome nicht schliessen. Dies erhellt daraus, dass die letztere immer noch 72 Volt wie zu Anfang betrug, nachdem die Batterie schon die Hälfte ihrer Ladung empfangen hatte. Die Ladung fand nämlich in vier Abschnitten am 4., 5., 6. und 7. Januar statt: bei Beginn des dritten Abschnittes, am 6. Januar, betrug die electromotorische Kraft der offenen Säule 72,1 Volt.

Ein einzelner Versuch ist übrigens bei der Veränderlichkeit der Ladungssäule nicht von sehr grossem Werthe, und ein dem mitgetheilten vorangehender Versuch vom 20. October 1881 wurde, weil er einen zu geringen Nutzeffect gab, unterbrochen.

Noch liegt eine Arbeit von den Hrn. Prof. W. E. Ayrton und John Perry vor.¹⁾ Die Verfasser haben auch den Umstand übersehen, dass die electromotorische Kraft bei offenem Strom einen anderen Werth hat, wie bei geschlossenem Strome. Leider lässt sich aber aus dem Berichte nicht entnehmen, ob dieses Versehen einen Fehler in der Berechnung des Nutzeffectes zur Folge hatte, da die Verfasser nicht angegeben haben, was sie unter Nutzeffect verstehen. Für letzteren werden sehr hohe Werthe, 83—90 Proc., angegeben. Die Verfasser ziehen eine Reihe von Schlüssen über den Widerstand und die electromotorische Kraft ihrer Ladungssäulen und kommen, weil sie den angeführten Umstand übersehen haben, zu fehlerhaften Resultaten, die theilweise mit denjenigen der Verfasser der vorigen Arbeit übereinstimmen.

1) W. E. Ayrton u. J. Perry, Phil. Mag. (5) 14. p. 41. 1882. vgl. Beibl. 6. p. 687.

Folgende Tabelle gibt eine Uebersicht über meine sämtlichen Versuche, von denen die vergleichbaren im Obigen zu weiteren Schlüssen benutzt worden sind.

Nr. des Elementes	L a d u n g				E n t l a d u n g				
	Nr. des Versuches	T in Secund	(J_0)	L_e in 10^3 V. A. S.	r	t in Minut.	l in 10^3 V. A. S.	(i_0)	N
I	2 ¹⁾	10	6,9	800	0,22	123	224	10,1	0,28
I	5	1	19,4	110	0,132	5	7,1	13,2	0,06
I	6	4	3,9	122	0,138	15	26,0	13,0	0,21
I	7	4	17,1	533	1,136	590	130	1,8	0,24
I	8	4	1,1	33,7	1,137	12	2,0	1,5	0,06
I	9	13	1,0	95,3	1,137	48	8,6	1,6	0,09
I	10 ²⁾	4	6,9	225	1,137	137	23,7	1,6	0,105
I	11	4	7,2	235	1,137	435	87,8	1,7	0,37
I	12	4	10,8	363	1,136	647	126	1,7	0,35
I	13	7	7,4	434	1,136	900	175	1,7	0,40
I	14	1	6,7	51,3	1,142	128	23,0	1,6	0,45
I	15	4	8,3	276	0,500	303	137	3,8	0,50
I	16	4	4,0	133	0,135	36	62,0	13,5	0,47
I	17	4	6,6	219	0,195	93	108	9,4	0,49
I	20	4	4,0	132	0,135	39	63,7	13,2	0,48
I	22 ³⁾	4	4,2	141	0,118	27	39,5	13,2	0,28
III	18	3	6,1	161	0,135	7	13,6	14,7	0,08
II	21	4	4,1	138	0,135	21	31,6	12,6	0,23
II	23 ⁴⁾	4	4,0	126	0,113	23	40,8	14,3	0,32
IV	19	2,5	21,4	434	0,237	131	87,0	6,0	0,20
IV	24	4	3,6	109	0,118	25	44,1	14,8	0,405

1) Die Versuche 1, 3 und 4 sind weniger genau wegen Unregelmässigkeiten am Electrometer.

2) Zwischen Ladung und Entladung lag eine 14stündige Pause, während der die Electroden aus der Flüssigkeit genommen wurden.

3) Die Ladungssäule war zwischen 20 und 22 27mal geladen und immer nach einer Pause von 12^h wieder entladen worden. Nach Versuch 22 zerfiel das Element.

4) Das Element war zwischen 21 und 23 27mal geladen und immer nach einer Pause von 12^h wieder entladen worden.

Physikal. Inst. d. Univ. Strassburg, März 1883.

VI. Ueber die Berechnung der Inductionscoëfficienten von Drahtrollen; von J. Stefan.

(Aus dem 88. Bde. d. Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. zu Wien. II. Abth. vom 20. Dec. 1883. mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Die Herstellung der Widerstandseinheit (Ohm) nach der vom Comité der British Association angenommenen Methode hat die Veranlassung gegeben, den Coëfficienten der Selbstinduction des angewendeten Erdinductors zu bestimmen. Mit besonderer Sorgfalt ist diese Bestimmung von Lord Rayleigh und A. Schuster, welche die Versuche des Comité's wiederholten, ausgeführt worden.¹⁾ Lord Rayleigh hat später noch einen zweiten Inductor zu dem gleichen Zwecke benutzt und auch für diesen den Inductionscoëfficienten bestimmt.²⁾

Nach der Theorie der electrodynamischen Induction ist der bestimmte Coëfficient gleichbedeutend mit dem doppelten electrodynamischen Potential der entsprechenden Stromleitung auf sich selbst, eigentlich mit dem speciellen Werthe, welchen dieses doppelte Potential annimmt, wenn die Leitung von der electromagnetischen Stromeinheit durchflossen wird. Dieses Potential lässt sich in den beiden Fällen auch durch Rechnung finden, da die Form der Stromleitungen geometrisch bestimmt und verhältnissmässig einfach ist. Diese Rechnung wurde auch für den ersten der zwei Inductoren zuerst von Maxwell und für beide von Lord Rayleigh ausgeführt.

Es ist wohl als selbstverständlich betrachtet worden, dass der berechnete Inductionscoëfficient mit dem beobachteten übereinstimmen müsse. Es ist aber doch hervorzuheben, dass durch diese Uebereinstimmung, welche sich für die aus Kupferdraht hergestellten Inductoren auch thatsächlich ergeben hat, doch erst der Beweis für die Richtigkeit der angewandten Formeln geliefert wird. Der Begriff des elec-

1) Lord Rayleigh und A. Schuster, Proc. of the London Roy. Soc. 213. p. 104. 1881. Beibl. 5. p. 697.

2) Lord Rayleigh, Phil. Trans. 173. p. 661. 1882. Beibl. 7. p. 122.

trodynamischen Potentials ist aus den Fernwirkungen, welche zwischen Leitern electricer Ströme bestehen, abgeleitet worden. Dass diese Fernwirkungen durch den Potentialausdruck richtig wiedergegeben werden, dafür werden die dynamometrischen Versuche von Wilhelm Weber als Beweis angeführt. Man kann nun auch den Bestimmungen der Inductionscoëfficienten die Bedeutung geben, dass durch dieselben die Gültigkeit der Potentialformel nicht nur für die Fernwirkungen, sondern auch für die electromotorischen Wechselwirkungen von Stromleitern, die sich unmittelbar berühren, geprüft wird.

Die erste experimentelle Bestimmung des Coëfficienten des englischen Inductors ist nicht sehr genau. Auch die erste von Maxwell ausgeführte Berechnung dieses Coëfficienten ist fehlerhaft. Die dazu dienende Formel, welche von Maxwell entwickelt wurde, ist eine Näherungsformel und gibt das Potential einer Drahtrolle auf sich selbst unter der Voraussetzung, dass der Querschnitt des von den Drahtwindungen erfüllten ringförmigen Raumes ein Rechteck ist, und dass die Dimensionen dieses Rechteckes klein sind gegen den mittleren Durchmesser der Rolle. Die Formel besteht aus zwei Theilen, einem ersten Näherungswerthe und aus einer Correction. Die Glieder der letzteren tragen die zweiten Potenzen der Verhältnisse der Breite und Höhe des Rechteckes zu dem Durchmesser der Rolle als Factoren. Von dieser Maxwell'schen Formel ist jedoch nur der erste Näherungswerth exact, in den Correctionsgliedern sind hingegen zwei numerische Coëfficienten unrichtig. Nicht nur diese Unrichtigkeit, sondern ausserdem auch noch ein bei der numerischen Berechnung begangener Fehler hatten eine beträchtlich zu kleine Zahl als Resultat zur Folge.

Lord Rayleigh hat die Maxwell'sche Formel mit einigen speciellen leichter zu behandelnden Fällen verglichen und wurde dadurch veranlasst, ihre Richtigkeit zu bezweifeln. Er machte deshalb bei der Berechnung des Inductionscoëfficienten von den Correctionsgliedern dieser Formeln keinen Gebrauch. Da die Entwicklung und Anwendung der

correcten Formel zu umständlich erschien, substituirte er zum Theil der wirklich vorhandenen Aufgabe eine einfachere, zum Theil wandte er ein anderes als das von Maxwell angegebene Rechnungsverfahren an. Der von ihm gefundene Werth $P = 451\,448$ m stimmt mit dem aus den Beobachtungen von A. Schuster abgeleiteten Werthe $P = 451\,300$ ausserordentlich nahe überein. Den wahrscheinlichen Fehler des letzteren Werthes gibt Schuster $= \pm 1100$ an.

Ich habe diesen Coëfficienten ebenfalls berechnet nach dem in dieser Abhandlung mitzutheilenden Verfahren und $P = 451\,500$ gefunden. Die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung lässt also in diesem Falle nichts zu wünschen übrig.

Der Inductor besteht aus zwei gleichen nebeneinander gestellten Rollen, deren Axen in eine gerade Linie fallen. Der mittlere Radius einer Rolle beträgt 15,8194, der Abstand der Mittelebenen der beiden Rollen 3,851. Der Querschnitt des von den Drahtwindungen ausgefüllten Ringes ist ein Rechteck, dessen Breite (Dimension parallel der Axe) 1,841, dessen Höhe 1,608 beträgt. Alle diese Grössen sind in Centimetern ausgedrückt. Jede Rolle enthält 156,5 Windungen, nämlich 156 Windungen in zwölf Lagen zu dreizehn Windungen und eine halbe Windung noch ausserhalb. Bei der Berechnung wurde vorausgesetzt, dass die 156,5 Windungen gleichförmig in dem Ringe vertheilt sind. Die Dicke des aufgewundenen Drahtes ist 0,137.

Der zweite von Lord Rayleigh benutzte Inductor besteht aus zwei gleichen Rollen vom mittleren Radius 23,625 in einem Abstände 6,595. Die Breite des Ringquerschnittes ist 1,99, die Höhe 1,565. Jede Rolle enthält 288 Windungen in sechzehn Lagen zu achtzehn Windungen eines 0,1104 dicken Drahtes. Aus seinen Beobachtungen leitet Rayleigh für den Inductionscoëfficienten dieses Inductors den Werth $P = 24\,028\,000$ m ab, nach seiner Berechnung ist $P = 24\,000\,000$ und nach meiner Berechnung $P = 24\,015\,000$. Es ist also auch in diesem Falle die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung eine sehr gute.

Nicht so günstig stellt sich die Sache in einem dritten

Falle. Nach einem der englischen Methode analogen Verfahren hat auch Heinrich Weber eine Bestimmung des Ohms ausgeführt und auch den Inductionscoëfficienten des von ihm verwendeten Inductors gemessen und berechnet.¹⁾ Die Dimensionen dieses Inductors sind folgende: Mittlerer Radius einer Rolle 26,361, Abstand der Mittelebenen der beiden Rollen 11,230, Breite des Ringquerschnittes 4,325, Höhe desselben 1,573. Jede Rolle enthält 87 Windungen. Diese sind in sechs Lagen vertheilt, von welcher die erste, dritte und fünfte je fünfzehn, die drei übrigen je vierzehn Windungen enthalten, sodass die Windungen jeder folgenden Lage in die Vertiefungen, welche die Windungen der vorhergehenden darbieten, eingelegt sind. Der aufgewundene Draht hatte, die Umspinnung eingerechnet, die Dicke 0,2883, ohne Umspinnung 0,253.

Aus seinen Beobachtungen leitet H. Weber für diesen Inductor den Werth $P = 225\,900$ m ab, hingegen berechnet er nach der Maxwell'schen Formel den viel grösseren Werth $P = 287\,510$. Diese bedeutende Differenz zwischen den beiden Werthen ist jedoch hauptsächlich durch Fehler in der Rechnung begründet. H. Weber gibt den ersten Näherungswerth von $P = 284\,350$ und die Correction $= 3160$ an. Die letztere ist nach der unrichtigen Maxwell'schen Formel berechnet. Der grössere Fehler ist aber schon bei der Berechnung des Hauptgliedes gemacht worden. Ich finde dasselbe $= 201\,490$ und die Correction $= 4680$, sodass im ganzen $P = 206\,200$ nunmehr nicht grösser, sondern kleiner ausfällt, als der aus den Beobachtungen abgeleitete Werth.

Ich finde übrigens auch aus den von H. Weber mitgetheilten Beobachtungen einen kleineren Werth für P , nämlich $P = 214\,900$. Vielleicht ist diese Zahl noch aus folgendem Grunde zu gross. Bei der Bestimmung von P kommt ein Hülfs widerstand Δw zur Anwendung, welchem der Werth von P direct proportional ist. Dieser Hülfs-

1) H. Weber, Der Rotationsinductor, seine Theorie und seine Anwendung zur Bestimmung des Ohm. Leipzig. Teubner, 1882.

widerstand wurde aus demselben Drahte, welcher zum Inductor verwendet wurde, hergestellt. Das Verhältniss von Lw zum Widerstande w des Inductors setzt H. Weber dem Verhältnisse der Längen der beiden Drähte gleich, es ist aber wahrscheinlich, dass der specifische Widerstand des Inductordrahtes durch das Aufwickeln eine Vergrösserung erfahren hat.

Die Bemerkungen, welche H. Weber an die von ihm gefundene Differenz zwischen dem beobachteten und berechneten Werthe von P knüpft, haben nicht die Berechtigung, welche er ihnen beimisst. Man erhält auch nach dem gewöhnlichen Rechnungsverfahren für den Inductionscoëfficienten dieses Apparates ein genügend genaues Resultat. Die Genauigkeit ist allerdings geringer als in den beiden früheren Fällen, hauptsächlich wegen der ungleichförmigen Bewickelung des Inductors.

Die Bestimmung eines Inductionscoëfficienten im absoluten Maasse ist, wie jede derartige Messung, eine schwierige Aufgabe. In solchen Fällen, wie die hier behandelten, kann man wohl annehmen, dass die Rechnung ein ebenso sicheres Resultat liefert, als eine sorgfältige Messung. Viel leichter als eine absolute Messung ist die genaue Vergleichung zweier solcher Coëfficienten auszuführen, und da bietet die Berechenbarkeit der electrodynamischen Potentiale das Mittel, solche relative Bestimmungen in absolute zu verwandeln, indem man Rollen von zweckmässig gewählten Dimensionen als Maasse von bekannten absoluten Werthen herstellen und bei den Vergleichen verwenden kann.

Ich habe zu diesem Behufe mehrere Formeln abgeleitet und auch einige Tafeln berechnet, welche bei der Berechnung electrodynamischer Potentiale verwendet werden können. Ich will hier diejenigen mittheilen, welche sich auf den von Maxwell behandelten Fall beziehen, dass die Querdimensionen des Rollenringes klein sind gegen den mittleren Durchmesser desselben, und wenn es sich um das Potential einer Rolle auf eine zweite handelt, dass ihr Abstand kleiner ist als der mittlere Durchmesser derselben.

Der mittlere Radius der Rolle sei a , die Anzahl ihrer

Drahtwindungen n . Das doppelte Potential der Rolle auf sich selbst oder ihr Coëfficient der Selbstinduction ist durch die Formel

$$P = 4\pi an^2 z$$

bestimmt, worin z eine reine Zahl ist. Diese theile ich in zwei Theile z_1 und z_2 , sodass:

$$z = z_1 + z_2$$

und z_1 einen ersten Näherungswerth von z bedeutet, z_2 eine hinzuzufügende Correction, welche um so kleiner ausfällt, je kleiner die Dimensionen des Rollenringes gegen den mittleren Radius a sind.

Ist der Querschnitt des von den Drahtwindungen erfüllten Ringes ein Rechteck, von der Breite b und der Höhe c so ist, wie schon Maxwell berechnet hat:

$$z_1 = \log \frac{8a}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{c^2}{6b^2} \log \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{c} + \frac{b^2}{6c^2} \log \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{b} \\ - \frac{2c}{3b} \operatorname{arctg} \frac{b}{c} - \frac{2b}{3c} \operatorname{arctg} \frac{c}{b} + \frac{1}{12}.$$

Die Logarithmen in dieser Formel sind natürliche. Zerlegt man z_1 in zwei Theile, indem man setzt:

$$z_1 = \log \frac{8a}{\sqrt{b^2 + c^2}} - y_1,$$

so ist y_1 nur von dem Verhältnisse der beiden Grössen b und c abhängig und ändert seinen Werth nicht, wenn man b mit c vertauscht. Setzt man $(c/b) = x$, so wird:

$$y_1 = \frac{2x}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{2}{3x} \operatorname{arctg} x \frac{x^2}{6} \log \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \\ - \frac{1}{6x^2} \log \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{12}.$$

Man braucht y_1 nur für solche Werthe von x , welche kleiner sind als Eins, zu kennen, und da die Werthänderungen von y_1 , wenn x von 0 bis 1 wächst, keine grossen sind, so kann schon eine kleine Tabelle die umständliche directe Berechnung von y_1 ersetzen. Ich theile hier eine solche Tabelle mit:

Tabelle I.

x	y_1	x	y_1	x	y
0,00	0,50000	0,35	0,74469	0,70	0,83311
0,05	0,54899	0,40	0,76454	0,75	0,83831
0,10	0,59248	0,45	0,78155	0,80	0,84225
0,15	0,63102	0,50	0,79600	0,85	0,84509
0,20	0,66520	0,55	0,80815	0,90	0,84697
0,25	0,69532	0,60	0,81823	0,95	0,84801
0,30	0,72172	0,65	0,82648	1,00	0,84834

Für gewöhnlich wird die Bestimmung von y_1 auf drei Stellen genügen, es wird dann P um weniger als den tausendsten Theil seines Werthes fehlerhaft sein. Ich habe die Rechnung auf mehr Stellen ausgedehnt, um eine genauere Interpolation möglich zu machen.

Die mit z_2 bezeichnete Correction, welche zu z_1 hinzuzufügen ist, besteht aus einer Reihe, welche nach den geraden Potenzen der Verhältnisse von b und c zu a ansteigt. Von dieser Reihe ist nur der Theil, welcher die Quadrate dieser Verhältnisse enthält, von Maxwell, jedoch wie schon bemerkt, nicht richtig berechnet worden. Nach meiner Rechnung ist dieser Theil von z_2 , für den ich auch das Zeichen z_2 gebrauchen will, durch folgende Formel bestimmt:

$$\begin{aligned}
 z_2 = & \frac{3b^2 + c^2}{96a^2} \log \frac{8a}{\sqrt{b^2 + c^2}} \\
 & - \frac{c^4}{480a^2b^2} \log \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{c} + \frac{b^4}{96a^2c^2} \log \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{b} \\
 & - \frac{b^3}{30a^2c} \operatorname{arctg} \frac{c}{b} + \frac{23b^2}{640a^2} + \frac{221c^2}{5760a^2}.
 \end{aligned}$$

Die Breite b des Rollenringes ist parallel der Axe desselben, die Höhe c nach der Richtung des Radius der Rolle gemeint.

Zerlegt man z_2 in zwei Theile, indem man setzt:

$$z_2 = \frac{3b^2 + c^2}{96a^2} \log \frac{8a}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{b^2}{16a^2} \cdot y_2,$$

so ist y_2 nur von dem Verhältnisse $(c/b) = x$ abhängig und durch

$$\begin{aligned}
 y_2 = & \frac{23}{40} + \frac{221x^2}{360} - \frac{x^4}{80} \log \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \\
 & + \frac{1}{6x^2} \log \sqrt{1+x^2} - \frac{8}{15x} \operatorname{arctg} x \text{ bestimmt.}
 \end{aligned}$$

Zur Berechnung von y_2 kann man folgende Tabelle benutzen.

Tabelle II.

x	y_2	x	y_2	x	y_2
0,00	0,1250	0,35	0,2152	0,70	0,4739
0,05	0,1269	0,40	0,2423	0,75	0,5234
0,10	0,1325	0,45	0,2728	0,80	0,5760
0,15	0,1418	0,50	0,3066	0,85	0,6317
0,20	0,1548	0,55	0,3437	0,90	0,6902
0,25	0,1714	0,60	0,3839	0,95	0,7518
0,30	0,1916	0,65	0,4274	1,00	0,8162

Zum Zwecke der Uebersicht über die vorzunehmenden Rechnungen stelle ich noch den Ausdruck für P in folgender Form hierher:

$$P = 4\pi a n^2 \left[\left(1 + \frac{3b^2 + c^2}{96a^2} \right) \log \frac{8a}{\sqrt{b^2 + c^2}} - y_1 + \frac{b^2}{16a^2} y_2 \right].$$

Da die angewandten Erdinductoren aus zwei Rollen bestehen, so setzt sich der Inductionscoëfficient eines solchen Apparates aus drei Theilen zusammen, aus dem doppelten Potentiale jeder einzelnen Rolle auf sich selbst und aus dem doppelten gegenseitigen Potentiale der beiden Rollen. Zur Berechnung der letzteren wendet Maxwell dieselbe Formel an, wie zur Berechnung des Potentials einer Rolle auf sich selbst, und zwar in folgender Weise. Er denkt sich auch den Zwischenraum der beiden Rollen mit Drahtwindungen ausgefüllt in derselben Art, wie sie in den Rollen vertheilt sind. Der Zwischenraum mit den beiden Rollen zusammen bildet nun eine grosse Rolle, deren Potentiale auf sich selbst gerechnet werden kann. Ebenso bildet der Zwischenraum mit jeder der Rollen zusammen eine Rolle, deren Potential wieder gerechnet werden kann. Aus diesen Potentialen und aus denen der einzelnen gegebenen Rollen auf sich selbst lässt sich das Potential der einen Rolle auf die zweite gegebene Rolle ableiten. Die dazu nöthigen Rechnungen sind, wie leicht zu ersehen, sehr weitläufig, namentlich wenn sie ohne Zuhülfenahme einer Tafel ausgeführt werden müssen.

Stehen die beiden Rollen einander sehr nahe, so ist bis jetzt kein anderer Weg zur Berechnung des gegenseitigen

Potentials derselben gegeben. Für den Fall, dass sie weit voneinander abstehen, kann man eine von Niven berechnete Tabelle benutzen, welche der zweiten Auflage von Maxwell's Treatise on Electricity und auch der deutschen Uebersetzung dieses Werkes beigegeben ist. Die unmittelbare Anwendung dieser Tabelle beruht jedoch auf der Voraussetzung, dass man alle Windungen einer Rolle in ihrer mittleren Windung concentrirt annehmen darf, eine Voraussetzung, die bei einem rechteckigen Querschnitte der Ringe um so weniger zulässig ist, je näher die beiden Rollen einander stehen.

Wenn die Mittelpunkte der Querschnitte der beiden Rollen in einem Abstände sich befinden, welcher grösser ist als die Diagonale eines Querschnittes, wie dies bei den bisher angewandten Inductoren der Fall war, dann kann die Berechnung noch auf eine andere rasch zum Ziele führende Weise geschehen. Es lässt sich dann das Potential der beiden Rollen in eine Reihe entwickeln, welche nach den Potenzen der Verhältnisse der Breite und Höhe der Querschnitte zum Abstände ihrer Mittelpunkte fortschreitet und rasch convergirt.

Das gegenseitige Potential Q zweier Rollen von gleichem Radius a und gleicher Windungszahl n ist durch:

$$Q = 4\pi a n^2 \cdot z$$

bestimmt, worin z eine reine Zahl bedeutet. Bezeichnet man wieder mit b die Breite und mit c die Höhe des rechteckigen Ringquerschnittes und mit d den Abstand der beiden Mittelpunkte der Rollen, so gibt die Formel:

$$z_1 = \log \frac{8a}{d} - 2 + \frac{b^2 - c^2}{12d^2} + \frac{2b^4 + 2c^4 - 5b^2c^2}{120d^4} \\ + \frac{3b^6 - 7b^4c^2 + 7b^2c^4 - 3c^6}{504d^6},$$

einen ersten Näherungswerth von z , bei dessen Ableitung die Quadrate der Verhältnisse von b , c und d zu a sowie die höheren Potenzen derselben weggelassen wurden. Werden die Quadrate von b/a und c/a und von d/a auch noch die vierten Potenzen bei der Entwicklung beibehalten, so geben diese Glieder eine zu z_1 hinzukommende Ergänzung z_2 , von folgender Form:

$$z_2 = \left(\log \frac{8a}{d} - 2 \right) \left(\frac{3b^2 + c^2 + 18d^2}{96a^2} - \frac{15d^4}{1024a^4} \right) \\ + \frac{7b^2 + 23c^2 + 60d^2}{192a^2} - \frac{29d^4}{2048a^4}.$$

Das gegenseitige Potential zweier Rollen ist die Summe der gegenseitigen Potentiale ihrer einzelnen Windungen, das Potential einer Rolle auf sich selbst ist die Summe der Potentiale der einzelnen Windungen auf sich selbst und der gegenseitigen Potentiale dieser Windungen. Bei der Ableitung der mitgetheilten Formeln sind die vorzunehmenden Summirungen durch Integrationen über die Querschnitte der von den Windungen erfüllten Räume ersetzt worden. Bei dieser Art der Rechnung ist also eigentlich vorausgesetzt, dass die Windungen diese Räume continuirlich erfüllen, dass keine nichtleitenden Zwischenräume vorhanden sind. Letzteres ist nicht der Fall, wenn, wie gewöhnlich, die Drähte einen kreisförmigen Querschnitt haben und ausserdem von einer isolirenden Hülle umgeben sind. Die nach den mitgetheilten Formeln berechneten Werthe der Potentiale bedürfen daher noch einer Correction wegen der discontinuirlichen Vertheilung der Windungen. Diese Correction ist sehr klein, wenn es sich um gegenseitige Potentiale zweier Rollen handelt, sie ist beträchtlicher für das Potential einer Rolle auf sich selbst. Wie diese Correction für den Fall, dass die Windungen in der Rolle gleichförmig vertheilt sind, näherungsweise berechnet werden kann, ist schon von Maxwell angegeben worden, nur ist das von ihm gefundene Resultat nicht richtig. Hat die Rolle n Windungen, ist ihr mittlerer Radius a , A der Durchmesser des umspannenen, δ der Durchmesser des nackten Drahtes, so ist der Inductionscoefficient P der Rolle grösser als der nach der oben mitgetheilten Formel berechnete, und zwar um den Betrag:

$$4\pi an \left(\log \frac{A}{\delta} + 0,15494 \right).$$

Maxwell gibt statt 0,15494 die Zahl 0,11835 an.

Diese Correction wird um so grösser, je dicker die isolirende Schichte ist. Sie wächst mit der Anzahl der Win-

dungen im geraden Verhältniss. Da aber der Hauptwerth des Inductionscoefficienten mit dieser Anzahl im quadratischen Verhältniss zunimmt, so wird der relative Einfluss dieser Correction mit wachsender Zahl der Windungen immer kleiner. Für die angeführten Inductoren ist ihr Werth so klein, dass sie bei der Vergleichung von Beobachtung und Rechnung ausser Betracht bleiben kann.

Auf den von H. Weber construirten Inductor ist diese Formel jedoch nicht anwendbar. Die Correction, welche an dem für diesen Inductor berechneten Werthe von P angebracht werden muss, ist viel grösser, als sie nach dieser Formel gefunden wird. Der Grund davon liegt in der ungleichförmigen Vertheilung der Windungen. Man erhält bei einer solchen Anordnung der Windungen einen genaueren Werth von P , wenn man die Breite des Ringquerschnittes um die halbe Dicke des Windungsdrahtes kleiner annimmt. Dadurch wird annähernd der Einfluss der leeren Räume, welche die um eine Windung weniger enthaltenden Lagen übrig lassen, eliminirt. Auf diese Weise erhält man zu dem oben als berechnet angegebenen Werthe $P = 206\,200$ eine Correction von 1500, sodass der Werth von P auf 207 700 erhöht und dadurch dem beobachteten Werth noch etwas näher gerückt wird.

VII. *Notiz zur Berechnung des Potentials von Rollen; von J. Fröhlich in Budapest.*

I. In einer kürzlich publicirten Arbeit erwähnt B. Weinstein¹⁾ gelegentlich der Berechnung des Potentials zweier Rollen aufeinander auch eine von mir nach Maxwell's Methode angestellte Rechnung²⁾; er bemerkt, dass ihm der dort p. 126 gegebene Werth von $\partial^2 M_0 / \partial R^2$ nicht exact scheine, und dass er denselben mit der Maxwell'schen Bedingungs-
gleichung:

1) Weinstein, Wied. Ann. 21. p. 350. 1884.

2) Fröhlich, Wied. Ann. 19. p. 126. 1883.

$$(1) \quad \frac{\partial^2 M_0}{\partial h^2} + \frac{\partial^2 M_0}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial M_0}{\partial R} = 0$$

nicht vereinigen könne.

Durch diese Bemerkung aufmerksam gemacht, wiederholte ich mehrfach die auf M bezüglichen Rechnungen und fand, dass in der That im Ausdrücke $\partial^2 M_0 / \partial R^2$ ein Vorzeichen verwechselt sei. Um zu zeigen, dass nur dieses Uebersehen vorhanden war, erlaube ich mir, die in (1) auftretenden drei Differentialquotienten, wie sie, mit Ausnahme von $\partial M_0 / \partial R$, auf p. 125 stehen, hier zuschreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_0}{\partial R^2} &= -\frac{\pi c}{R} \left\{ \frac{E(c)}{1-c^2} \left[1 - \frac{h^2}{4R^2} (4-8c^2+3c^4) - \frac{h^4}{16R^4} \cdot \frac{c^2}{1-c^2} (-4+7c^2-c^4) \right] \right. \\ &\quad \left. - F(c) \left[1 - \frac{h^2}{4R^2} (4-6c^2) + \frac{h^4}{16R^4} \cdot \frac{c^2}{1-c^2} (4-5c^2) \right] \right\} \\ \frac{\partial^2 M_0}{\partial h^2} &= -\frac{\pi c}{R(1-c^2)} \left\{ E(c) \left[(2-c^2) - \frac{h^2}{4R^2} \cdot \frac{c^2}{1-c^2} 2(1-c^2+c^4) \right] \right. \\ &\quad \left. - F(c) \left[2(1-c^2) - \frac{h^2}{4R^2} c^2 (2-c^2) \right] \right\} \\ \frac{\partial M_0}{\partial R} &= \frac{2\pi c}{1-c^2} \left\{ E(c) \left[-2 \cdot \frac{1-c^2}{c^2} + \frac{h^2}{4R^2} (2-c^2) \right] \right. \\ &\quad \left. + F(c) \left[\frac{1}{c^2} (2-3c^2+c^4) - \frac{h^2}{4R^2} 2(1-c^2) \right] \right\}. \end{aligned}$$

An der citirten Stelle hat in $\partial^2 M_0 / \partial R^2$ das letzte der mit $E(c)$ multiplicirten Glieder vor dem Factor $h^4/16R^4$ ein positives Vorzeichen, während das negative das richtige ist.

Nun ist:

$$c^2 = \frac{4R^2}{4R^2+h^2} \quad \text{und} \quad \frac{h^2}{4R^2} = \frac{1-c^2}{c^2};$$

substituirt man dies und reducirt, so wird sofort:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_0}{\partial R^2} &= + \frac{\pi c}{R(1-c^2)} \{ E(c) (-2+3c^2-2c^4) + F(c) (1-c^2)(2-c^2) \} \\ \frac{\partial^2 M_0}{\partial h^2} &= + \frac{\pi c}{R(1-c^2)} \{ E(c) c^2 (-1+2c^2) + F(c) (1-c^2) c^2 \} \\ -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial M_0}{\partial R} &= -\frac{\pi c}{R(1-c^2)} \{ E(c) 2(-1+c^2) + F(c) (1-c^2) 2 \}. \end{aligned}$$

Die rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen können noch vereinfacht werden.

Ein Blick auf diese Ausdrücke lehrt, dass deren Summe der Maxwell'schen Bedingungsgleichung (1) vollkommen genügt.

Anmerkung. Der Vollständigkeit wegen füge ich hinzu, dass die von Rowland¹⁾ gegebenen Ausdrücke:

$$\frac{\partial^2 M_0}{\partial A^2} = -\frac{\pi}{A} \left\{ \frac{E(c)}{2A(1-c^2)} \left(2Ac + \frac{4b^2}{8A} \cdot \frac{c^3}{1-c^2} (1-3c^2+2c^4) \right. \right. \\ \left. \left. - F(c) \left(c + \frac{b^2}{4A^2} c^3 \right) \right) \right\},$$

$$\frac{\partial^2 M_0}{\partial b^2} = \frac{\pi c}{A(1-c^2)} \left\{ F(c) \left(2(1-c^2) - \frac{b^2 c^2}{4A^2} (2-c^2) \right) \right. \\ \left. - E(c) \left(2-c^2 - b^2 c^2 \frac{1-c^2+c^4}{2A^2(1-c^2)} \right) \right\},$$

wenn man darin $b^2/4A^2 = (1-c^2)/c^2$ setzt, mit den obigen völlig übereinstimmen.

II. Hat man den Mittelwerth $\bar{P}$ einer Function P von vier unabhängigen Variabeln, für zwei Rechtecke $\xi_{10} \eta_{10}$, $\xi_{20} \eta_{20}$ zu ermitteln, und sind $x_1, y_1; x_2, y_2$, die Coordinaten der Mittelpunkte, $x_1 + \xi_1, y_1 + \eta_1; x_2 + \xi_2, y_2 + \eta_2$ die eines beliebigen Punktes ihrer Flächen, wobei $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2$ variabel sind, und $\xi_{10}, \eta_{10}; \xi_{20}, \eta_{20}$ die Seitenlängen der Rechtecke bedeuten, so gilt nach Maxwell:

$$(a) \quad \bar{P} = P_0 + \frac{1}{24} \left\{ \xi_{10}^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_1^2} + \dots + \eta_{20}^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial y_2^2} \right\} + \dots$$

Genügt eine Genauigkeit bis einschliesslich der Glieder dritten Grades, so kann leicht bewiesen werden, dass dann der Werth von $\bar{P}$ auch ohne Reihenentwicklung und ohne directe Integration berechnet werden kann. Es ist $P_0 = f(x_1, y_1, x_2, y_2)$, ferner führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$P_{++++} = f(x_1 + \xi_1, y_1 + \eta_1, x_2 + \xi_2, y_2 + \eta_2),$$

$$P_{----} = f(x_1 - \xi_1, y_1 - \eta_1, x_2 - \xi_2, y_2 - \eta_2),$$

sodass die dem P beigelegten Indices zugleich das Vorzeichen der Zuwachse $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ angeben. Entwickelt man diese Functionen nach der gewöhnlichen Taylor'schen Reihe, so findet man:

1) Rowland, Sill. Journ. 15. p. 331. 1878.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(P_{++++} + P_{----}) = P_0 + \frac{1}{2} \left(\xi_1^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_1^2} + \dots + \eta_3^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial y_3^2} \right) \\
& + \left(\xi_1 \eta_1 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_1 \partial y_1} + \xi_1 \xi_2 + \xi_1 \eta_2 + \eta_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_2 \partial y_2} \right) + \dots \\
& \frac{1}{2}(P_{++--} + P_{--++}) = P_0 + \frac{1}{2} \left(\xi_1^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_1^2} + \dots + \eta_2^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial y_2^2} \right) \\
& + \left(\xi_1 \eta_1 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_1 \partial y_1} - \xi_1 \xi_2 - \xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2 - \eta_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_2 \partial y_2} \right) + \dots \\
& \frac{1}{2}(P_{+-+-} + P_{-+-+}) = P_0 + \frac{1}{2} \left(\xi_1^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_1^2} + \dots + \eta_2^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial y_2^2} \right) \\
& + \left(-\xi_1 \eta_1 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_1 \partial y_1} + \xi_1 \xi_2 - \xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_2 \partial y_2} \right) + \dots \\
& \frac{1}{2}(P_{+--+} + P_{-++-}) = P_0 + \frac{1}{2} \left(\xi_1^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_1^2} + \dots + \eta_2^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial y_2^2} \right) \\
& + \left(-\xi_1 \eta_1 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_1 \partial y_1} - \xi_1 \xi_2 + \xi_1 \eta_2 + \eta_1 \xi_2 - \eta_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_2 \partial y_2} \right) + \dots
\end{aligned}$$

Man bemerkt, dass die Summe dieser Ausdrücke nur die rein quadratischen Glieder enthält. Wir setzen nun an die Stelle der bisher darin beliebigen $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ die Werthe:

$$\frac{\xi_{10}}{2\sqrt{3}}, \quad \frac{\eta_{10}}{2\sqrt{3}}, \quad \frac{\xi_{20}}{2\sqrt{3}}, \quad \frac{\eta_{20}}{2\sqrt{3}}$$

in die Functionen P_{++++} u. s. f. und finden sogleich:

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{8}(P_{++++} + P_{----} + P_{++--} + P_{--++} \\ &+ P_{+-+-} + P_{-+-+} + P_{+--+} + P_{-++-}) \\ &= P_0 + \frac{1}{24} \left\{ \xi_{10}^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_1^2} + \dots + \eta_{20}^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial y_2^2} \right\}, \end{aligned} \right.$$

also den gesuchten Mittelwerth als arithmetisches Mittel der acht Functionen P von gewissen, durch die Seitenlängen der Rechtecke bestimmten Argumenten.

Für den Fall dreier Variablen lässt sich der Ausdruck (b) nicht vereinfachen.

Sind nur zwei Variable vorhanden, so bleibt aus (b):

$$(c) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{4}(P_{+++} + P_{--+} + P_{+-+} + P_{-+-}) \\ &= P_0 + \frac{1}{24} \left\{ \xi_0^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + \eta_0^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial y^2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Gleichung (b) lässt sich z. B. zur Berechnung des Potentials zweier conaxialer Rollen verschiedener Dimension aufeinander benutzen; Gleichung (c) für Potentiale einzelner Rollen.

Wenn auch diese Formeln nicht so bequem scheinen, wie die der Reihenentwicklung, so dürften sie doch ein sehr brauchbares Mittel zur Controle bieten.

Budapest, im März 1884.

VIII. *Ueber den Magnetismus organischer Körper; von S. Wleügel und S. Henrichsen.*

(Auszug aus einem Vortrage gehalten in der Ges. der Wiss. zu Christiania.)

Die Verfasser haben einige Verbindungen der Alkoholradicale C_nH_{2n+1} auf ihren Magnetismus geprüft. Die untersuchten Körper, die theils von den Verfassern selbst dargestellt, theils von Hrn. Kahlbaum bezogen sind, wurden alle vor ihrer Verwendung sorgfältig gereinigt. Behufs der Messungen wurden sie in ein kleines Glasgefäß gefüllt. Dasselbe hatte eine längliche horizontale Form und wurde bifilar an Coconfäden so aufgehängt, dass es zwischen den zugespitzten Halbankern eines grossen hufeisenförmigen Electromagnetes schwebte. Eine Kette aus 16—18 Bunsen'schen Elementen lieferte den Strom. Der in den Körpern erregte Magnetismus wurde mittelst einer Torsionsmethode mit Spiegelablesung, ähnlich der von Hrn. G. Wiedemann früher benutzten, gemessen. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt; es bedeutet hier m den specifischen Magnetismus, derjenige des Wassers gleich -100 gesetzt, μ den Molecularmagnetismus und q das Moleculargewicht. Das negative Vorzeichen gibt Diamagnetismus an. Der Magnetismus der verdrängten Luft wurde dabei berücksichtigt.

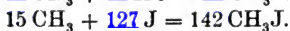
Die hier angeführten Zahlen sind insofern nur vorläufig als richtig anzusehen, als die Verfasser die Reinheit der verwandten Substanzen noch einmal prüfen wollen. Indessen

sind sie genügend zuverlässig, um daraus einige interessante Schlüsse ziehen zu können.

	<i>m</i>	<i>μ</i>	<i>γ</i>
Methylalkohol	<u>-94,40</u>	-3021	<u>32</u>
Methyljodid	<u>58,01</u>	8238	<u>142</u>
Methylsulfid	<u>102,34</u>	6345	<u>62</u>
Methylacetat	<u>80,90</u>	5987	<u>74</u>
Aethylalkohol	<u>101,09</u>	4759	<u>46</u>
Aethyljodid	<u>61,96</u>	9665	<u>156</u>
Aethylbromid	<u>68,90</u>	7511	<u>109</u>
Aethylsulfid	<u>105,48</u>	9493	<u>90</u>
Propylalkohol	<u>107,51</u>	6451	<u>60</u>
Isopropylalkohol . . .	<u>107,51</u>	6451	<u>60</u>
Propyljodid	<u>66,65</u>	11831	<u>170</u>
Propylbromid	<u>74,48</u>	9161	<u>123</u>
Propylchlorid	<u>100,08</u>	7857	<u>78,5</u>
Propylsulfid	<u>107,84</u>	12724	<u>118</u>
Isobutylalkohol . . .	<u>109,80</u>	8125	<u>74</u>
Isobutylacetat	<u>96,07</u>	11167	<u>116</u>
Wasser	<u>100</u>	1800	<u>18</u>

1. Bei der Betrachtung der Reihe μ sieht man leicht, dass ein jedes CH_3 , das in die Verbindung eingeführt wird, einen Zuwachs an Molecularmagnetismus hervorbringt, der beinahe constant, und dessen Mittelwerth -1640 ist.

2. Lässt man die chemische Formel eines Körpers zugleich seinen specifischen Magnetismus bedeuten, so kann man die folgenden Gleichungen aufstellen:



Der Molecularmagnetismus des ganzen Körpers ist also gleich der Summe der Partialmagnetismen des Alkoholradicals und des übrigen Theils der Verbindung.

3. In diesen Verbindungen zeigen HO, J, Br und S denselben specifischen Magnetismus, dessen Mittelwerth -44,3 ist.

4. Dagegen scheint sonderbarer Weise Cl einen anderen specifischen Magnetismus von ungefähr -61 zu besitzen; doch ist zu bemerken, dass nur ein einziges Chlorid untersucht wurde. Interessant ist es indessen, dass die zwei Acetate für das Radical der Essigsäure ungefähr denselben Magnetismus angeben wie oben für Cl gefunden, nämlich im Mittel -63 . Möglicherweise gibt es also eine Gruppe von Radicalen mit dem specifischen Magnetismus ca. -62 .

5. Propylalkohol und Isopropylalkohol zeigen genau denselben Werth, und Isobutylalkohol zeigt den Werth, den man für Butylalkohol aus dem Gesetze 1) berechnet. Die Alkoholradicale besitzen also in ihren Isomerien, insoweit sie schon untersucht sind, denselben Magnetismus.

6. Der Magnetismus der Alkoholradicale für sich setzt sich aus den Atommagnetismen der H und der C zusammen, so dass man, ähnlich wie in 1), folgende Gleichungen aufstellen kann:

$$\begin{aligned} 15 \text{CH}_3 &= 12 \text{C} + 3 \text{H} \\ 29 \text{C}_2\text{H}_5 &= 24 \text{C} + 5 \text{H} \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Berechnet man hieraus C und H, findet man für H den ziemlich grossen Werth $-780,5$, während C nur $-5,6$ ist. Die letzte Zahl ist gegen -780 numerisch so klein, dass man ihr keine Bedeutung beilegen kann. Die Gleichungen werden auch ebenso gut befriedigt durch $\text{C} = 0$ und $\text{H} = -807,6$.

Die Untersuchungen werden fortgesetzt, und speciell wird der Einfluss der Temperatur in das Bereich der Messungen hineingezogen werden.

IX. Ueber die Electricität der Flamme. Eine Entgegnung von J. Elster und H. Geitel.

Vor kurzem¹⁾ erschien in diesen Annalen eine Abhandlung: „Ueber das Verhalten der Flamme in electrischer Be-

1) J. Kollert, Wied. Ann. 21. p. 244. 1884.

ziehung“ von Hrn. J. Kollert, die als eine Fortsetzung der älteren Hankel'schen, den gleichen Gegenstand betreffenden Experimentaluntersuchung anzusehen ist. Verfasser steht dabei ganz auf dem Boden der Hankel'schen Anschauung über die electricischen Eigenschaften der Flamme und berührt unsere erste¹⁾, den gleichen Gegenstand betreffende Abhandlung nur in zwei unwesentlichen Punkten, während er auf unsere zweite Arbeit²⁾: „Ueber Electricitätserregung beim Contact von Gasen und glühenden Körpern“, nicht Bezug nimmt. Da Hr. Kollert diese letzte Arbeit, in welcher wir nachgewiesen zu haben glauben, dass die sogenannte Flammenelectricität nur ein ganz specieller Fall einer viel allgemeineren Naturerscheinung ist, übersehen zu haben scheint, so würde es zu weit führen, die von ihm entwickelten Anschauungen im einzelnen nochmals zu widerlegen; doch sei es gestattet, folgende Punkte hervorzuheben.

Was zunächst die Längspolarisation der Flamme betrifft, so wollten wir zeigen, dass eine solche, d. h. eine electricische Differenz zwischen zwei senkrecht zur Flammenaxe verlaufenden Querschnitten an und für sich nicht existirt. Hierfür schien uns namentlich der Umstand zu sprechen, dass³⁾, „man es durch passende Verschiebung der isolirten Electrode innerhalb eines Querschnittes leicht dahin bringen kann, dass das Potential innerhalb der Flamme (also in den verschiedensten Höhen über der Brennermündung) constant erscheint.“ Diese Thatfache wird durch die Versuche des Hrn. Kollert⁴⁾, der obigen Satz offenbar missverstanden hat, nicht widerlegt. Hr. Kollert scheint das Wort „kann“ übersehen zu haben, dessen Fehlen allerdings die Richtigkeit der von uns ausgesprochenen Behauptung zerstören würde. Gerade durch die graphische Darstellung der electricischen Erregung der Electrode in der Flamme, wie sie Hr. Kollert angibt, lässt sich sehr anschaulich machen, dass im allgemeinen zu einem Punkte von bestimmtem Potential-

1) Elster u. Geitel, Wied. Ann. **16**. p. 193. 1882. I. Abh.

2) Elster u. Geitel, Wied. Ann. **19**. p. 588. 1883. II. Abh.

3) Vgl. I. Abh. I. c. p. 196.

4) Kollert, I. c. p. 261.

werthe in einem gegebenen Querschnitt der Flamme ein Punkt mit gleichem Potential in einem anderen gegebenen Querschnitt gefunden werden kann. Dass man den „Wechsel der Polarität“ nach den Messungen des Hrn. Kollert, solange sich beide Electroden in der Flamme befinden, ohne Zuhülfenahme der umhüllenden Luftschicht erklären kann, ist klar. Will man jedoch einen electrischen Gegensatz zwischen der äusseren, umhüllenden, nicht glühenden Luftschicht zu den glühenden Gastheilchen oder glühenden festen Körpern in der Flamme nicht zugeben, so stösst man auf Widersprüche der bedenklichsten Art in allen den Fällen, in welchen sich die eine Electrode ganz ausserhalb der Flamme befindet.

Obgleich wir sowohl in unserer ersten, wie auch in der zweiten Abhandlung, unabhängig von der Flamme dargethan haben, dass Gase in Contact mit glühenden Körpern positiv electrisch werden, und dass demnach auch die die Flamme umhüllende Luftschicht sich gegen das Innere ebenfalls positiv verhalten muss, so schien es uns doch von Wichtigkeit, einem Einwande zu begegnen, der möglicherweise auf Grund eines Versuches des Hrn. Kollert gegen unsere Versuche erhoben werden könnte. Hr. Kollert verbindet stets die Brennermündung mit dem Electrometer und führt seitlich einen zur Erde abgeleiteten Draht ein. Sobald letzterer genügend weit aus der Flamme entfernt ist, muss sich eine etwaige Ladung der Zimmerluft auf die Flamme übertragen und den Ausschlag des Electrometers modificiren. Mit dieser Vermuthung stimmen die Ergebnisse¹⁾ des Hrn. Kollert überein. Man könnte nun in analoger Weise muthmassen, dass auch bei unserer Versuchsanordnung, d. h. bei abgeleitetem Brennerfuss ein der Flamme seitlich genäherter, isolirter Draht von dieser letzteren einen Theil der Electricität der Zimmerluft zugeführt erhielte, sodass also die stark positive Ladung, die eine solche seitliche Electrode zeigt, nur auf ein positives Luftpotential zurückzuführen wäre. Abgesehen davon, dass bei unseren Jahre

1) Kollert, l. c. p. 265.

lang fortgesetzten Versuchen über Flammenelectricität ein solcher Einfluss durch seine Inconstanz hätte bemerkt werden müssen, lässt sich diese Muthmassung auch durch directe Versuche widerlegen.

Wir electricisirten nämlich die Luft des Laboratoriums mit Hülfe einer Electricirmaschine, auf deren Conductor ein Spiritusflämmchen angebracht war, und zwar ertheilten wir durch je hundert Umdrehungen der Scheibe unmittelbar hintereinander der Luft des Zimmers erst stark positive, dann stark negative Ladung. Das Potential der umhüllenden Luftschicht gegen das Innere der zur Erde abgeleiteten Flamme wurde durch einen in die erstere eingeführten, mit dem Electrometer verbundenen Eisendraht gemessen. Die Ausschläge der Electrometernadel zeigten sich bei dieser Versuchsanordnung durchaus unabhängig von dem electrischen Zustand der Zimmerluft, wie aus folgender Tabelle hervorgeht.

Nr.	Datum	Luft stark	Potential d. Flamme	Daniell	Stellung der Electrode
1.	3. März	+	+50	45,0	tief seitlich, 1 mm vom Flammensaume
2.		—	+51	„	ebenso
3.	4. März	+	+29	45,5	hoch seitlich, 3 mm vom Flammensaume
4.		—	+27		ebenso
5.	5. März	+	+30	45,0	„
6.		—	+30		„
7.	4. März	ganz schwach +	+29	45,0	„

Die Electricität der Luft wurde mit einem Thomson'schen Tropfensammler geprüft; die Ladung der Luft war in den Fällen 1—6 so stark, dass ein Messen mit dem Quadrantenelectrometer nicht möglich war, und betrug daher sicher mehr als 20 Daniells. Die Stellung der Luftpole war in den Versuchen 3 bis 7 genau die gleiche. (Der Apparat blieb von Tag zu Tag unberührt stehen.) Obwohl die Luft des Zimmers bald positiv, bald negativ war, und zwar bis zu einem Potential, wie es in Praxi nie vorkommt, ergibt sich

für das Potential der Flamme immer derselbe Werth, nämlich im Mittel 0,65 Daniell. Auch bei ganz schwacher Electricisirung der Luft, Beobachtung Nr. 7, ergibt sich ungefähr derselbe Werth.

Das eigenthümliche Verhalten solcher seitlichen Electroden darf also nicht der Luftpotelectricität zugeschrieben werden. Dasselbe bildet vielmehr eines der Hauptmomente, die bei der Untersuchung der Flammenelectricität in Betracht kommen. Es ist diese positive Ladung von derselben Natur, wie sie auftritt in dem relativ kühlen Luftstrome, der von einem glühenden Körper aufsteigt.

Um Missverständnissen vorzubeugen, sei bemerkt, dass die Versuche Kollert's¹⁾, in denen er aus der Differenz der Potentiale bei isolirter und dann abgeleiteter Flamme das Luftpotential berechnet, nicht beanstandet werden sollen. Dass sich das Luftpotential auf diese Weise angenähert bestimmen lässt, ist klar und steht mit den oben angeführten Versuchen durchaus nicht im Widerspruche.

In der Arbeit des Hrn. Kollert findet sich überhaupt kein einziger Versuch, der mit unserer, in unserer zweiten Abhandlung ausgesprochenen Theorie unvereinbar wäre; im Gegentheil bedürfen wir durchaus nicht der vielfachen speciellen Annahmen, die derselbe²⁾ über die Beschaffenheit der Flammengase einführt.

Für uns ist die Flamme nichts anderes, als ein Strom heissen Gases, der die in ihn eingeführten, glühenden Körper oder die in ihm enthaltenen, suspendirten glühenden Partikelchen negativ electricisirt. Sind die die Flamme ableitenden Electroden nicht glühende Metalle, so wird die Erscheinung dadurch bedeutend complicirt, dass der heisse Luftstrom alsdann die Electricität der sich auf den Metallen stets bildenden, im eigentlichen Sinne electrolytisch erregenden Oberflächenschichten fortführt, sodass am Electrometer nur die Summe oder Differenz der Wirkung gemessen werden kann.

1) Kollert, l. c. p. 265.

2) Kollert, l. c. p. 270 ff.

Zum Schluss sei es noch gestattet, zu bemerken, dass es nach unserer Meinung durchaus nicht zur Klärung der Begriffe beiträgt, wenn man von „thermoelectrischer“ oder „electrolytischer“ Erregung von Metallen seitens der Flammengase spricht. Es ist, soviel wir wissen, bislang noch nicht gezeigt worden, dass die zwischen zwei in der Flamme befindlichen Drähten aufsteigende heisse Gasschicht nach Analogie einer die Metalle verbindenden Löthmasse aufzufassen ist. Woher kommt ferner, selbst die Zulässigkeit dieser Annahme zugegeben, die so bedeutende Potentialdifferenz, die ihrem Betrage nach über die im eigentlichen Sinne thermoelectrische Erregung soweit hinausgeht?

Auch von einer „electrolytischen“ Wirkung der Flammengase zu sprechen, ist doch wohl nicht statthaft, solange nicht eine Electrolyse gasförmiger Körper experimentell gezeigt ist. Aber selbst einfache Gase werden nach unseren Versuchen¹⁾ im Contact mit einem glühenden Körper positiv electrisch, und zwar derartig dauernd electrisch, dass ein aus einem glühenden Metallrohr austretender Gasstrom selbst in beträchtlicher Entfernung von der Ausströmungsöffnung noch starke electrische Ladung zeigt.²⁾

Es sei deshalb nochmals betont, dass die von uns gefundene Electricitätserregung der Gase an glühenden Körpern eine ganz eigenartige ist. Sie ist aufzufassen als eine Wirkung des Contactes oder, was dasselbe, der Reibung.

So schätzenswerth die Arbeit des Hrn. Kollert in Bezug auf viele Einzelheiten ist, so müssen wir doch an der von uns in unserer Abhandlung aufgestellten, hier in kurzen Zügen recapitulirten Theorie festhalten, welche die Flammenelectricität als speciellen Fall einer bei weitem allgemeineren Naturerscheinung auffasst und das Verhalten der Flamme in electrischer Beziehung einheitlich erklärt.

Wolfenbüttel, im März 1884.

1) Elster u. Geitel, l. c. p. 599. Abh. II.

2) Elster u. Geitel, l. c. p. 602. Abh. II.

X. Ueber Fresnel's Wellenlängenmessungen; von H. Merczyng.

Die bahnbrechenden theoretischen Abhandlungen Fresnel's haben bis jetzt ihre Bedeutung in der Wissenschaft bewahrt. Obgleich man dasselbe schon nicht von allen seinen experimentalen Arbeiten behaupten kann, was auch beim Vergleich unserer jetzigen und damaligen instrumentalen Hilfsmittel sehr natürlich erscheint, so haben doch die Zahlenresultate Fresnel's für die Wellenlänge, welche noch bis jetzt vielfach (u. a. in Lehrbüchern wie Verdet) angeführt werden, für uns ein hohes Interesse, um so mehr, da sie historisch den ersten Versuch bilden, die Länge der Lichtwellen zu bestimmen.

In betreff dieser Fresnel'schen Wellenlängenbestimmung herrscht aber jetzt noch in der Wissenschaft eine falsche Ansicht, deren Urheber hauptsächlich Verdet ist. Man nimmt nämlich an, dass Fresnel seine einzige unmittelbare Wellenlängenbestimmung, die er überhaupt vollführt, die des rothen Lichtes, ($\lambda = 638$ Milliontel Millimeter) mit Hülfe des Versuches mit den interferirenden Strahlen vermittelt zweier Spiegel, die gegeneinander sehr schwach geneigt sind, ausgeführt hatte. Diese Ansicht ist, wie gesagt, falsch, was wir in Folgendem glauben beweisen zu können. Die Wellenlängenbestimmung des rothen Lichtes ($\lambda = 638$ Milliontel Millimeter), die Fresnel in allen seinen theoretischen Formeln in Anwendung brachte, wurde nicht vermittelt der Interferenzspiegel, sondern mittelst der Diffractionsfransenbeobachtungen beim Durchgange des Lichtes durch sehr schmale Oeffnungen in einem undurchsichtigen Schirm, gemacht.

Wir wollen noch vorerst bemerken, dass der bis jetzt bestehende Irrthum in betreff der Fresnel'schen Wellenlängenbestimmung früher noch grösser war; man behauptete nämlich, dass Fresnel alle Wellenlängen¹⁾, die er in seinem Werke anführt, selbst unmittelbar und vermittelt der

1) Aug. Fresnel, *Oeuvres complètes* 2. p. 24. 1869. Paris.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXII.

Interferenzspiegel bestimmte. Erst Drobisch¹⁾ und nach ihm Verdet²⁾ zeigten, dass Fresnel unmittelbar nur die Wellenlänge des rothen Lichtes ($\lambda = 638$ Milliontel Millimeter) bestimmte, die übrigen Zahlen aber, im Einklang mit seiner Theorie, durch Multiplication der Newton'schen Zahlen mit 4 für den Werth einer bei dessen Ringen beobachteten Grösse³⁾ erhielt. Verdet⁴⁾ aber und Drobisch blieben der Ansicht, dass die einzige unmittelbare Fresnel'sche und chronologisch überhaupt in der Wissenschaft erste Wellenlängenbestimmung vermittelst der Interferenzspiegel vollführt wurde. Bei dem Ansehen, das Verdet genoss, fand diese Ansicht in alle Lehrbücher (so unter anderen von Wüllner) Eingang. Sie ist aber mit der Wahrheit nicht im Einklang.

Die erste Kunde von dem classischen Interferenzversuche erhielt die gelehrte Welt durch Arago's: „Remarques sur l'influence mutuelle de deux faisceaux lumineux, qui se croisent sous un très petit angle“. ⁵⁾ Der Spiegelversuch wurde zum ersten mal wahrscheinlich im März 1816 von Fresnel vorgenommen.⁶⁾ Es ist in Arago's Beschreibung nirgends davon die Rede, dass Fresnel vermittelst des Spiegelversuches die Wellenlänge gemessen hätte. Arago bemerkt nur, dass mit Hülfe dieses Versuches Fresnel die Existenz der Interferenzen nachgewiesen hatte („Mr. Fresnel est aussi parvenu . . . à produire des bandes du même genre etc.“). Es ist hier zwar auch die Rede von Anwendung des Versuches bei praktischen Messungen, aber nicht bei Wellenlängenbestimmungen, sondern bei Messung von Aenderungen des Brechungsexponenten der Flüssigkeiten bei verschiedenen Temperaturen.

1) Drobisch, Pogg. Ann. 88. p. 519. 1853.

2) Aug. Fresnel, Oeuvres complètes 2. p. 24. Anmerkung, und Verdet, Optique Physique 1. p. 89.

3) Die Entfernung der Fläche des ersten centralen Ringes von der Fläche des Apparates.

4) Verdet, Opt. Phys. 1. p. 88.

5) Arago, Ann. de Chim. cahier de Mars 1816; zweiter Abdruck A. Fresnel, Oeuv. compl. 1. p. 123.

6) A. Fresnel, Oeuv. compl. 1. p. 123 erste Note.

Die detaillirte Beschreibung des Spiegelversuches selbst, und dann endlich das Entscheidende, die genaue Angabe der Art und Weise, vermittelt welcher Fresnel seine Wellenlänge des rothen Lichtes ($\lambda = 638$ Milliontel Millimeter) bestimmt hatte, finden wir in seinem: „Mémoire couronné sur la diffraction¹⁾, welches der Academie im Frühjahr 1819²⁾ vom Verfasser zugesandt wurde.

Um jeden Zweifel schwinden zu lassen, wollen wir hier in wörtlicher Uebersetzung die Hauptstelle Fresnel's, die sich auf seine Wellenlängenmessungen bezieht beifügen³⁾:

„Die Methode, welche mir anfänglich die zweckmässigste schien („paru“), Wellenlängenmessungen zu bewerkstelligen, war, die Breite der (Interferenz-)Fransen zu messen, welche von zwei sehr wenig zu einander geneigten Spiegeln hervorgerufen werden, indem ich zu derselben Zeit die Entfernung der zwei Abbildungen der Lichtpunkte messen könnte; aber, da die kleinste Krümmung der Spiegel die Genauigkeit der Resultate schädigen konnte, so habe ich vorgezogen, mich der (Diffractions-)Fransen zu bedienen, welche durch eine schmale Oeffnung, mit einer cylindrischen Linse, von der ich früher sprach, verbunden, hervorgehoben werden.“

Diese Stelle ist für mich deutlich genug. Wir erlauben uns noch hier in kurzem anzugeben, auf welche Weise Fresnel bei seiner experimentalen Bestimmung zu Werke gegangen ist. Theoretisch hat er früher nachgewiesen⁴⁾, dass in dem gegebenen Falle der schmalen Oeffnung, wenn λ die gesuchte Wellenlänge, c die Breite der Oeffnung, b ihre Entfernung von dem Schirm ist, auf welchen die Diffractionsfransen projicirt werden, die Entfernung δ_n zwischen n dunklen Linien gleich:

$$(1) \quad \delta_n = n \frac{b\lambda}{c},$$

1) A. Fresnel, Oeuv. compl. 1. p. 227.

2) A. Fresnel, l. c. p. 229.

3) A. Fresnel, l. c. p. 325.

4) A. Fresnel, l. c. p. 273.

In den Oeuv. compl. 1. p. 326 findet sich die Zahlenresultate von fünf experimentellen Bestimmungen der in Formel (1) vorkommenden Werthe, woraus wiederum fünf Werthe für λ erhalten sind. Des historischen Interesses wegen reproduciren wir hier die Tafel im Auszug (δ_n wurde mittelst des Mikrometers bestimmt):

Experiment	m	mm		mm	Milliontel Millim.
A	$b = 1,140$; $c = 2,0$; $n = 6$; $\delta_n = 2,185$;			woraus $\lambda = 639$	
B	1,302	4,00	10	2,075	637
C	1,302	3,00	8	2,222	640
D	2,046	3,00	8	3,466	635
E	2,046	2,00	6	3,922	639.

Als Mittel dieser fünf Resultate schliesst also Fresnel auf den Werth $\lambda = 638$ Milliontel Millimeter.

Wir brauchen natürlich kaum zu bemerken, dass die Abweichungen der verschiedenen Messungen ziemlich gross sind, obgleich sie wohl mit diesen experimentellen Mitteln kaum kleiner sein könnten. Man kann also hierin Fresnel's Worten nicht beipflichten: „On voit, que ces resultats s'accordent assez bien entre eux“.

Wir müssen hier nur noch die Worte Fresnel's anführen, mit denen er seine ganze Wellenlängenuntersuchung schliesst: „Das Mittel dieser Messungen, 638 Milliontel Millimeter, ist die Wellenlänge, welche ich angenommen, und welcher ich mich in allen meinen Rechnungen bedient habe, um die Theorie mit der Erfahrung zu vergleichen.¹⁾“

Und das war auch der Zweck, wozu Fresnel einer möglichst genauen Bestimmung der Wellenlänge in seiner theoretischen Abhandlung bedurfte. Der Spiegelversuch, von dem gleich weiter²⁾ die Rede ist, sollte nur und allein dazu dienen, um auf Grund des jetzt bekannten Werthes der Wellenlänge die Theorie experimentell zu prüfen. Das sehen wir unmittelbar aus der Beschreibung des Versuches selbst.

1) A. Fresnel, Oeuv. compl. 1. p. 326.

2) A. Fresnel, l. c. p. 327.

Fresnel spricht sich ganz deutlich auch in dieser Hinsicht aus: er prüfte mit dem auf die frühere Weise bestimmten Werthe λ , die Interferenzfransen die er beim Spiegelversuche bemerkte. Theoretisch bediente er sich bei den Spiegelversuchen derselben Formel wie früher, nur mit dem Unterschied, dass in $\delta_n = n b \lambda / c$, c (früher Breite der Oeffnung) jetzt analog der Entfernung der virtuellen Abbildungen des Lichtpunktes in beiden Spiegeln war. Mit dem Spiegelversuche machte Fresnel zwei Messungen, deren Zahlenresultate wir auf p. 329 (Oeuv. compl.) finden.

Hier geben wir einen Auszug auch aus dieser Tafel:
 A. Experimentell gemessen $b = 7,016$ m, $c = 12,16$ m, daraus mit Hülfe des früher bestimmten Werthes $\lambda = 638$ Milliontel Millim. berechnet $\delta_{11} = 11 b \lambda / c = 4,05$ mm; experimentell gemessen 4,06 mm. Differenz $- 0,01$ mm.
 B. Experimentell gemessen $b = 6,959$ m; $c = 14,65$ m, daraus berechnet $\delta_{11} = 3,33$; experimentell bestimmt $\delta_{11} = 3,35$ mm; Differenz $= - 0,02$ mm.

Wir ersehen also hieraus, dass der Spiegelversuch von Fresnel unbedingt nicht zur Bestimmung der Wellenlängen überhaupt, und speciell der von $\lambda = 638$ Milliontel Millimeter gedient hatte. Selbst wenn wir das ausführten, was Fresnel nicht ausführen wollte, das heisst, wenn wir aus den experimentellen Daten seiner beiden Spiegelversuche wiederum λ bestimmen wollten, so erhielten wir die Werthe für A, $\lambda = 639,7$; für B, $\lambda = 641,1$; also einen anderen Werth als den von Fresnel allgemein angenommen $\lambda = 638$ Milliontel Millimeter.

Woraus aber entsprang der Irrthum, der sich so lange in der Wissenschaft gehalten hat? Die Frage ist nicht so schwer zu beantworten, wie es scheinen möchte. Den Schlüssel dazu finden wir in Fresnel's Aufsatz „De la Lumière“¹⁾, welchen er der französischen Ausgabe der Chemie von Thompson beigelegt hatte. Dieser Aufsatz wurde 1822 gedruckt, also drei Jahre nach dem Mémoire über die Diffraction, woraus wir die früheren Data entnahmen.

1) A. Fresnel, Oeuv. compl. 2. p. 1—146.

In jener hauptsächlichen und populären Arbeit, p. 23 (Oeuv. compl. 2.), finden wir wirklich neben einer kurzen Besprechung des Spiegelversuches den Zusatz, dass man mittelst dieses Versuches die Wellenlänge aller Farben des Spectrums bestimmen könnte, und „dass aber diese Bestimmung mit Genauigkeit („avec soin“) nur mit rothem homogenen Lichte gemacht wurde. Für die Wellenlänge der Strahlen dieses Lichtes wurde gefunden $\lambda = 638$ Milliontel Millimeter.“ Mehr finden wir über diesen Umstand nirgends, weder hier noch anderswo in Fresnel's Werken. Dieser Ausspruch steht nun, wie wir sehen, im directen Gegensatze zu dem, was uns Fresnel in seinem *Mémoire sur la diffraction* über seine Wellenlängenbestimmung $\lambda = 638$ Milliontel Millimeter so genau berichtet, zweitens auch mit dem ausführlichen Berichte über seine Messungen mit dem Spiegelversuche, wovon wir soeben gesprochen haben.

Wir glauben also bestimmt annehmen zu können, dass die Worte Fresnel's in „*La Lumière*“ auf einem Versehen beruhen, hervorgerufen wahrscheinlich durch den Umstand, dass Fresnel anfänglich, wie wir früher sahen, wirklich den Spiegelversuch in Wellenlängenmessungen gebrauchen wollte, und erst nachdem er seine Unbrauchbarkeit dazu erkannte, zu den Diffractionsversuchen griff. Die erste Wellenlängenbestimmung, die wir in der Wissenschaft kennen, war nicht mittels des Spiegelversuches vollführt.

XI. *Das Boyle'sche Gesetz.*

Ein Vorlesungsversuch; von J. L. Andreae.

(Hierzu Taf. I Fig. 1.)

In einer oben zugeschmolzenen, unten offenen Glasröhre von $1\frac{1}{2}$ bis 2 mm innerem Durchmesser und ca. 1 m Länge befindet sich ein 250 mm langer Quecksilberfaden. Oberhalb des Fadens ist ein gewisses Luftquantum abgeschlossen, das

in Fig. 1 ein einer Länge von 40 cm entsprechendes Volumen einnimmt.

Die Röhre wird von einem Stativ getragen, welches auf weissem Papier eine in Centimeter getheilte Scala trägt und mit beiden Enden vertical auf den Tisch gestellt werden kann. Ist H die Lage der Barometerhöhe in Millimetern, so ist die Spannung der abgeschlossenen Luft $P = H - 250$. Man braucht den Apparat nur umzukehren, dann ist die Spannung $P' = H + 250$. Wenn $H = 750$, wird $P = 500$ und $P' = 1000$, also das Volumen von 40 auf 20 zusammengedrückt.

Der einfache Apparat dürfte sich dadurch empfehlen, dass er jeden Augenblick zum Gebrauche fertig ist und daher das Eingiessen von Quecksilber, wie bei dem bekannten heberförmigen, unnöthig macht.

Sneek, im Februar 1884.

XII. Ueber einen Quecksilberunterbrecher, bei welchem die Oxydation des Quecksilbers vermieden ist; von Carl Kirn.

(Hierzu Taf. 1 Fig. 2–4.)

Vor einiger Zeit veröffentlichte Hr. E. Budde eine Notiz über eine unter Wasserstoff arbeitende Wippe¹⁾, welche dauernd in regelmässigem Gange gehalten werden kann, da eine Bildung von störenden Oxydationsproducten an der Unterbrechungsstelle ausgeschlossen ist. Auf dem gleichen Principe beruht ein Quecksilberunterbrecher, welchen ich mir bereits vor längerer Zeit für einen kleinen Funkeninductor angefertigt habe. Bekanntlich wirkt bei dem gewöhnlichen Quecksilberinterruptor des Funkeninductors der Umstand sehr störend, dass schon nach den ersten Unterbrechungen die blanke Oberfläche des Quecksilbers verschwindet, und die durch den Funken gebildeten Oxydationsproducte allmählich das gleichmässige Schliessen und Oeffnen

1) Budde, Wied. Ann. 20. p. 167. 1883.

des primären Stromes derart hindern, dass die regelmässige Entwicklung des inducirten Stromes empfindlich beeinträchtigt wird. Bei länger andauerndem Gebrauche des Funkeninductors ist man deshalb genöthigt, das Quecksilber im Unterbrechungsgefässe einer wiederholten Reinigung zu unterziehen. Um diesen Uebelstand zu vermeiden, verfiel auch ich auf den naheliegenden Gedanken, die Unterbrechungen unter Wasserstoff zu bewirken, und es gelang mir, einen Apparat herzustellen, welcher den an ihn gerichteten Anforderungen völlig entsprach. Da bei diesem Unterbrecher nicht der ganze Apparat, sondern nur die in einem allseitig geschlossenen Glasgefässe enthaltenen Contacttheile sich in einer Wasserstoffatmosphäre befinden, und der Wasserstoffentwickler bei dem Gebrauche gänzlich wegfällt, so lässt sich der Apparat mit derselben Bequemlichkeit anwenden, wie ein gewöhnlicher Unterbrecher, und dürfte vielleicht für viele Fälle, in denen man einer dauernden electricischen Selbstunterbrechung bedarf, empfehlenswerth sein. Ich erlaube mir deshalb, nachstehend eine kurze Beschreibung desselben zu geben.

Wie Fig. 2 zeigt, unterscheidet sich der ganze Apparat von dem gewöhnlichen Quecksilberinterruptor nur durch die UnterbrechungsVorrichtung, welche von den Spitzen der beiden Schrauben *SS* derart getragen wird, dass sie um ihre Längsaxe sehr leicht drehbar ist. Die UnterbrechungsVorrichtung, von welcher Fig. 3 eine Durchschnittszeichnung gibt¹⁾, besteht aus einem allseitig geschlossenen, kugelförmigen oder ellipsoidischen, mit zwei röhrenförmigen Ansätzen versehenen Glasgefässe *A*, in welches zwei Platindrähte *B* und *C* luftdicht eingeschmolzen sind. Der eine dieser Drähte, *B*, liegt in der Richtung der Drehungsaxe *FF* und steht mit der cylinderförmigen, messingenen Fassung *D* in leitender Verbindung; der andere Draht, *C*, durchdringt mit seinem einen Ende das Glasgefäss in der Peripherie des grössten

1) Fig. 3 zeigt das Unterbrechungsgefäss meines für mässige Ströme (2—3 Kohlen-Zink-Elemente) bestimmten Apparates in ungefähr natürlicher Grösse. Für stärkere Ströme würden sämtliche Dimensionen des Apparates entsprechend vergrössert werden müssen.

Drehungskreises und ist an seinem anderen Ende mit der messingenen Fassung *E* verbunden. Das Glasgefäß ist bis zur Höhe der Linie *aa* mit reinem, luftfreiem Quecksilber und der übrige Raum des Gefäßes mit Wasserstoffgas gefüllt. Es ist von Wichtigkeit, dass das Quecksilber von absorbirter atmosphärischer Luft vollständig befreit ist. Ich verfuhr bei der Anfertigung dieses Theiles des Apparates folgendermassen: Nachdem das Glasgefäß mit den eingeschmolzenen Electroden in der Fig. 4 gezeichneten Weise vorbereitet und mit der erforderlichen Menge reinen Quecksilbers gefüllt worden war, wurde durch eine bis auf den Spiegel des letzteren reichende enge Glasröhre reines, trockenes Wasserstoffgas eingeleitet und das Quecksilber alsdann im Sandbade bis zum Sieden erhitzt und einige Zeit im Sieden erhalten. Unter fortwährendem Einleiten von Wasserstoff wurde das Ganze bis zum völligen Erkalten stehen gelassen und schliesslich das Glasgefäß an der verengten Stelle bei *Z* zugeschmolzen. Die messingenen Fassungen *D* und *E* sind auf die Ansätze des Glasgefäßes fest aufgekittet.

Wird diese Vorrichtung um die Axe *FF* bewegt, während die Fassungen *D* und *E* mit den Polen einer Batterie in Verbindung stehen, so erfolgt, wie leicht ersichtlich, ein Schliessen des Stromes, sobald die Spitze des Drahtes *C* in das Quecksilber im Gefässe eintaucht, ein Oeffnen des Stromes dagegen, sobald dieser Draht das Quecksilber verlässt. Es genügt also eine abwechselnd auf- und abwärts gerichtete kleine Drehung des Quecksilbergefäßes, um die Oeffnung und Schliessung des Stromes zu bewirken. Diese Bewegung wird dem Quecksilbergefässe durch den Electromagnet *K* (Fig. 2), den schwingenden Balken *L*, die Stange *M* und den auf der Drehungsaxe sitzenden, kleinen Hebel *N* ertheilt. Die Leitung des Stromes von dem Electromagnet, durch das Quecksilbergefäß erfolgt mittelst der beiden dünnen, kupfernen Federn *P* und *Q*, welche auf den messingenen Fassungen hinreichend fest aufliegen, ohne dass ihr Druck die leichte Beweglichkeit des Unterbrechers beeinträchtigt. Von den fünf Klemmschrauben des Apparates werden I, IV

und V zur Leitung des Stromes benutzt, II und III dienen zur Aufnahme der nach dem Condensator führenden Drähte, falls der Unterbrecher mit dem Funkeninductor verbunden wird.

Das Spiel des Apparates ist leicht verständlich. Der kleine Hebel *N* ist derart auf der Axe des Unterbrechungsgefäßes befestigt, dass in der Ruhelage die Spitze des Drahtes *C* (Fig. 3) ein wenig unter die Oberfläche des Quecksilbers taucht. Der somit geschlossene Strom erregt den Electromagnet, dieser zieht den Anker des schwingenden Balkens an, wodurch der Draht aus dem Quecksilber gehoben, und der Strom unterbrochen wird. Der Balken schwingt zurück, die Spitze des Drahtes taucht wieder in das Quecksilber, der Strom wird geschlossen, und der ganze Vorgang beginnt von neuem. Die Bewegung, welche dem Quecksilber selbst während des Ganges ertheilt wird, nimmt sofort einen so gleichförmigen Zustand an, dass die einzelnen Unterbrechungen mit grösster Regelmässigkeit erfolgen.

Der vorstehend beschriebene Apparat arbeitet gut und sicher, ist stets zum Gebrauche bereit und gewährt noch den Vortheil, dass ein Umherschleudern des Quecksilbers, wie es bei den offenen Gefässen der gewöhnlichen Unterbrecher leicht eintritt, vollständig ausgeschlossen ist. Wie bereits oben erwähnt, wurde das von mir benutzte Exemplar schon vor längerer Zeit angefertigt, und trotzdem dasselbe inzwischen oftmals und stundenlang (unter Anwendung eines Stromes von 2—3 Bunsen'schen Elementen) im Gebrauche war, hat das Quecksilber im Unterbrechungsgefässe seine blanke Oberfläche vollständig bewahrt. Es bedarf schliesslich kaum der Erwähnung, dass der Apparat auch leicht mit zwei Unterbrechungsgefässen versehen werden kann.

Hanau, im October 1883.

XIII. *Drei Ozonapparate; von G. Krebs.*

(Hierzu Taf. I Fig. 5–7.)

Da man bei der Herstellung von Ozon Gummistopfen und -röhren nicht verwenden darf, und die Benutzung von Kork auch ihre Unannehmlichkeiten hat, so schien es mir rathsam, Apparate zur Darstellung des Ozons durch Electrolyse des Wassers, durch Zersetzung von Kaliumpermanganat und von Bariumsuperoxyd mittelst Schwefelsäure ganz aus Glas herstellen zu lassen.

Fig. 5 zeigt den Apparat zur Herstellung des Ozons durch Electrolyse des Wassers: An das geschlossene Ende des Schenkels *b* einer an einem Gestell verschiebbaren U-Röhre *ab* ist eine Gasleitungsröhre *c* angeschmolzen, welche man in einen kurzen, engen Reagenscylinder (Präparatenglas) tauchen lässt. Das Platinplättchen in *b* wird mit dem positiven Pol einer Kette von mindestens drei guten Bunsen'schen Elementen verbunden. Die verdünnte Schwefelsäure wird möglichst kalt durch *a*, und zwar so hoch eingegossen, dass sie nur wenig über den Enden der Platinplättchen steht.

Es wird zwar hier und da empfohlen, als positiven Pol ein Kohlenstäbchen zu verwenden; meine mit vielen, aus dichtester Gaskohle geschnittenen Kohlestäbchen angestellten Versuche konnten mich aber nicht überzeugen, dass man mit denselben mehr Ozon erhält, als mit Platin; ausserdem setzten alle Kohlestäbchen nach und nach Schlamm ab und wurden merklich dünner.

Nachdem die Wasserzersetzung einige Minuten gedauert hat, giesst man in das Präparatengläschen dünne Jodkaliumkleisterlösung ein; die Bläuung erfolgt sofort; ist sie nicht intensiv genug, so lässt man die Wasserzersetzung noch einige Zeit fort dauern und das Gas durch die Kleisterlösung streichen; doch ist es, der Druckverhältnisse wegen, gerathen, die Röhre *c* nur etwa $\frac{1}{2}$ cm tief in die Lösung tauchen zu lassen. Wird, was sich auch einmal ereignen kann, die Lösung bräunlich statt blau, so fehlt es an Stärke.

Fig. 6 zeigt den Apparat zur Darstellung des Ozons durch

Zersetzung von Kaliumpermanganat mittelst Schwefelsäure. Es ist ein 8 cm hoher und 4 cm weiter, nicht zu dickwandiger Glascylinder, dessen Boden ebenso dick im Glas ist, wie die Seitenwand (ca. 1 mm dick). Der Cylinder lässt sich durch einen hohlen, eingeschliffenen, dünnwandigen Glasstopfen, an den oben eine Gasleitungsröhre angeschmolzen ist, verschliessen.

Man giesst zunächst Schwefelsäure ca. 1—2 cm hoch in den Cylinder und streut dann trockenes Kaliumpermanganat ein, höchstens zwei Gewichtstheile Kaliumpermanganat auf drei Gewichtstheile Schwefelsäure. Nimmt man zuviel Salz, streut man es namentlich zuerst ein und giesst dann Schwefelsäure zu, so tritt leicht nach einiger Zeit eine heftige Explosion ein. Im anderen Fall ist der Versuch völlig gefahrlos.

Die Anwesenheit von Ozon wird wie bei dem ersten Versuch nachgewiesen.

Fig. 7. zeigt den Apparat zur Darstellung des Ozons durch Zersetzung von Bariumsuperoxyd mittelst Schwefelsäure. Man kann entweder gewöhnliches Bariumsuperoxyd oder besser Bariumsuperoxydhydrat, wie es durch Auflösung von gewöhnlichem Bariumsuperoxyd in verdünnter Salzsäure, Fällung mittelst Barytwasser und Austrocknen erhalten wird.

Man schüttet in den Cylinder getrocknetes Bariumsuperoxyd ca. 2 cm hoch und setzt den hohlen Glasstopfen auf, durch den in der Mitte der Stiel eines Hahntrichters hindurchgeht, und an welchen seitlich ein Gasleitungsrohr angeschmolzen ist. In den Trichter giesst man bei geschlossenem Hahn concentrirte Schwefelsäure und öffnet dann den Hahn soweit, dass die Schwefelsäure langsam austropft.

Es ist gut, wenn auch nicht absolut nothwendig, das Cylinderglas in kaltes Wasser zu stellen. Neben Ozon bilden sich dabei die bekannten weissen Nebel in ziemlicher Menge.¹⁾

1) Die drei hier beschriebenen Apparate habe ich bei Desaga in Heidelberg anfertigen lassen.

XIV. *Apparat zur Demonstration der Gesetze der Zugelasticität; von V. Pierre.*

(Hierzu Taf. I Fig. 8–10.)

Auf einem dreifüssigen Gestelle erhebt sich die verticale Säule *AB*, welche bei *B* eine Klemmvorrichtung *C* trägt, um das obere Ende eines in das Häkchen bei *B* eingehängten Drahtes zu fixiren. An der Säule lässt sich ein in gleiche Theile getheilter halbkreisförmiger Bogen verschieben und mittelst der Klemmschraube *D* in jeder beliebigen Höhe feststellen. Weiter ist in derselben Weise der einarmige Hebel *FF'* an der Säule verschiebbar und durch die Klemmschraube *E* festzustellen. Das untere Ende des Drahtes wird in ein an dem Ende des kürzeren Hebelarmes befindliches Häkchen *a* eingehängt, während das auf dem längeren Arme verschiebbare Laufgewicht von 0,5 kg die Spannung des Drahtes bewirkt. Durch Senken der Klemmvorrichtung *E* kann man es immer dahin bringen, dass der Hebelarm bei jeder Belastung horizontal gerichtet ist. Um eine bestimmte Drahtlänge einzuspannen, wird, wie in Fig. 9 dargestellt erscheint, eine Klemme *G* angewendet, an welcher eine feine Schnur befestigt, über die Rolle β geführt und durch das Gewicht (siehe Figur) gespannt ist. An der Axe dieser Rolle ist ein Zeiger aufgesteckt, aber nicht fest gemacht, damit man ihn später auf jedem beliebigen Theilstrich des vorerwähnten Kreisbogens einstellen kann. Hat man nun eine Drahtlänge von 1 m zwischen *C* und *G* unter einem bei *a* wirkenden Zuge von 1 kg eingespannt und dabei den Zeiger auf den Nullpunkt der Bogentheilung eingestellt, so lassen sich die Verlängerungen bei jeder Zugvermehrung an der betreffenden Zeigerbewegung auch in grösserer Entfernung leicht verfolgen. Durch Oeffnen der Klemmen *D* und *G* und Höherstellen derselben, wodurch z. B. nur die halbe Länge des Drahtes eingeschaltet ist, kann man bei unveränderter Zuggrösse die der veränderten Länge entsprechende Vereinigung der Drehung des eingeschalteten Drahtes ersichtlich machen. Ebenso kann man Drähte von verschiedenem Material bei gleichem Querschnitt und von gleichem Materiale, aber verschiedenem Querschnitte anwenden.

XV. *Apparat zur Veranschaulichung des Entstehens einer Longitudinalwelle; von V. Pierre.*

(Hierzu Taf. I Fig. 11–14.)

Auf dem horizontalen Brette *ABC* ist eine verticale Wand *DE* aufgestellt, an welcher zwischen den Coulissen *mn* und *pq* Streifen von weissem Bein *aa'*, *bb'*, *cc'*.... parallel zu sich selbst verschiebbar sind. Hinter dieser Wand befinden sich um eine zu ihr parallele Axe drehbar neun hohle cylindrische Blechtrommeln *I*, *II*, *III*...*IX*. An jeder solchen Trommel ist ein Spalt angebracht, der einer zur Axe jeder Trommel unter demselben Winkel geneigten Ebene parallel geführt ist. In diese Spalten ragen Stifte, welche (siehe Fig. 11) an den Hinterseiten der Streifen *aa'*, *bb'*... angebracht sind und durch eine horizontale Spalte *rs* der Wand *DE* hindurch gehen, derart hinein, dass bei einer Axendrehung der Trommeln die erwähnten Streifen eine nach dem Sinusgesetze erfolgende, hin- und hergehende Bewegung annehmen. Die Trommeln sind, wie in Fig. 12 dargestellt ist, an der Axe *MN* so angebracht, dass die erste derselben *I* an der Axe fest sitzt, während die übrigen *II*, *III*... nur lose aufgesteckt sind, wobei die Federn *FF'* von unten gegen dieselben drücken und sie in ihrer Lage zu erhalten suchen. Jede Trommel hat an der ihrer Nachbartrommel zugewendeten Basisfläche einen Vorsprung (Nase), sodass, wenn die einander gegenüberstehenden Vorsprünge beim Drehen der Kurbel aneinanderstossen, die vorangehende Trommel die folgende mitnimmt. Diese Vorsprünge sind jedoch so angeordnet, dass sie bei jeder folgenden um $\frac{1}{8}$ der Peripherie gegen die Stellung an der vorangehenden versetzt sind. Zu Beginn des Versuches werden, wie in Fig. 12, die Spaltebenen $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ u. s. w. alle parallel gestellt, wodurch auch die Platten oder Streifen *aa'*, *bb'* u. s. w. alle in gleichen Abständen sich anordnen, somit gewissermassen äquidistante Querschnitte eines Mediums darstellen. Dreht man nun an der Kurbel, so beginnt zuerst der Streifen *aa'* nach dem Sinusgesetze sich zu bewegen; nach Vollendung eines Achtels der Schwingung beginnt die zweite Trommel und mit ihr der Streifen *bb'* sich in derselben Weise zu bewegen, während *aa'* in das zweite Achtel seiner Schwingung eintritt u. s. w.

XVI. *Galvanoskop für Vorlesungsversuche; von V. Pierre.*

(Hierzu Taf. I Fig. 15.)

Auf dem durch zwei Stellschrauben einzustellenden Gestelle *ABC* ist eine Säule *DH* aufgerichtet, an welcher die Solenoïde *F* und *G* in unveränderlicher Höhe angebracht sind und von dem durch die Klemmen *a* und *b* zu- und abgeleiteten Strome in demselben Sinne durchlaufen werden. An derselben Säule ist das um eine Schneide bei *J* drehbare Pendel *JH* aufgehängt, das bei *M* einen kleinen Stahlmagnet und bei *c* und *d* kleine Laufgewichte zur Regulirung der Pendelstellung trägt. Nach oben verlängert sich das Pendel zu dem Zeiger *JK*, an dem sich bei *K* eine schwarze, auf einem weissen Kreisbogen spielende Scheibe befindet. Die Solenoïde sind so angeordnet, dass im Zustande des Gleichgewichtes die Enden des Magnetstabes unmittelbar vor den Mündungen der Höhlungen der Solenoïde sich befinden. Der Apparat ist ziemlich empfindlich, dürfte jedoch durch das Versuchsgalvanometer von Beetz entbehrlich geworden sein und wurde zu einer Zeit construirt, zu welcher das letztere Instrument noch nicht bekannt war.

XVII. *Apparat, um Wasser unter dem Recipienten der Luftpumpe durch seine eigene Verdampfung möglichst schnell zum Gefrieren zu bringen;*

von V. Pierre.

(Hierzu Taf. I Fig. 16.)

Die von mir seit vielen (mehr als zwanzig) Jahren angewendete Methode Wasser unter der Luftpumpe zum Gefrieren zu bringen, rührt eigentlich von dem verstorbenen Professor und Ministerialrathe Schrötter von Kristelliher, ist aber, wie es scheint, nicht bekannt geworden. Da man bei dem eingangs erwähnten Versuche die Wasser-

dämpfe von concentrirter Schwefelsäure absorbiren lässt, entsteht durch Wasseraufnahme eine starke Erhitzung der Schwefelsäure, welche noch bedeutender wird, wenn bei lebhaftem Sieden des Wassers Tropfen oder selbst grössere Wassermengen aus der das Wasser enthaltenden Schale fortgeschleudert werden und in die Schale mit Schwefelsäure fallen. Dadurch wird aber gewissermassen die mit Wasser gefüllte Schale über eine Wärmequelle gestellt, welche dem Wasser eine grosse Wärmemenge zur Dampfbildung zuführt und dadurch die Abkühlung des Wassers sehr verzögert. Um diesen Uebelstand zu beseitigen, wird die Schale *D*, welche etwa fünf bis sechs Gramm Wasser fasst, nicht unmittelbar über der die Schwefelsäure enthaltenden Schale *AB* aufgestellt, sondern in eine viel grössere, nahezu halbkugelförmige Schale *C*, wie Fig. 16 zeigt, gestellt. In letzterer ist der hohle Kork *E* aufgekittet, auf welchen die Schale *D*, mit Wasser gefüllt, zu ruhen kommt. Mit einer einigermaßen gut, namentlich rasch wirkenden Luftpumpe kann man auf diese Weise die erwähnte Wassermenge selbst in einem überfüllten Hörsale in längstens fünf bis sechs Minuten zum vollständigen Gefrieren bringen, nur muss man noch die Vorsicht gebrauchen, alle Theile des Apparates und ebenso die Schwefelsäure und das Wasser durch Einlegen in Eis vor dem Versuche möglichst gut abzukühlen. Unter besonders günstigen Verhältnissen ist es mir sogar gelungen, das Wasser mit derselben (Deleuil'schen) Luftpumpe in drei Minuten gefrieren zu machen. Die Schale *AB* ist eine Porcellanschale derselben Art, wie sie die Chemiker zum Trocknen von Substanzen über Schwefelsäure benutzen.

Fig. 1



Fig. 16

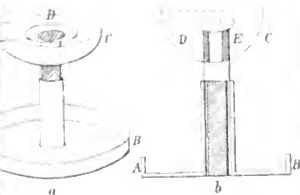


Fig. 15

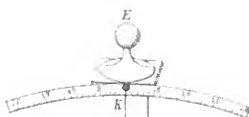


Fig. 14



Fig. 7

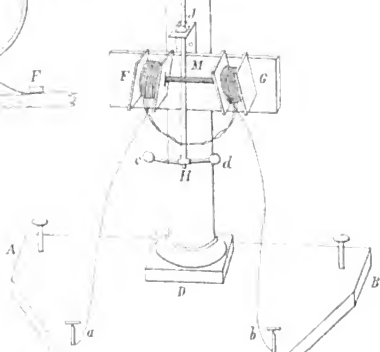
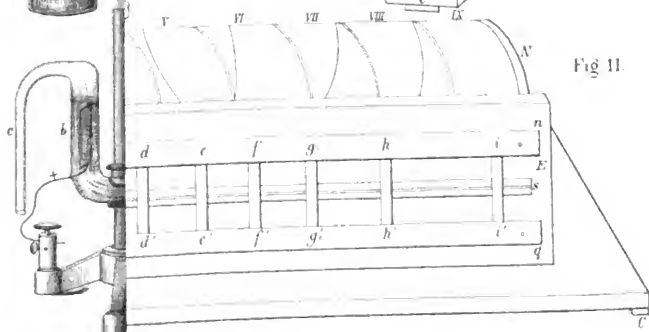


Fig. 11



DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXII.

I. *Ueber die langsame Verdichtung
der Kohlensäure an blanken Glasflächen und
Kayser's Einwürfe dagegen; von R. Bunsen.*

Im 21. Bande dieser Annalen, p. 495—498, hat Kayser nachzuweisen gesucht, dass die von mir beobachtete längere Dauer der Kohlensäureverdichtung an Glasfäden auf einer von mir übersehenen Fehlerquelle beruhe, und dass alles, was ich für eine solche Verdichtung gehalten, nichts anderes gewesen sei, als eine durch die Fettschicht der Einschleifungen erfolgte Absorption und Diffusion. Er stützt diese Ansicht auf einen Versuch, bei welchem er die wohl für niemand, der sich mit gasometrischen Arbeiten beschäftigt hat, überraschende Thatsache beobachtete, dass in 47 Tagen 2,81 ccm Kohlensäure durch, mit sehr hartem Fette gedichtete luftdichte Schliffflächen in atmosphärische Luft diffundirten. Er bemerkt dabei ausdrücklich, dass er den Versuch mit einem Apparate angestellt, welcher den Fehler des meinigen in weit höherem Grade besass. Ich muss gestehen, dass es mir nicht recht einleuchtend ist, weshalb Hr. Kayser nicht den viel berechtigteren, gerade entgegengesetzten Schluss aus seinem Versuche gezogen hat. Er erhielt nämlich in 47 Tagen eine durch Diffusion bewirkte Volumenverminderung von 2,44 ccm, während mein Versuch in derselben Zeit eine nach Kayser's Ansicht ebenfalls lediglich von Diffusion herrührende Volumenverringernng von 20,37 ccm ergab. Wenn es ihm daher gelang, den von mir vermeintlich begangenen Fehler durch einen besonders ungünstig construirten Apparat um das Zehnfache zu verringern, sollte es dann — wird man billig fragen dürfen — für mich eine Unmöglichkeit gewesen sein, mit Hülfe meines

nicht besonders ungünstig, sondern sogar möglichst günstig construirten Apparates den vermeintlichen Fehler noch einmal um das Zehnfache oder so weit herabzumindern, dass er als verschwindend klein ausser Betracht bleiben konnte? Hr. Kayser scheint sich diese Frage gar nicht vorgelegt zu haben, sonst würde er doch wohl Anstand genommen haben, die Schlussfolge aus seinem Diffusionsversuche für eine unumstössliche zu halten, indem er l. c. p. 497 sagt:

„Dadurch ist zweifellos erwiesen, dass die Fettschichten an dem dauernden Verschwinden des Gases schuld sind, und dass die von Bunsen zur Erklärung seiner Resultate aufgestellte Hypothese, das Gas dringe unter grosser Reibung langsam in das Glas ein, unnöthig ist.“

Ich möchte fast glauben, dass Hr. Kayser eine so zuversichtliche Erklärung, wie sie sich in diesen Worten ausspricht, etwas bedenklich erschienen sein würde, wenn er versucht hätte, die Berechtigung zu derselben etwas eingehender an den Ergebnissen meiner Beobachtungen zu prüfen. Ich will daher diese Prüfung nachholen:

Die in die Volumeneinheit einer Flüssigkeit oder eines analog wirkenden Körpers eindringenden Gasvolumina sind bekanntlich unter sonst gleichen Umständen proportional dem totalen oder partiellen Drucke, unter dem die Absorption erfolgt. Ganz dasselbe gilt auch umgekehrt für die aus Flüssigkeiten in heterogene Atmosphären austretenden Gase. Bei Beginn der Beobachtungen¹⁾ enthielt nun mein Apparat 80,172 ccm freie Kohlensäure; als nach 110 Tagen davon nur noch 47,163 ccm vorhanden waren, wurden, um die Ablesungen fortsetzen zu können, noch 42,3 ccm hinzugefügt, also das vorhandene Volumen und mit ihm der diffuse Druck nahezu verdoppelt. Wäre, wie Kayser behauptet, die von mir beobachtete Volumenabnahme des Gases eine Folge von Diffusion gewesen, so hätte sich nothwendig bei dem jetzt nahezu verdoppelten partiellen Drucke der im Apparat befindlichen Kohlensäure eine entsprechende Veränderung der Gasver-

1) Bunsen, Wied. Ann. 20. p. 553. 1863.

ringerung zu erkennen geben müssen. Davon bemerkt man aber auch nicht die leiseste Spur, sondern gerade das Gegentheil, da die nachstehende, meinen früheren Versuchen entnommene Tabelle zeigt, dass die Volumenabnahme vor und nach der Zulassung des Gases am regelmässigsten verläuft.

Tabelle V.

I	II	III	I	II	III
T	V	$\frac{V_1 - V_0}{T_1 - T_0}$	T	V	$\frac{V_1 - V_0}{T_1 - T_0}$
0,000	0,000		17,07	23,247	0,62
0,331	3,351	10,13	19,87	24,823	0,56
1,053	6,654	4,58	23,29	26,815	0,58
2,464	10,247	2,55	26,65	28,56	0,52
4,173	12,407	1,27	29,81	30,08	0,48
5,689	13,977	1,05	32,42	31,46	0,52
7,342	15,552	0,94	35,54*	32,65	0,38
9,162	17,488	1,06	39,03	33,96	0,38
11,14	19,268	0,90	42,64	35,47	0,42
13,36	21,268	0,94	46,31	36,85	0,38
15,22	22,095	0,45	51,41	38,45	0,31

Columnne I dieser Tabelle enthält die Beobachtungszeiten, eine dreitägige Zeitdauer als Einheit angenommen, Col. II das bis zu diesen Beobachtungszeiten adsorbierte Kohlen säurevolumen von 0° C. und 0,76 m Quecksilberdruck in Cubikcentimetern, Col. III die mittlere dreitägige Volumenabnahme innerhalb zweier aufeinanderfolgenden Beobachtungszeiten.

Da es keine vom Drucke unabhängige Gasdiffusion oder Flüssigkeitsabsorption gibt, so halte ich es für erwiesen, dass Diffusionserscheinungen die von mir beobachtete Gasabnahme nicht bedingt haben können, und daher Kayser's Behauptung eine irrige ist.

Um nichts besser verhält es sich mit Kayser's Erklärung der von mir gefundenen Thatsache, dass die Adsorption innerhalb gewisser Grenzen mit der Temperatur steigt und vom Drucke nicht merklich beeinflusst wird. Man weiss, dass die Absorptionscoefficienten mit erhöhter Temperatur abnehmen. Ist aber diese Thatsache, von der ich keine Ausnahme kenne, richtig, so müsste, wenn es sich bei

meinen Versuchen um gar keine Adsorption, sondern lediglich nur um eine durch Flüssigkeitsabsorption vermittelte Diffusion handelte, die meiner früheren Abhandlung beigegebene Curve (l. c. p. 554 Fig. 2) mit wachsender Temperatur nicht rascher ansteigen, sondern herabsinken. Aber auch hier zeigt ein Blick auf diese Curve übereinstimmend an drei verschiedenen Stellen gerade das Gegentheil.

Ich könnte es daher bei diesem Nachweise der theoretischen Widersprüche, in welche sich die von Kayser versuchte Auslegung meiner Versuche verwickelt, füglich bewenden lassen, wenn er seiner Beweisführung nicht noch die Bemerkung hinzugefügt hätte:

„Schliesslich bemerke ich noch, dass man aus Bunsen's Resultaten folgern kann, dass die Diffusion der Kohlensäure mit steigender Temperatur zunimmt, vom Drucke aber nur in geringem Grade beeinflusst wird.“

Wenn man sich erlauben dürfte, für einen ganz speciellen Fall ohne alle weitere Begründung ein Ausnahmsgesetz zu statuiren — ich meine eine Diffusion, die vom Drucke nur in geringem Maasse beeinflusst wird —, so wäre damit allerdings meiner ganzen Argumentation die Spitze abgebrochen. Allein ich glaube, dass sich nach dem Gesagten wohl schwerlich jemand finden würde, ein solches ohne alle und jede Beweise aufgestelltes Ausnahmsgesetz gelten zu lassen, oder wohl gar, wie es Kayser thut, aus meinen Versuchen abzuleiten. Keineswegs daher, um einer solchen Annahme noch besonders entgegen zu treten, sondern lediglich nur, um Hrn. Kayser und mir jede Mühe und Zeit weiterer Erörterungen zu ersparen, will ich hier noch einen endgültig entscheidenden Versuch besprechen, der keiner mehrdeutigen Auslegung fähig ist.

Es diene dazu ein weites, mit einer auf Cubikcentimeter calibrierten Theilung versehenes, unten offenes, oben ausgezogenes weites Verbrennungsrohr, in dessen oberem Ende sich Glasfäden von derselben Sorte, welche zu meinen früheren Versuchen gedient haben, befanden. In dieses so vorgerichtete Rohr wurde während zweier Tage von Zeit zu Zeit völlig getrocknete Luft eingelassen und wieder durch

Auspumpen entfernt, darauf durch den Apparat zwei Stunden lang ein lebhafter Strom reiner, sorgfältig gewaschener, wohlgetrockneter Kohlensäure geleitet, sodann der ausgezogene Theil des Rohres an einer verengten Stelle, die zum Anfangspunkte der Calibrirung genommen war, abgeschmolzen und endlich das so hergerichtete Instrument zu den Beobachtungen in der Quecksilberwanne des Gaszimmers aufgestellt. Bei den Ablesungen wurde ganz wie bei meinen früheren Versuchen verfahren.

Es sei V_0 das auf 0° C. und 0,76 m Quecksilberdruck reducirte, zur Zeit T_0 an der Theilung beobachtete Kohlensäurevolumen, V_1 das bis zur Zeit T_1 durch Adsorption verringerte Volumen bei dem Drucke P_1 und der Temperatur t_1 , so ist das in dem Zeitintervall $T_1 - T_0$ adsorbirte, auf 0° und 0,76 m reducirte Volumen V_2 :

$$V_2 = V_0 - \frac{P_1}{0,76} \cdot \frac{1}{1 + 0,00366 t_1} V_1.$$

Die erste Beobachtung V_0 geschah, nachdem die Glasfäden bereits drei bis vier Stunden während des Füllens, Aufstellens und Erhaltens des Apparates mit Kohlensäure

Tabelle VI.

I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V
T	V	$\frac{V_1 - V_0}{T_1 - T_0}$	t°	P	T	V	$\frac{V_1 - V_0}{T_1 - T_0}$	t°	P
0,000	0,000								
1,045	4,589	4,39	11,3	0,7093	14,739	25,858	0,876	8,7	0,6249
1,837	6,768	2,75	11,3	0,6983	15,739	26,651	0,793	8,2	0,6230
1,941	6,990	2,14	11,0	0,6965	16,739	27,399	0,748	8,0	0,6203
2,142	7,414	2,11	11,1	0,6959	17,739	28,189	0,790	8,0	0,6173
2,691	8,612	2,18	10,9	0,6943	18,739	28,859	0,670	8,2	0,6121
3,149	9,499	1,94	9,7	0,6897	19,739	29,542	0,683	9,6	0,6099
3,733	10,756	2,15	11,0	0,6874	20,739	30,245	0,703	10,2	0,6093
4,739	12,414	1,66	10,3	0,6833	21,739	30,995	0,750	10,5	0,6080
5,739	13,943	1,53	10,4	0,6772	22,739	31,817	0,822	11,6	0,6034
6,739	15,762	1,82	10,4	0,6721	23,739	32,604	0,787	12,3	0,6018
7,739	17,165	1,40	10,8	0,6660	24,739	33,829	1,225	13,0	0,5964
8,739	18,919	1,75	10,9	0,6605	25,739	34,812	0,983	13,8	0,5947
9,739	20,316	1,40	10,4	0,6529	26,739	35,926	1,11	14,3	0,5882
10,739	21,621	1,31	11,3	0,6473	27,739	36,935	1,01	13,3	0,5868
11,739	22,878	1,26	10,3	0,6425	28,739	38,206	1,27	11,7	0,5810
12,739	23,928	1,05	9,7	0,6390	29,739	39,040	0,834	11,2	0,5764
13,739	24,982	1,05	9,3	0,6337	30,739	39,987	0,947	11,2	0,5736
			9,0	0,6293	31,739	40,741	0,754	11,2	0,5739

in Berührung gewesen waren. Um das in diesem Zeitraume von den Glasfäden adsorbierte Gasvolumen sind daher die Adsorptionen zu klein gemessen. Die vorstehende Tab. VI umfasst eine Beobachtungsreihe von nur 31 Tagen, die aber zur endgültigen Erledigung der Frage, um die es sich hier handelt, schon völlig ausreichend ist. Col. I gibt die Zeiten der aufeinander folgenden Beobachtungen in Tagen und deren Bruchtheilen, Col. II die zu diesen Beobachtungszeiten adsorbierten Kohlensäurevolumina in Cubikcentimetern von 0° C. und 0,76 m Quecksilberdruck, Col. III die innerhalb zweier aufeinander folgender Beobachtungen in 24 Stunden adsorbierte Kohlensäure in Cubikcentimetern und endlich Col. IV und V die den Beobachtungen zugehörigen Temperaturen und Drucke.

Kayser sagt l. c. p. 494: „Wenn Bunsen seinen Vorgängern auf diesem Gebiete der Untersuchung vorwirft, sie hätten sich von dem Eintreten eines Maximums nicht überzeugt, sondern es ohne weiteres angenommen, so muss ich darauf erwidern, dass ich bei nicht publicirten Vorversuchen zur Verdichtung der Gase an Glas auch speciell für Kohlensäure ein sehr rasches Eintreten der Maximalverdichtung habe constatiren können, sodass mindestens 99% der Verdichtung in der ersten Stunde nach Zulassung des Gases vollendet sind, in der zweiten Stunde manchmal noch eine kleine Verdichtung bemerkbar ist, während in den folgenden drei bis vier Tagen keinerlei messbare Aenderung mehr auftritt.“

Da an dem Apparate, mit welchem meine Resultate der Tabelle VI erhalten sind, gar keine gefetteten Hähne oder eingefettete Schliffflächen vorhanden waren, so hätte also nach diesen von Kayser nicht publicirten Vorversuchen das Maximum der Verdichtung schon während der Zeit, die ich bei der Füllung der Röhre auf Durchleiten der Kohlensäure verwandte, vollkommen erreicht sein müssen. Statt dessen zeigt sich, ganz wie ich es früher fand, nach dem Zeitpunkte, wo Kayser das statische Gleichgewicht als längst erreicht betrachtet, und wo also gar keine Adsorption mehr hätte stattfinden können, in den ersten sechs Tagen noch eine

solche von 14,4 ccm; diese steigt dann in den folgenden sechs Tagen auf 23,2 ccm, in weiteren sechs Tagen auf 28,4 ccm, nach abermals sechs Tagen auf 32,9 ccm und am 31. Tage über 40 ccm. Ferner zeigt sich, ganz wie bei meinen früheren Versuchen, dass während der ganzen 31 tägigen Beobachtungsdauer, trotzdem dass der Druck stetig von 0,7093 m auf 0,5736 m abnahm, nicht die mindeste Loslösung des adsorbierten Gases statt fand. Endlich ergibt sich nicht minder in Uebereinstimmung mit den Ergebnissen meiner früheren Beobachtungen, dass die Adsorption mit sinkender Temperatur abnimmt, mit wachsender aber sich steigert.

Es zeigt sich also, dass der Apparat ohne gefettete Einschleifungen ganz dieselben Resultate gibt, wie der mit gefetteten Einschleifungen versehene.

Und so fällt denn das ganze Gebäude der von Kayser gemachten Einwürfe, da sich dasselbe einzig und allein auf die Anwesenheit gefetteter Einschleifungen stützt, in sich selbst zusammen. Man sieht daher, dass, wenn irgendwo Fehler begangen wurden, diese nicht in meiner Arbeit zu suchen waren.

Das Endresultat dieser Mittheilung aber kann ich dahin zusammenfassen:

1. dass der Vorwurf, eine Fehlerquelle bei meinen Versuchen übersehen und infolge dessen Adsorptionerscheinungen mit Diffusionsphänomenen verwechselt zu haben, mich nicht trifft;

2. dass Kayser's Interpretation meiner Beobachtungen als eine mit der Theorie und mit den Thatsachen in Widerspruch stehende, völlig unhaltbar ist und mir daher die Berechtigung zusteht, die experimentellen und theoretischen Resultate meiner Arbeit in allen ihren Einzelheiten und mit allen ihren Consequenzen nach wie vor aufrecht zu erhalten.

Es wird nun die nächste Aufgabe sein müssen, durch weitere Vorversuche zu ermitteln, wie sich die vom Glase adsorbierte Kohlensäure in höherer als den von mir bisher

untersuchten Temperaturen verhält, und welche Rolle die an der Glasoberfläche sich ebenfalls während einer langen Zeitdauer anhäufende atmosphärische Luftschicht bei den von mir festgestellten Thatsachen spielt.

Heidelberg, den 16. April 1884.

II. Ueber die Diffusion von Gasen und Dämpfen; von A. Winkelmann.

Zweite Mittheilung.¹⁾

Die früheren Versuche hatten gezeigt, dass der Diffusionscoefficient mit wachsendem Abstände der verdampfenden Flüssigkeit von dem Ende des Rohres, aus welchem die Verdampfung vor sich geht, wächst, oder dass der Quotient $t/\frac{1}{2}(h_0 + h_1)$ mit wachsendem h abnimmt. Es bezeichnet hier t die Zeit, welche verstreicht, damit das Flüssigkeitsniveau von h_0 bis h_1 fällt. Aus einem Versuche, welcher die Verdampfung des Wassers in Wasserstoff bis zu grösseren Werthen von h verfolgte, schien hervorzugehen, dass die Abnahme des fraglichen Quotienten langsamer vor sich geht, als die Zunahme von h . Hierdurch wurde es wahrscheinlich, dass die Zunahme des Diffusionscoefficienten, indem der Quotient einer bestimmten Grenze zustrebt, nur eine scheinbare ist, welche in einer Aenderung des Dampfdruckes an der Oberfläche der Flüssigkeit begründet ist. Ich habe dieses jetzt näher untersucht und gebe im Folgenden die Resultate wieder.

Da der Wasserdampf in einer höheren Temperatur sich durch eine starke Veränderung auszeichnete, habe ich diesen benutzt. Um sicher vergleichbare Resultate zu erhalten, wurde folgende Anordnung getroffen. In das Wasserbad wurden zwei Glasröhren der früher angedeuteten Form mit den Verdampfungsröhren so tief eingesetzt, dass die verdampfenden Oberflächen, welche verschiedene Abstände von

1) Erste Mittheilung Wied. Ann. 22. p. 1. 1884.

dem Ende des Verdampfungsrohres hatten, in demselben Niveau lagen. Der von dem Entwicklungsapparat ausgehende Gasstrom machte folgenden Weg: 1) durch eine Flasche mit Schwefelsäure, 2) durch ein Rohr mit Chlorcalcium, 3) durch die erste Röhre im Wasserbad, 4) durch ein zweites Rohr mit Chlorcalcium, endlich 5) durch die zweite Röhre im Wasserbad. Um zu erfahren, ob durch diese Einrichtung in dem ersten Rohre des Wasserbades sich nicht ein grösserer Ueberdruck ausbildete, wurde vorübergehend ein kleines Wassermanometer eingeschaltet; es zeigte sich der Ueberdruck so klein, dass es nicht nothwendig war, darauf Rücksicht zu nehmen.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate zusammengestellt. Die Temperatur, welche im Wasserbade möglichst constant gehalten wurde, wurde zur Mittelbestimmung von fünf zu fünf Minuten abgelesen. Die gleichzeitig angestellten Versuche sind durch das Zeichen { hervorgehoben.

Wasserdampf-Wasserstoff.

Nr. des Versuchs	Temperatur	Druck des Dampfes	Barometer	h in mm	$\frac{t}{\frac{1}{2}(h_0 + h_1)}$
{ 1	92,37	574,6	724,8	25	10,20
{ 2	"	"	"	47	9,26
{ 3	92,36	574,4	724,4	26	10,38
{ 4	"	"	"	47	9,20
{ 5	92,45	576,9	727,3	63	8,97
{ 6	"	"	"	106	8,55
{ 7	"	"	"	50	9,32
{ 8	"	"	"	150	8,40

In den Versuchen Nr. 1, 3, 5, 7 hatte das Verdampfungsrohr einen Durchmesser von 2,3 mm, in den übrigen Versuchen von 2,7 mm.

Wasserdampf-Luft.

Nr. des Versuchs	Temperatur	Druck des Dampfes	Barometer	h in mm	$\frac{t}{\frac{1}{2}(h_0 + h_1)}$
{ 1	92,37	574,6	729,3	23	32,46
{ 2	"	"	"	48,5	30,43
{ 3	92,42	575,7	730,7	24	32,59
{ 4	"	"	"	44,5	30,75

Nr. des Versuchs	Temperatur	Druck des Dampfes	Barometer	h in mm	t $\frac{1}{2}(h_0 + h_1)$
{ 5	92,37	574,6	729,3	23	32,71
{ 6	"	"	"	71	29,93
{ 7	92,41	575,5	728,8	48,5	29,92
{ 8	"	"	"	85	29,47
{ 9	92,38	574,9	730,7	44,5	30,56
{ 10	"	"	"	82	29,38

In den Versuchen Nr. 1, 3, 5, 6, 7, 9 war der Durchmesser des Wasserdampfrohres 2,3 mm, in den übrigen Versuchen 2,7 mm.

Wasserdampf-Kohlensäure.

Nr. des Versuchs	Temperatur	Druck des Dampfes	Barometer	h in mm	t $\frac{1}{2}(h_1 + h_0)$
{ 1	92,40	575,3	722,4	26	45,29
{ 2	"	"	"	44,5	42,99
{ 3	92,37	574,6	724,3	26	46,02
{ 4	"	"	"	45,5	43,00
{ 5	92,38	574,9	720,9	43,5	42,38
{ 6	"	"	"	82	41,34
{ 7	92,37	574,6	724,3	45,5	42,87
{ 8	"	"	"	82	41,55

In den Versuchen Nr. 1, 3, 5, 7 war der Durchmesser des Verdampfungsrohres 2,3 mm, in den übrigen Versuchen 2,7 mm.

Die vorstehenden Versuche bestätigen das früher gefundene Resultat, dass der Quotient $t/\frac{1}{2}(h_1 + h_0)$ mit zunehmendem h abnimmt¹⁾; sie zeigen aber ferner, dass diese Abnahme nicht proportional mit h erfolgt, sondern langsamer. Dies tritt noch deutlicher hervor, wenn man aus den obigen Werthen den Diffusionscoefficienten K (nach der Formel, Wied. Ann. 22. p. 20) berechnet, weil dann der Einfluss des verschiedenen Druckes und der verschiedenen Temperatur zurücktritt.

1) Um zu beweisen, dass diese Abnahme nicht etwa durch eine conische Form der Verdampfungsrohre bedingt sei, wurden von einer Röhre, in welcher die Verdampfung für $h = 80$ mm beobachtet war, 50 mm abgeschnitten und jetzt wiederum die Verdampfung untersucht.

Diffusionscoëfficient.

Nr. des Versuchs	h	Wasser- dampf- Wasserst.	Zuwachs pro Millim. in Proc.	h	Wasser- dampf- Luft	Zuwachs pro Millim. in Proc.	h	Wasser- Kohlen- säure	Zuwachs pro Millim. in Proc.
1	25	0,972	0,436	23	0,3098	0,254	26	0,2163	0,282
2	45	1,070		48,5	0,3305		44,5	0,2279	
3	26	0,967		24	0,3086		26	0,2149	
4	47	1,076	0,509	44,5	0,3270	0,282	45,5	0,2300	0,349
5	63	1,103		23	0,3074		43,5	0,2304	
6	106	1,157	0,111	71	0,3360	0,184	82	0,2362	0,065
7	50	1,062		48,5	0,3343		45,5	0,2304	
8	150	1,178	0,104	85	0,3394	0,042	82	0,2374	0,087
9	—	—		44	0,3301		—	—	
10	—	—	—	82	0,3434	0,105	—	—	—

Für je zwei gleichzeitig beobachtete Werthe ist der Zuwachs des Diffusionscoëfficienten mit wachsendem h pro Millimeter in Procenten ausgedrückt, angegeben. Wie man sieht, nimmt dieser Zuwachs für alle drei Combinationen mit wachsendem h ganz bedeutend ab; hierdurch ist bewiesen, dass der Diffusionscoëfficient sich schnell einer bestimmten Grenze nähert. Die Grenzwerte selbst werden in den vorliegenden Versuchen nahezu erreicht.

Stellt man den Diffusionscoëfficienten in seiner Abhängigkeit von h durch die Formel:

$$k = a - b \cdot c^h,$$

dar, wo a , b , c aus den Versuchen zu bestimmende Constanten sind, und $c < 1$ ist, so wird:

$$k = a \quad \text{für} \quad h = \infty.$$

Es ist somit a der gesuchte Grenzwert.

Eine Vergleichung der nach obiger Formel berechneten Werthe mit den Beobachtungen liefert eine hinreichende Uebereinstimmung, wie die folgende Zusammenstellung zeigt.

Wasserdampf-Wasserstoff.

$$a = 1,1794; \quad b = 0,4410; \quad \log c = 0,98701 - 1.$$

Diffusionscoëfficient.				Diffusionscoëfficient.			
h	ber.	beob.	Diff. in Proc.	h	ber.	beob.	Diff. in Proc.
25	0,970	0,972	+0,2	63	1,112	1,103	-0,9
47	1,072	1,073	+0,1	106	1,161	1,157	-0,3
50	1,080	1,062	-1,8	150	1,174	1,178	+0,3

Wasserdampf-Luft.

$$a = 0,3451; \quad b = 0,0857; \quad \log c = 0,98387 - 1.$$

Diffusionscoefficient.				Diffusionscoefficient.			
<i>h</i>	ber.	beob.	Diff. in Proc.	<i>h</i>	ber.	beob.	Diff. in Proc.
23	0,3086	0,3086	0,0	71	0,3390	0,3360	-0,9
44,5	0,3287	0,3285	-0,1	82	0,3410	0,3434	+0,7
48,5	0,3310	0,3324	+0,4	85	0,3415	0,3394	-0,6

Wasserdampf-Kohlensäure.

$$a = 0,2384; \quad b = 0,07759; \quad \log c = 0,97871 - 1.$$

Diffusionscoefficient.				Diffusionscoefficient.			
<i>h</i>	ber.	beob.	Diff. in Proc.	<i>h</i>	ber.	beob.	Diff. in Proc.
26	0,2167	0,2156	-0,5	45,5	0,2301	0,2302	0,0
43,5	0,2292	0,2304	+0,5	82	0,2370	0,2370	0,0
44,5	0,2297	0,2279	-0,8				

Nach den vorliegenden Beobachtungen ist die Schlussfolgerung (welche schon in der Einleitung erwähnt wurde) gerechtfertigt, dass die Zunahme des Diffusionscoefficienten mit wachsendem *h* in der Druckänderung des Dampfes an der Oberfläche der verdampfenden Flüssigkeit begründet ist. Da bei kleinen Werthen von *h* die Verdampfung schnell erfolgt, so wird hier der Dampfdruck an der Oberfläche der Flüssigkeit nicht den Maximalwerth, welcher der Temperatur des Bades entspricht, und welcher in jedem Falle in die Rechnung eingeführt wurde, besitzen. Es kann dies in zwei Ursachen begründet sein: einerseits mag durch die schnelle Verdampfung eine Temperaturabnahme der verdampfenden Oberfläche bewirkt werden, und andererseits geht der Dampf so schnell von der Oberfläche fort, dass der Ersatz nicht hinreichend schnell geleistet wird. Mit dieser Erklärung steht das Verhalten der verschiedenen Combinationen im Einklang. Beim Wasserdampf-Wasserstoff, wo die schnellste Verdampfung stattfindet, ist die procentische Zunahme des Coefficienten für gleiche Werthe von *h* stärker, als bei den zwei anderen Combinationen; ferner wird bei der letzteren der Grenzwert schneller erreicht. Berechnet man z. B. für *h* = 82 mm die Diffusionscoefficienten, so erhält man:

	$h = 82$	Grenzwert	Diff. in Proc.
Wasserdampf-Wasserstoff	1,4111	1,1794	3,2
„ -Luft . . .	0,3410	0,3451	1,2
„ -Kohlensäure	0,2370	0,2384	0,5

Wie die Zahlen der letzten Spalte zeigen, ist für $h = 82$ der Coëfficient für Wasserdampf-Wasserstoff noch am weitesten (3,2 Proc.) von dem Grenzwerthe entfernt; der Coëfficient für Wasserdampf-Kohlensäure erreicht dagegen den Grenzwert schon bis auf 0,5 Proc.

In der niedrigen Temperatur wurde die Beobachtung für verschiedene Werthe von h auf die Combination Wasserdampf-Wasserstoff beschränkt, da in den beiden anderen Gasen die Verdampfung so langsam von statten geht, dass die nothwendige Genauigkeit nicht erreicht werden kann. Die Resultate waren folgende:

Wasserdampf-Wasserstoff.

Nr.	Temperatur	Druck des Dampfes	Barometer	h in mm	$\frac{1}{\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_1}}$	Diffusionscoefficient k	Zuwachs in Proc. pro Millim.
1	49,5	89,7	722,7	21	110,5	0,9804	0,090
2	„	„	„	41	108,4	0,9998	
3	„	„	723,3	21	109,8	0,9875	0,041
4	„	„	„	42	108,8	0,9966	

Die letzte Reihe, welche den Zuwachs der Diffusionscoëfficienten mit wachsendem h pro Millimeter darstellt, zeigt in den beiden Werthen 0,090 und 0,041 einen bedeutenden Unterschied; derselbe wird indess durch kleine Differenzen in den Coëfficienten, die nicht ein Procent erreichen, verursacht und ist daher nicht auffallend. Jedenfalls zeigen die Versuche, dass, entsprechend der langsameren Verdampfung, der Zuwachs von k hier viel kleiner ist, als für das gleiche h bei der höheren Temperatur. Berechnet man nach der früher angegebenen Formel, welche für die Temperatur $92,4^\circ$ gilt, die Diffusionscoëfficienten für $h = 21$ mm und 42 mm, so erhält man 0,943 und 1,053; der Zuwachs beträgt daher pro Millimeter 0,51 Proc., während die obigen

Versuche bei $49,5^{\circ}$ in dem gleichen Intervall im Mittel nur 0,065 Proc. zeigen. Auch dieses Resultat steht mit der früher gegebenen Erklärung der Veränderung des Coëfficienten im Einklang.

Vergleicht man aber die Resultate der einzelnen Combinationen in der höheren Temperatur noch näher miteinander, so kommt man zu dem Ergebniss, dass die Schnelligkeit der Verdampfung nicht das einzige massgebende Moment für den Zuwachs des Diffusionscoëfficienten ist. Unter gleichen Umständen (bei gleichem h und gleicher Temperatur) geht die Verdampfung in einer Wasserstoffatmosphäre nahezu fünfmal schneller vor sich, als in einer Kohlensäureatmosphäre. Wenn daher blos die Schnelligkeit der Verdampfung für die Veränderung des Coëfficienten von Bedeutung wäre, so müsste die Combination Wasserdampf-Wasserstoff bei fünffachem Werthe von h die gleiche Veränderung zeigen, wie Wasserdampf-Kohlensäure bei einfachem h . Dass dies nicht der Fall, ergeben die Versuche unmittelbar. Wasserdampf-Wasserstoff zeigt für $h = 100$ mm einen Werth, welcher dem Grenzwert viel näher steht, als der Werth von Wasserdampf-Kohlensäure für $h = 20$ mm. Es scheint daher, dass die Natur des Gases neben der Schnelligkeit der Verdampfung einen Einfluss ausübt.

Die am Schlusse der vorigen Arbeit angegebenen Diffusionscoëfficienten sind, wie schon damals als wahrscheinlich hingestellt wurde, etwas zu gross. Nimmt man in der höheren Temperatur ($92,4^{\circ}$) die jetzt bestimmten Grenzwerte, und in der tieferen Temperatur ($49,5^{\circ}$) für Wasserdampf-Wasserstoff, den obigen Versuchen entsprechend, den Werth 1,000, für die beiden anderen Combinationen die direct beobachteten Werthe, so erhält man:

Diffusionscoëfficient von	Temperatur	
	$92,4^{\circ}$	$49,5^{\circ}$
Wasserdampf-Wasserstoff .	1,1794	1,000
„ -Luft . . .	0,3451	0,2827
„ -Kohlensäure	0,2384	0,1811

Die Differenzen, welche diese Werthe gegenüber den früheren Bestimmungen besitzen, haben keinen Einfluss auf die Bemerkungen, die betreffs der Formel des Hrn. O. E. Meyer gemacht wurden.¹⁾ Das Verhältniss der Diffusionscoëfficienten:

Temperatur	
92,4°	49,5°
$\frac{H_2O - H_2}{H_2O - CO_2} = 4,95;$	5,52
$\frac{H_2O - Luft}{H_2O - CO_2} = 1,45;$	1,56

weicht von den nach der Meyer'schen Formel bestimmten Quotienten bedeutend ab; statt 5,52 liefert die Formel 0,82.

Der Unterschied der Quotienten für die Temperatur 92,4° und 49,5° kann möglicherweise in der Verschiedenheit der Temperaturcoëfficienten der drei Combinationen begründet sein. Wenn der Diffusionscoëfficient von $H_2O - H_2$ schwächer mit der Temperatur wächst, als jener von $H_2O - CO_2$, so wird das Verhältniss beider mit wachsender Temperatur abnehmen, wie es oben in der That der Fall ist.

Die obigen Werthe gestatten eine Vergleichung mit den Resultaten, welche Hr. Guglielmo in der neuesten Zeit mitgetheilt hat. Derselbe findet bei 18°; ebenfalls aus Verdampfungsversuchen²⁾, für die Quotienten:

$$\frac{H_2O - H_2}{H_2O - CO_2} = 5,60; \quad \frac{H_2O - Luft}{H_2O - CO_2} = 1,59.$$

Diese Zahlen³⁾ stimmen nahe überein mit den Werthen 5,52 und 1,56, welche von mir bei 49,5° gefunden sind.

Um die beobachteten Diffusionscoëfficienten mit der von Hrn. Stefan aufgestellten Formel zu vergleichen, wurden erstere auf 0° reducirt; zu diesem Zwecke wurde die Formel:

$$k_t = k_0 \left(\frac{273 + t}{273} \right)^2$$

1) Winkelmann, Wied. Ann. 22. p. 18. 1884.

2) Guglielmo, Beibl. 8. p. 20. 1884.

3) Frühere Versuche des Hrn. Guglielmo (Beibl. 6. p. 477. 1882) welche nicht so genau zu sein scheinen, haben bei 15°, statt der obigen Zahlen, 6,29, resp. 1,71 ergeben.

verwendet. Man erhält:

	Diffusionscoefficient bei 0° berechnet aus dem Werthe		Diff. in Proc.
	bei 92,4°	bei 49,5°	
Wasserdampf-Wasserstoff	0,658	0,716	8,5
„ -Luft . . .	0,193	0,203	5,0
„ -Kohlensäure	0,133	0,130	-2,3

Setzt man für die moleculare Weglänge¹⁾:

Wasserdampf . . .	63,3 . 10 ⁻⁷ cm
Wasserstoff . . .	176,5 „ „
Luft . . .	95,0 „ „
Kohlensäure . . .	64,6 „ „

so erhält man nach der Stefan'schen Formel:

$$k = \frac{3\pi \cdot \sqrt{2}}{8} \cdot \omega \cdot \sqrt{m} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}} \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}}\right)^2}$$

für die Diffusionscoefficienten:

Wasserdampf-Wasserstoff .	0,738
„ -Luft . . .	0,230
„ -Kohlensäure .	0,179

Die Werthe sind sämmtlich grösser als die beobachteten.

Legt man dagegen die kleineren Zahlen zu Grunde, welche Hr. Puluj²⁾ für die Weglänge angibt:

Wasserdampf . . .	58 . 10 ⁻⁷ cm
Wasserstoff . . .	151 „ „
Luft . . .	82 „ „

so findet man:

	Diffusionscoefficient
Wasserdampf-Wasserstoff . .	0,652
„ -Luft . . .	0,203

Um die Weglänge der Kohlensäure aus der Puluj'schen Angabe zu erhalten, wurde der Reibungscoefficient der Kohlensäure, bezogen auf Luft als Einheit, 0,806 gesetzt³⁾; man erhält so 54 . 10⁻⁷. Der Diffusionscoefficient nach der Stefan'schen Formel wird dann für:

Wasserdampf-Kohlensäure	0,155.
-------------------------	--------

1) Winkelmann, Wied. Ann. **22**. p. 16. 1884.

1) Puluj, Beibl. **3**. p. 463. 1879.

2) Kundt u. Warburg, Pogg. Ann. **155**. p. 540. 1875.

Nach dieser Berechnung stimmen die theoretischen Werthe für Wasserdampf-Wasserstoff und Wasserdampf-Luft nahe mit den Beobachtungen überein; nur Wasserdampf-Kohlensäure zeigt noch eine grössere Differenz.

Hohenheim, März 1884.

III. *Kritisches zur Theorie der Polarisation des gebeugten Lichtes;¹⁾ von J. Fröhlich in Budapest.*

1. Bisherige Arbeiten. — 2. Unzureichende Entwicklungen. — 3. Gleichungen der Lichtbewegung. — 4. Wellenfunctionen an der Beugungsfläche und im gebeugten Licht. — 5. Die von Réthy und W. König benutzten zwei Lösungen. — 6. Ausdrücke der Elongation in beiden Systemen. — 7. Anwendung derselben auf ebene Erscheinungen. — 8. Herleitung der Réthy'schen und W. König'schen Formeln, Vergleichung mit der Erfahrung; Widerspruch. — 9. Drittes System von Lösungen. — 10. Ausdrücke der Elongationen. — 11. Anwendung derselben auf ebene Erscheinungen; Möglichkeit der Beschreibung. — 12. Vereinfachung der Ausdrücke. — 13. Rückblick und Schlussbemerkung.

§ 1. Uebersicht der bisherigen Arbeiten.

Der Polarisationszustand, welchen das durch ein Gitter hindurch gehende oder von einem solchen Gitter reflectirte und gebeugte, im allgemeinen geradlinig polarisirte Licht erfahrungsgemäss zeigt²⁾, wurde zuerst von Réthy mittels Kugellwellen einfacher Art erklärt.

Réthy³⁾ geht von der Elasticitätstheorie des Lichtes aus, legt die für den unendlichen, homogenen Raum geltenden Bewegungsgleichungen des Aethers zu Grunde und betrachtet insbesondere zwei von Kirchhoff herrührende einfache Lösungen derselben, leitet aus ihnen zwei Formeln für das Amplitudenverhältniss des in der Ebene gebeugten, linear polarisirten Lichtes ab und weist mittels nume-

1) Gelesen in der Sitzung der Ung. Akademie vom 21. April 1884.

2) Fröhlich, Wied. Ann. I. p. 321. 1877.

3) Réthy, Wied. Ann. II. p. 504. 1880.

rischer Vergleichung eine genügende Uebereinstimmung zwischen Erfahrung und Theorie nach.

Diese Betrachtungsweise wurde vor kurzem von W. König auf die Polarisation des von Lamellengittern reflectirten und gebeugten Lichtes angewendet, welches elliptische Polarisation von grosser Regelmässigkeit zeigt.³⁾

Indem W. König die von Réthy benutzten Lösungen mit constanten Anfangsphasen ergänzt, bildet er aus denselben eine Formel für die Phasendifferenz des in der Ebene gebeugten, elliptisch polarisirten Lichtes, mittels welcher seine diesbezüglichen Beobachtungen in genügender Weise dargestellt werden.

Man kann daher sagen, die obigen Arbeiten erweisen, für den Fall einer Beugung, dass in Bezug auf das Amplitudenverhältniss des geradlinig polarisirten Lichtes und auf die Phasendifferenz des elliptisch polarisirten Lichtes eine vollkommen genügende Uebereinstimmung der Réthy-Kirchhoff'schen Formeln mit der Erfahrung stattfindet.

Es muss indess hervorgehoben werden, dass die Wirkung der Beugung auf Phase und Amplitude bei Bildung des Amplitudenverhältnisses für das linear polarisirte Licht (Réthy), und bei Bildung der Phasendifferenz für das elliptisch polarisirte Licht (W. König) von selbst aus der Rechnung fortfällt.

§ 2. Diese Entwicklungen sind unzureichend.

Man findet aber ein wesentlich anderes Resultat, wenn man die Eigenschaften der beiden Componenten des gebeugten Lichtes, nämlich die zur Einfallsebene parallele und die darauf senkrechte Schwingungscomponente einzeln, gesondert untersucht und mit den von Réthy und W. König benutzten Lösungen vergleicht; es zeigt sich nämlich, dass bei einer solchen Vergleichung die zwei Systeme der Lösung mit der Erfahrung im grössten Widerspruche sind.

Will man nun die für den unbegrenzten Raum geltenden Gleichungen zum Ausgangspunkt nehmen, so folgt daraus die Nothwendigkeit der Aufstellung einer solchen Lö-

1) W. König, Wied. Ann. 17. p. 1016. 1882.

sung, die nicht nur das Amplitudenverhältniss oder die Phasendifferenz, sondern auch das Verhalten der einzelnen Componenten wiedergibt.

Im Folgenden wollen wir vorerst erweisen, dass die von Réthy und W. König benutzten Lösungssysteme nur einen Theil des Polarisationszustandes des gebeugten Lichtes darstellen, hingegen mit einem anderen Theil desselben in vollem Widerspruch sind.

Hierauf soll aus den, für den unbegrenzten elastischen Raum geltenden Bewegungsgleichungen mittels der beiden obigen Lösungen ein anderes gebildet werden, das geeignet ist, diesen Polarisationszustand vollständig wiederzugeben.

Anmerkung. Wie man aus einem bekannten Lösungssystem ein anderes, allgemeineres System bilden kann, zeigten Fröhlich¹⁾ Réthy²⁾ und Kirchhoff.³⁾

§ 3. Gleichungen der Lichtbewegung im homogenen, unendlichen, elastischen Raume.

Bezeichnet man, wie gebräuchlich, mit u, v, w die Componenten der Elongation eines Theilchens, das in der Ruhelage die Coordinaten x, y, z hat, so gilt für transversale Schwingungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \Delta v, & \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \Delta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Nach Clebsch lassen sich die Lösungen dieser Gleichungen schreiben:

$$(2) \quad u = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x};$$

hier bedeuten U, V, W Wellenfunctionen, die ebenso wie u, v, w der typischen Gleichung:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi$$

Genüge leisten.

1) Fröhlich, Wied. Ann. 6. p. 422. Anmerkung. 1879.

2) Réthy, Wied. Ann. 11. p. 507. 1880.

3) Kirchhoff, Sitzungsber. der Berl. Acad. Math.-Phys. Classe vom 22. Juni 1882 p. 643.

Sollen die Lösungen Schwingungen von homogenem (einfarbigem) Licht darstellen, so müssen die sechs Functionen $u, \dots, W$ noch der charakteristischen Gleichung der Periodicität:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \varphi, \quad \text{oder:}$$

$$(5) \quad \Delta \varphi = - k^2 \varphi$$

genügen, wobei:

$$(6) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

und T, λ die Periode, bez. Wellenlänge der Schwingung bedeutet.

§ 4. Wellenfunctionen an der Beugungsfläche und im gebeugten Lichte.

Im Folgenden bezeichne U, V, W die Wellenfunctionen an der Beugungsfläche, U_0, V_0, W_0 dieselben im gebeugten Lichte, ferner $x_1, y_1, z_1, x, y, z, x_0, y_0, z_0$ die Coordinaten der Lichtquelle, eines beliebigen Punktes der Beugungsfläche und eines beliebigen Punktes im gebeugten Lichte, schliesslich r_1 und r_0 die Entfernung des Flächenpunktes (xyz) vom Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ und $(x_0 y_0 z_0)$, df das Element der Beugungsfläche.

Wir wählen nun für die Wellenfunctionen an der Beugungsfläche die folgenden einfachsten Ausdrücke:

$$(7) \quad \begin{cases} U = \frac{A}{r_1} \cos \left[2\pi \left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - \alpha \right], \\ V = \frac{B}{r_1} \cos \left[2\pi \left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - \beta \right], \\ W = \frac{C}{r_1} \cos \left[2\pi \left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - \gamma \right], \end{cases}$$

Der allgemeinen Beugungstheorie zufolge sind die Wellenfunctionen im gebeugten Lichte die folgenden:

$$(8) \quad U_0 = \frac{A}{2\lambda r_1 r_0} \left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \int \sin \left[2\pi \left(\frac{r_0 + r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - \alpha \right] df. ^1)$$

¹⁾ Kirchhoff, Sitzungsber. d. Berl. Acad. Math.-Phys. Classe vom 22. Juni 1882, p. 663 u. 664.

Die Werthe von V_0 und W_0 finden sich durch cyklische Vertauschung von A und α ; alle drei Functionen genügen den Gleichungen (3), (4), (5).

Es bedeuten dabei $\partial r_1 / \partial N$ und $\partial r_0 / \partial N$ die Cosinus der Winkel, die zwischen der positiven Normale N des Elementes df und den positiven Richtungen von r_1 und r_0 liegen; ferner wurde die beugende Fläche als eine Ebene vorausgesetzt.

Wir setzen nun zur Abkürzung:

$$(9) \quad \begin{cases} A = \frac{A}{2\lambda r_1}, & B = \frac{B}{2\lambda r_1}, & C = \frac{F}{2\lambda r_1}, \\ c = \left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \int \cos \left[2\pi \frac{r_0 + r_1}{\lambda} \right] df, \\ s = \left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \int \sin \left[2\pi \frac{r_0 + r_1}{\lambda} \right] df, & \vartheta = 2\pi \frac{t}{T}, \end{cases}$$

es wird aus (8):

$$(10) \quad \begin{cases} U_0 = \frac{A}{r_0} \{ s \cos(\vartheta + \alpha) - c \sin(\vartheta + \alpha) \}, \\ V_0 = \frac{B}{r_0} \{ s \cos(\vartheta + \beta) - c \sin(\vartheta + \beta) \}, \\ W_0 = \frac{C}{r_0} \{ s \cos(\vartheta + \gamma) - c \sin(\vartheta + \gamma) \}. \end{cases}$$

Um diese Ausdrücke zu vereinfachen, führen wir ein:

$$(11) \quad \begin{cases} c = J \sin \omega, & \begin{cases} J^2 = c^2 + s^2, \\ \operatorname{tg} \omega = \frac{c}{s}, \end{cases} \\ s = J \cos \omega, \end{cases}$$

und es wird:

$$(12) \quad \begin{cases} U_0 = \frac{A}{r_0} J \cos(\vartheta + \omega + \alpha), & V_0 = \frac{B}{r_0} J \cos(\vartheta + \omega + \beta), \\ W_0 = \frac{C}{r_0} J \cos(\vartheta + \omega + \gamma). \end{cases}$$

Es bildet nun dieses System von Wellenfunctionen im gebeugten Lichte den Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen.

Anmerkung. Wenn die Functionen U_0 , V_0 , W_0 nach den Coordinaten x_0 , y_0 , z_0 differentiirt werden, so können alle die Glieder vernachlässigt werden, die r_0 im Nenner in einer höheren als der ersten Potenz enthalten; es bleiben dann nur die von c und s herrührenden Glieder.

Man hat so z. B.:

$$(13) \quad \frac{\partial c}{\partial x_0} = \frac{dc}{dr_0} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial x_0} = -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial x_0} \left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \int \sin \left[2\pi \cdot \frac{r_0 + r_1}{\lambda} \right] df.$$

u. s. f.

Bedeutet nun α , β , γ die Richtungswinkel des gebeugten Strahles r_0 , so wird:

$$(14) \quad \frac{\partial r_0}{\partial x_0} = \cos \alpha, \quad \frac{\partial r_0}{\partial y_0} = \cos \beta, \quad \frac{\partial r_0}{\partial z_0} = \cos \gamma,$$

und nach (6), (9) und (13):

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial c}{\partial x_0} = -sk \cos \alpha, & \frac{\partial c}{\partial y_0} = -sk \cos \beta, & \frac{\partial c}{\partial z_0} = -sk \cos \gamma \\ \frac{\partial s}{\partial x_0} = +ck \cos \alpha, & \frac{\partial s}{\partial y_0} = +ck \cos \beta, & \frac{\partial s}{\partial z_0} = +ck \cos \gamma \end{cases}$$

§ 5. Die von Réthy und W. König benutzten zwei charakteristischen, particularen Lösungen.

I. Réthy's erstes System finden wir aus (12), wenn wir für die Elongationen im gebeugten Lichte setzen:

$$(16) \quad u = \frac{\partial V_0}{\partial x_0} - \frac{\partial W_0}{\partial y_0}, \quad v = \frac{\partial W_0}{\partial x_0} - \frac{\partial U_0}{\partial z_0}, \quad w = \frac{\partial U_0}{\partial y_0} - \frac{\partial V_0}{\partial z_0}.$$

Diese Werthe von u , v , w leisten den Gleichungen (1) und (5) Genüge.

II. Réthy's zweites System finden wir aus dem ersten, wenn wir für die Elongationen aus (16) setzen:

$$(17) \quad u' = \frac{\partial v}{\partial z_0} - \frac{\partial w}{\partial y_0}, \quad v' = \frac{\partial w}{\partial x_0} - \frac{\partial u}{\partial z_0}, \quad w' = \frac{\partial u}{\partial y_0} - \frac{\partial v}{\partial x_0}$$

das ist:

$$(17_a) \quad u' = \frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ \frac{\partial V_0}{\partial y_0} + \frac{\partial W_0}{\partial z_0} \right\} - \left\{ \frac{\partial^2 U_0}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial z_0^2} \right\} \text{ u. s. f.}$$

Anmerkung. Wenn man diesen Vorgang fortsetzt und das so entstehende System schreibt:

$$(17_b) \quad u'' = \frac{\partial v'}{\partial z_0} - \frac{\partial w'}{\partial y_0}, \quad v'' = \frac{\partial w'}{\partial x_0} - \frac{\partial u'}{\partial z_0}, \quad w'' = \frac{\partial u'}{\partial y_0} - \frac{\partial v'}{\partial x_0},$$

so kann dies, nach vollzogener Substitution aus (17_a) geschrieben werden:

$$u'' = -\frac{\partial}{\partial x_0} (\Delta V_0) + \frac{\partial}{\partial y_0} (\Delta W_0),$$

aber es ist nach Gleichung (5): $\Delta U_0 = -k^2 U_0$, u. s. f., so dass, mit Berücksichtigung der Gleichungen (16):

$$(17_c) \quad u'' = k^2 u, \quad v'' = k^2 v, \quad w'' = k^2 w,$$

und diese Elongationen stimmen der Form nach mit denen des ersten Systemes, (16), gänzlich überein, da k^2 nur eine Constante ist.

Man ersieht daraus, dass die Fortsetzung des obigen Vorganges keinen neuen Typus liefert, sondern nur abwechselnd das erste und zweite System gibt.

§ 6. Explícite Ausdrücke der Elongationen im ersten und zweiten System.

Man berechne die Ausdrücke (16) und (17) aus den Gleichungen (10) und vernachlässige dabei die Glieder, welche r_0 im Nenner enthalten, gegen diejenigen, die λ im Nenner haben, ausserdem setzen wir zur Vereinfachung, nach vollzogener Rechnung überall $r_0 = 1$.

I. Für das erste System findet man mit Benutzung der Abkürzungen unter (11):

$$u = Jk \{ B \cos c \sin(\vartheta + \omega + \beta) - C \cos b \sin(\vartheta + \omega + \gamma) \}$$

u. s. f. In die gewöhnliche Form einfach harmonischer Schwingungen gebracht, hat man:

$$(18) \quad \begin{cases} u = J\mathfrak{A} \sin(\vartheta + \omega + \varphi), & v = J\mathfrak{B} \sin(\vartheta + \omega + \chi) \\ w = J\mathfrak{C} \sin(\vartheta + \omega + \psi); \end{cases}$$

dabei ist:

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{1}{k^2} \mathfrak{A}^2 = B^2 \cos^2 c + C^2 \cos^2 b - 2BC \cos(\beta - \gamma) \cos b \cos c \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{B \sin \beta \cos c - C \sin \gamma \cos b}{B \cos \beta \cos c - C \cos \gamma \cos b}, \end{cases}$$

während die Werthe von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; χ , ψ aus (19) durch cyklische Vertauschung der Buchstaben folgen.

II. Für das zweite System findet man, mit Benutzung der Abkürzungen unter (11):

$$u' = Jk^2 \{ A(1 - \cos^2 a) \cos(\vartheta + \omega + \alpha) - \cos a [B \cos b \cos(\vartheta + \omega + \beta) + C \cos c \cos(\vartheta + \omega + \gamma)] \}$$

u. s. f. Auch diese Ausdrücke, in die Form gewöhnlicher einfach harmonischer Schwingungen gebracht, werden:

$$(20) \quad \begin{cases} u' = J\mathfrak{A}' \cos(\vartheta + \omega + \varphi'), & v' = J\mathfrak{B}' \cos(\vartheta + \omega + \chi') \\ w' = J\mathfrak{C}' \cos(\vartheta + \omega + \psi'), \end{cases}$$

dabei ist:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{k^4} \mathfrak{A}'^2 &= A^2 \sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha [B^2 \cos^2 \beta + C^2 \cos^2 \gamma \\ &\quad + 2BC \cos(\beta - \gamma) \cos \beta \cos \gamma] \\ &- 2A \sin^2 \alpha \cos \alpha [B \cos(\alpha - \beta) \cos \beta + C \cos(\gamma - \alpha) \cos \gamma] \\ \operatorname{tg} \psi' &= \frac{A \sin \alpha \sin^2 \alpha - \cos \alpha (B \sin \beta \cos \beta + C \sin \gamma \cos \gamma)}{A \cos \alpha \sin^2 \alpha - \cos \alpha (B \cos \beta \cos \beta + C \cos \gamma \cos \gamma)}. \end{aligned} \right.$$

während die Werthe von $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, χ' , ψ' aus (21) ebenfalls durch cyklische Vertauschung der Buchstaben folgen.

Die Ausdrücke (18) und (20) der Elongationen stellen einfache, harmonische Schwingungen dar, deren Phasen und Amplituden in der durch die Gleichungen (19) und (21) charakterisirten Weise von den Richtungswinkeln α , β , γ des gebeugten Strahles r_0 abhängen.

Dabei ist selbstverständlich, dass die Constanten A , B , C , α , β , γ in den beiden Systemen verschiedene Werthe haben können.

Man kann die Ausdrücke (18) bis (21) unmittelbar auf solche Beugungserscheinungen anwenden, bei welchen die gebeugten Strahlen im allgemeinen nicht in einer Ebene liegen, wie dies etwa bei solchen Erscheinungen der Fall ist, die mittels gekreuzter Gitter, oder Kreisgitter erzeugt werden, oder auch auf solche Art, dass man auf ein gewöhnliches optisches Gitter ein Lichtbündel in solcher Richtung fallen lässt, die nicht in der zur Furchenrichtung senkrechten Ebene liegt.

§ 7. Anwendung des ersten und zweiten Systemes auf Erscheinungen, die in einer Ebene liegen.

Es sei die XZ -Ebene zugleich die Beugungsebene; dann gilt für jeden Strahl:

$$(22) \quad \cos \beta = 0; \quad \cos \gamma = \sin \alpha.$$

I. Dann wird aus den charakteristischen Bestimmungsstücken des ersten Systemes, (19):

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A}^2 &= k^2 B^2 \sin^2 \alpha; \\ \mathfrak{B}^2 &= k^2 [A^2 \sin^2 \alpha + C^2 \cos^2 \alpha - 2AC \cos(\gamma - \alpha) \sin \alpha \cos \alpha]; \\ \mathfrak{C}^2 &= k^2 B^2 \cos^2 \alpha, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg} \beta; \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{A \sin \alpha \sin \alpha - C \sin \gamma \cos \alpha}{A \cos \alpha \sin \alpha - C \cos \gamma \cos \alpha}; \quad \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \beta. \end{aligned} \right.$$

II. Die Bestimmungsstücke des zweiten Systemes werden:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}'^2 = \frac{\mathfrak{C}'^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{\mathfrak{C}'^2}{\cos^2 \alpha} \\ = k^4 [A^2 \sin^2 \alpha + C^2 \cos^2 \alpha - 2AC \cos(\gamma - \alpha) \sin \alpha \cos \alpha]; \\ \mathfrak{B}'^2 = k^4 B^2 \\ \operatorname{tg} q' = \operatorname{tg} \psi' = \frac{A \sin \alpha \sin \alpha - C \sin \gamma \cos \alpha}{A \cos \alpha \sin \alpha - C \cos \gamma \cos \alpha}, \quad \operatorname{tg} \chi' = \operatorname{tg} \beta. \end{array} \right.$$

Man bemerkt sofort, dass hier:

$$(24_a) \quad \operatorname{tg} \chi = \operatorname{tg} q' = \operatorname{tg} \psi', \text{ und } \operatorname{tg} q = \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \chi'.$$

Die Bewegung, deren Amplituden und Phasen (23) und (24) darstellen, hängt einzig und allein vom Winkel α ab, den der gebeugte Strahl r_0 mit der zur Furchenrichtung senkrechten X -Axe einschliesst. Man bemerkt auch, dass in beiden Systemen (23) und (24) die in der Beugungsebene liegenden zwei Componenten u und w , bezüglich u' und w' dieselben, oder doch nur um ganze Vielfache von π verschiedene Phasen $q, q'; q', \psi'$ besitzen, (24_a), sodass $q = \psi + n\pi; q' = \psi' + n'\pi$; demnach lassen sich aus ihnen mittels (18) und (20) sofort die in der Einfallsebene liegenden, resultirenden Componenten $(u^2 + w^2)^{1/2}, (u'^2 + w'^2)^{1/2}$ bilden, während v und v' die auf dieser Ebene senkrechten Componenten sind. Indem wir auf solche Weise die Schwingungen auf je zwei Componenten (nämlich in der Einfallsebene liegenden und darauf senkrechten) reduciren, findet man:

I. Für die Componenten der Schwingung im ersten Systeme:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u^2 + w^2)^{1/2} = Jk B \sin(\vartheta + \omega + \beta) \\ v = Jk [A^2 \sin^2 \alpha + C^2 \cos^2 \alpha \\ - 2AC \cos(\gamma - \alpha) \sin \alpha \cos \alpha]^{1/2} \sin(\vartheta + \omega + \chi). \end{array} \right.$$

II. Für die Componenten der Schwingung im zweiten Systeme:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u'^2 + w'^2)^{1/2} = Jk^2 [A^2 \sin^2 \alpha + C^2 \cos^2 \alpha \\ - 2AC \cos(\gamma - \alpha) \sin \alpha \cos \alpha]^{1/2} \cos(\vartheta + \omega + \chi) \\ v' = Jk^2 B \cos(\vartheta + \omega + \beta). \end{array} \right.$$

Die so dargestellten zwei Gruppen zeigen sehr charakteristisch den verschiedenen Typus der beiden Lösungen. Man findet nämlich unmittelbar, dass

1) das Amplitudenverhältniss im ersten Systeme dem reciproken Werthe desselben Verhältnisses im zweiten Systeme gleich sei.

2) die Phasendifferenz der beiden Componenten haben in beiden Systemen denselben Werth, aber entgegengesetztes Vorzeichen.

Dies ist dasjenige Amplitudenverhältniss und diejenige Phasendifferenz, von welcher wir im § 1 erwähnten, dass sie mit der Erfahrung übereinstimmen; letzteres soll auch sofort erwiesen werden.

§ 8. Herleitung und Vergleichung mit der Erfahrung der Réthy'schen und W. König'schen Formeln; Widerspruch.

Wir verlegen die positive X -Axe in die Richtung des ungebeugten (d. i. des direct hindurchgehenden oder direct reflectirten) Strahles r_1 ; dann bedeutet α den zwischen dem ungebeugten und dem beliebigen gebeugten Strahle r_0 liegenden Beugungswinkel.

I. Wählen wir alle Anfangsphasen gleich, so ist: ¹

$$(27) \quad \alpha = \beta = \gamma,$$

und dies führt auf linear polarisirtes Licht.

Bezeichnet η und η' das Polarisationsazimuth dieses Lichtes (gerechnet von der Normale der Beugungsebene) im ersten und zweiten Systeme, so wird das Amplitudenverhältniss aus (25) und (26):

$$\frac{\operatorname{tg} \eta}{\operatorname{cotg} \eta'} = \frac{A}{B} \sin \alpha - \frac{C}{B} \cos \alpha,$$

oder, wenn η_0 und η'_0 die Werthe von η und η' bei $\alpha = 0$, d. i. für den ungebeugten Strahl bezeichnen:

$$(28) \quad \begin{cases} \text{aus dem ersten Systeme} \dots \operatorname{tg} \eta &= \frac{A}{B} \sin \alpha + \operatorname{tg} \eta_0 \cos \alpha \\ \text{aus dem zweiten Systeme} \dots \operatorname{cotg} \eta' &= \frac{A}{B} \sin \alpha + \operatorname{cotg} \eta'_0 \cos \alpha. \end{cases}$$

Dies sind die beiden von Réthy benutzten Formeln¹⁾, die mit der Erfahrung genügend übereinstimmen.

1) Réthy, l. c. p. 509. 510. (5). (4).

II. Bleiben die Anfangsphasen verschieden, so führt dies zu elliptisch polarisirtem Lichte, und man findet aus (25) und (26) das Amplitudenverhältniss, hingegen aus (23) und (24) die Phasendifferenz für beide Systeme:

$$(29) \begin{cases} \left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \eta \\ \cotg \eta' \end{aligned} \right\} = \frac{1}{B} [A^2 \sin^2 \alpha + C^2 \cos^2 \alpha - 2AC \cos(\gamma - \alpha) \sin \alpha \cos \alpha]^{1/2} \\ \operatorname{tg}(\chi - \beta) = \frac{A \sin(\alpha - \beta) \sin \alpha + C \sin(\beta - \gamma) \cos \alpha}{A \cos(\alpha - \beta) \sin \alpha - C \cos(\beta - \gamma) \cos \alpha} = -\operatorname{tg}(\beta - \chi). \end{cases}$$

Dies sind die von W. König benutzten Formeln¹⁾; die letztere stimmt mit seinen Beobachtungen genügend überein.

Aber ein Blick auf die Gleichungen (25) und (26) lehrt, dass im ersten Systeme die in der Beugungsebene liegende Componente $(u^2 + w^2)^{1/2}$ die Amplitude JkB und die Phase $(\vartheta + \omega + \beta)$ hat; genau dieselben Bestimmungsstücke besitzt im zweiten Systeme die zur Beugungsebene senkrechte Componente v' mit der Bemerkung, dass zu deren Amplitude der Factor k tritt. Diese Amplituden und Phasen hängen daher nur insofern von der Richtung α des gebeugten Strahles ab, als nach den Gleichungen (9) und (11) die Grössen J und ω , die Charakteristika der Beugung, Functionen von α sind, die für jede beugende Oeffnung leicht berechenbar und daher als bekannt anzusehen sind.

Aber gerade diese Verhältnisse stehen mit der Erfahrung in vollem Widerspruch.

Um diese Behauptung zu beweisen, betrachten wir nur den einfachsten Fall, wenn solches Licht, das entweder nur parallel oder nur senkrecht zur Beugungsebene polarisirt ist, senkrecht auf die Gitterfläche einfällt.

Es ist dann in Gleichung (9) $\partial r_1 / \partial N = 1$, und ist der Werth von J nach den Formeln (9) und (11) für symmetrisch zur Gitternormale liegende, gebeugte Strahlen derselbe.

Man kann demnach sagen, dass dann, zuzuge der bisher entwickelten Formeln, nach den Gleichungen (25) und (26) die Intensität des gebeugten Lichtes dieselbe sein soll, bei symmetrisch zu beiden Seiten der Gitternormale liegenden gebeugten Strahlen:

1) für Licht, das parallel zur Einfallsebene polarisirt

1) W. König, l. c. p. 1030. (I). (II). (III).

ist, wenn die Bewegung nach dem ersten System, Gleichung (25) geschehen würde,

2) für Licht, das senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist, wenn die Bewegung nach dem zweiten Systeme, Gleichung (26) geschehen würde.

Dem ist aber durchaus nicht so, wie dies directe Beobachtungen ergeben, und zwar besonders bei Erscheinungen, die mittels Metallgitter hervorgerufen werden, und wo der Unterschied das Sechs- bis Achtfache des ganzen Werthes beträgt.¹⁾

Man kann demnach die von Réthy und W. König benutzten Formeln wohl als solche gelten lassen, die einen beschränkten Theil der Eigenschaften des gebeugten Lichtes genähert wiedergeben; keinesfalls aber kann man denselben, bei dem gegenwärtigen Stande unserer Erfahrung eine tiefere, sondern nur rein empirische Bedeutung zuschreiben, da sie nicht im Stande sind, wesentliche Eigenschaften der Amplitude und Phase, das ist den vollständigen Polarisationszustand des gebeugten Lichtes wiederzugeben.

Ein derartiger theoretischer Versuch, dies unter der Voraussetzung zu thun, dass die Bewegung der Theilchen an der beugenden Oeffnung verschieden ist, geschah in der letzten Zeit.²⁾

§. 9. Dritte charakteristische particulare Lösung.

Die bisher betrachteten zwei Systeme von Lösungen, nämlich $u, v, w; u', v', w'$ leisten den Bedingungen des §. 3 selbst dann noch Genüge, wenn die Constanten A, B, Γ , bezüglich $A, B, C; \alpha, \beta, \gamma$ in den beiden Systemen von verschiedenem Werthe sind.

Es sollen im Folgenden die zum ersten und zum zweiten Systeme gehörigen Constanten mittels der Indices $_1$ und $_2$ unterschieden werden, während die zugehörigen Wellenfunktionen im gebeugten Lichte durch $U_0, V_0, W_0; U_a, V_a, W_a$ und die Elongationen durch $u_1, v_1, w_1; u_2', v_2', w_2'$ bezeichnet werden.

1) Fröhlich, Wied. Ann. 15. p. 587—589. 1892.

2) Fröhlich, l. p. 596.

Es wird demnach aus den Gleichungen (12):

$$(30_a) \left\{ \begin{aligned} U_{0_i} &= \frac{A_i J}{r_0} \cos(\vartheta + \omega + \alpha_i), \\ V_{0_i} &= \frac{B_i J}{r_0} \cos(\vartheta + \omega + \beta_i), \\ W_{0_i} &= \frac{C_i J}{r_0} \cos(\vartheta + \omega + \gamma_i). \end{aligned} \right. \quad (30_b) \left\{ \begin{aligned} U_{0_i} &= \frac{A_i J}{r_0} \cos(\vartheta + \omega + \alpha_i), \\ V_{0_i} &= \frac{B_i J}{r_0} \cos(\vartheta + \omega + \beta_i), \\ W_{0_i} &= \frac{C_i J}{r_0} \cos(\vartheta + \omega + \gamma_i), \end{aligned} \right.$$

ferner aus Formeln (16) und (17_a):

$$(31) \left\{ \begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial V_{0_1}}{\partial z_0} - \frac{\partial W_{0_1}}{\partial y_0}, \text{ u. s. f.} \\ u_2' &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ \frac{\partial V_{0_2}}{\partial y_0} + \frac{\partial W_{0_2}}{\partial z_0} \right\} - \left\{ \frac{\partial^2 U_{0_2}}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 U_{0_2}}{\partial z_0^2} \right\}, \text{ u. s. f.} \end{aligned} \right.$$

Aus diesen beiden Systemen bilden wir durch Addition ein anderes, allgemeines und ebenfalls charakteristisches System einer particularen Lösung, das wir drittes System nennen, und dessen zugehörige Elongationen wir mit u_3, v_3, w_3 bezeichnen.

Wir setzen für diese:

$$(32) \quad u_3 = u_1 + \frac{1}{k} u_2', \quad v_3 = v_1 + \frac{1}{k} v_2', \quad w_3 = w_1 + \frac{1}{k} w_2'$$

und bemerken sofort, dass u_3, v_3, w_3 den Bedingungen des § 3 vollständig entsprechen.

Anmerkung. Es lässt sich hier leicht zeigen, dass die Fortsetzung des in § 5 angewandten Vorganges zur Bildung der Elongation hier zu keinem neuen Typus führt.

Setzt man nämlich:

$$u_4 = \frac{\partial v_3}{\partial x_0} - \frac{\partial w_3}{\partial y_0} = \frac{\partial v_1}{\partial x_0} - \frac{\partial w_1}{\partial y_0} + \frac{1}{k} \left(\frac{\partial v_2'}{\partial x_0} - \frac{\partial w_2'}{\partial y_0} \right)$$

und beachtet die Formeln (17) und (17_b) des § 5, so findet man:

$$u_4 = u_1' + \frac{1}{k} u_2'',$$

oder nach Formel (17_c):

$$u_4 = u_1' + k u_3,$$

schliesslich:

$$(33) \quad \frac{1}{k} u_4 = u_2 + \frac{1}{k} u_1'.$$

Dieser Ausdruck stimmt der Form nach gänzlich überein mit Formel (32): $u_3 = u_1 + (1/k) u_2'$; der einzige, aber unwesent-

liche Unterschied zwischen u_3 und $(1/k)u_4$ ist der, dass die Constanten $A_1, \dots \gamma_1$ und $A_2, \dots \gamma_2$ ihre Plätze gegenseitig vertauschen.

Würde man z. B. u_3 und $(1/k)u_4$ so combiniren, dass man setzte:

$$u_3 + \frac{1}{k} u_4 = (u_1 + u_2) + \frac{1}{k} (u_1' + u_2'),$$

so sieht man sogleich, dass dies dieselbe Form ist, wie Formel (32). Man findet daher auf diesem Wege nichts Neues.

Es bleibt nun noch zu erweisen, dass dieses dritte charakteristische System zu solchen Formeln führt, die zur Darstellung der Erfahrung vollkommen geeignet sind.

§ 10. Explicite Ausdrücke der Elongationen im dritten System.

Nach § 6 sind die einzelnen Componenten der Elongationen:

$$\begin{aligned} u_1 &= Jk \{ B_1 \cos c \cos (\vartheta + \omega + \beta_1) - C_1 \cos b \sin (\vartheta + \omega + \gamma_1), \\ \frac{1}{k} u_2' &= Jk \{ A_2 (1 - \cos^2 a) \cos (\vartheta + \omega + \alpha_2) \\ &\quad - \cos a [B_2 \cos b \cos (\vartheta + \omega + \beta_2) + C_2 \cos c \cos (\vartheta + \omega + \gamma_2)] \} \end{aligned}$$

u. s. f. Bildet man aus diesen nach dem Schema (32) $u_3 = u_1 + (1/k)u_2'$ die Elongationen u_3, v_3, w_3 und bringt sie in die Form einfacher harmonischer Schwingungen, so entsteht:

$$(34) \quad \begin{cases} u_3 = J\mathfrak{A}_3 \cos (\vartheta + \omega + \varphi_3), & v_3 = J\mathfrak{B}_3 \cos (\vartheta + \omega + \chi_3), \\ w_3 = J\mathfrak{C}_3 \cos (\vartheta + \omega + \psi_3), \end{cases}$$

und es sind die Werthe der Amplituden und der Phasen:

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{k^2} \mathfrak{A}_3^2 &= A_2^2 \sin^4 a + B_1^2 \cos^2 c + C_1^2 \cos^2 b + \cos^2 a (B_2^2 \cos^2 b \\ &\quad + C_2^2 \cos^2 c) \\ &\quad - 2 \sin^2 a \{ A_2 B_1 \sin (\alpha_2 - \beta_1) \cos c + A_2 C_1 \sin (\gamma_1 - \alpha_2) \cos b \\ &\quad + \cos a (A_2 B_2 \cos (\alpha_2 - \beta_2) \cos b + A_2 C_2 \cos (\gamma_2 - \alpha_2) \cos c) \} \\ &\quad - 2 \cos a \{ B_1 B_2 \sin (\beta_1 - \beta_2) \cos b \cos c + B_1 C_2 \sin (\beta_1 - \gamma_2) \cos^2 c \\ &\quad + B_2 C_1 \sin (\beta_2 - \gamma_1) \cos^2 b + B_2 C_2 \cos (\beta_2 - \gamma_2) \cos a \cos b \\ &\quad - C_1 C_2 \sin (\gamma_1 - \gamma_2) \cos b \cos c \} - 2 B_1 C_1 \cos (\beta_1 - \gamma_1) \cos b \cos c \\ &\quad - A_2 \sin \alpha_2 \sin^2 a + B_1 \cos \beta_1 \cos c + B_2 \sin \beta_2 \cos a \cos b \\ &\quad - C_1 \cos \gamma_1 \cos b + C_2 \sin \gamma_2 \cos a \cos c \\ \text{tg } \varphi_3 &= - \frac{+ A_2 \cos \alpha_2 \sin^2 a + B_1 \sin \beta_1 \cos c - B_2 \cos \beta_2 \cos a \cos b}{- C_1 \sin \gamma_1 \cos b - C_2 \cos \gamma_2 \cos a \cos c} \end{aligned} \right.$$

Die Werthe von $\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{C}_3$, χ_3 , ψ_3 finden sich aus (35) durch cyklische Vertauschung der Buchstaben.

Die Ausdrücke (34) und (35) beziehen sich im allgemeinen auf räumlich gebeugtes Licht (s. die letzte Alinea des § 6); hier wollen wir aber nur die einfacheren Fälle untersuchen.

§ 11. Anwendung des dritten Systemes auf Erscheinungen, die in einer Ebene liegen; Möglichkeit der Beschreibung.

Es sei auch hier die XZ -Ebene die Beugungsebene, und somit: $\cos b = 0$, $\cos c = \sin a$.

Man findet dann aus (35) für $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{C}_3$ Werthe, die sich voneinander nur durch die Coefficienten $\sin a$ und $\cos a$ unterscheiden, während φ_3 und ψ_3 gleich sind.

Es wird aus (35):

$$(36) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{D}_3^2 &= \frac{1}{\sin^2 a} \mathfrak{A}_3^2 = \frac{1}{\cos^2 a} \mathfrak{C}_3^2 = A_2^2 \sin^2 a + B_1^2 + C_2^2 \cos^2 a \\ &\quad - 2 A_2 B_1 \sin(\alpha_2 - \beta_1) \sin a - 2 A_2 C_2 \cos(\gamma_2 - \alpha_2) \sin a \cos a \\ &\quad \quad - 2 B_1 C_2 \sin(\beta_1 - \gamma_2) \cos a, \\ \mathfrak{B}_3^2 &= A_1^2 \sin^2 a + B_2^2 + C_1^2 \cos^2 a - 2 A_1 B_2 \sin(\alpha_1 - \beta_2) \sin a \\ &\quad - 2 A_1 C_1 \cos(\gamma_1 - \alpha_1) \sin a \cos a - 2 B_2 C_1 \sin(\beta_2 - \gamma_1) \cos a, \\ \operatorname{tg} \varphi_3 &= \operatorname{tg} \psi_3 = - \frac{A_2 \sin \alpha_2 \sin a + B_1 \cos \beta_1 + C_2 \sin \gamma_2 \cos a}{A_2 \cos \alpha_2 \sin a + B_1 \sin \beta_1 - C_2 \cos \gamma_2 \cos a}, \\ \operatorname{tg} \chi_3 &= - \frac{A_1 \cos \alpha_1 \sin a - B_2 \sin \beta_2 + C_1 \cos \gamma_1 \cos a}{A_1 \sin \alpha_1 \sin a + B_2 \cos \beta_2 - C_1 \sin \gamma_1 \cos a}. \end{aligned} \right.$$

Man hat nun im Sinne des § 7 für die zur Beugungs- (Einfall-) Ebene parallele und senkrechte Schwingungscomponente:

$$(37) (u_3^2 + w_3^2)^{1/2} = J \mathfrak{D}_3 \cos(\vartheta + \omega + \varphi_3), \quad v_3 = J \mathfrak{B}_3 \cos(\vartheta + \omega + \chi_3).$$

Diese zwei Ausdrücke (37) stellen elliptisch polarisirtes Licht dar; Amplitude und Phase jeder Componente sind verschieden.

Aus den Werthen (36) der Amplituden $\mathfrak{D}_3$ und $\mathfrak{B}_3$ und der Phasen φ_3 und χ_3 bemerkt man sofort, dass dieselben je für sich, und zwar in verschiedener Weise vom Richtungswinkel a des gebeugten Strahles abhängen.

Die Art der Abhängigkeit wird auch durch die Constanten $A_1, B_1, C_1; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; A_2, B_2, C_2; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ bestimmt.

Es braucht wohl kaum hinzugefügt werden, dass man mittels einer so grossen Anzahl von Constanten schon sehr complicirte und scheinbar ganz unregelmässige Erscheinungen darstellen kann, bei denen die Amplitude und Phase nicht nur von der Wirkung der Beugung [d. i. von J und ω , Formel (9) und (11)], sondern ausserdem noch nach (36) explicite von α abhängt.

Man kann also die mittels der Formeln (37) dargestellten Schwingungen zur Beschreibung solcher Erscheinungen anwenden, die in der That auftreten und beobachtet wurden.¹⁾

Das Amplitudenverhältniss und die Phasendifferenz werden aus den Formeln (36) wie folgt:

$$(38) \left\{ \begin{aligned} \frac{\mathfrak{B}_3^2}{\mathfrak{D}_3^2} &= \operatorname{tg}^2 \eta = \frac{A_1^2 \sin^2 \alpha + B_1^2 + C_1^2 \cos^2 \alpha - 2 B_1 C_1 \cos(\beta_1 - \gamma_1) \cos \alpha}{-2 A_1 C_1 \cos(\gamma_1 - \alpha_1) \sin \alpha \cos \alpha - 2 A_1 B_1 \sin(\alpha_1 - \beta_1) \sin \alpha} \\ &\quad - \frac{A_2^2 \sin^2 \alpha + B_2^2 + C_2^2 \cos^2 \alpha - 2 B_2 C_2 \cos(\beta_2 - \gamma_2) \cos \alpha}{-2 A_2 C_2 \cos(\gamma_2 - \alpha_2) \sin \alpha \cos \alpha - 2 A_2 B_2 \sin(\alpha_2 - \beta_2) \sin \alpha} \\ \operatorname{tg}(\chi_3 - \psi_3) &= \operatorname{tg}(\chi_3 - \varphi_3) = \\ &\quad - \frac{A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \sin^2 \alpha - B_1 B_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) - C_1 C_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) \cos^2 \alpha}{+ (B_1 C_1 \sin(\beta_1 - \gamma_1) + B_2 C_2 \sin(\beta_2 - \gamma_2)) \cos \alpha} \\ &\quad + \frac{(A_1 C_2 \cos(\alpha_1 - \gamma_2) + A_2 C_1 \cos(\alpha_2 - \gamma_1)) \sin \alpha \cos \alpha + (A_1 B_1 \sin(\alpha_1 - \beta_1) + A_2 B_2 \sin(\alpha_2 - \beta_2)) \sin \alpha}{- A_1 A_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \sin^2 \alpha + B_1 B_2 \sin(\beta_1 - \beta_2) - C_1 C_2 \sin(\gamma_1 - \gamma_2) \cos^2 \alpha} \\ &\quad + \frac{(B_1 C_1 \cos(\beta_1 - \gamma_1) - B_2 C_2 \cos(\beta_2 - \gamma_2)) \cos \alpha}{+ (A_1 C_2 \sin(\alpha_1 - \gamma_2) - A_2 C_1 \sin(\alpha_2 - \gamma_1)) \sin \alpha \cos \alpha + (-A_1 B_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1) + A_2 B_2 \cos(\alpha_2 - \beta_2)) \sin \alpha} \end{aligned} \right.$$

Diese Ausdrücke, die ebenfalls die erwähnten zwölf Constanten enthalten, schliessen die von Réthy und W. König benutzten Formeln (28) und (29) als Specialfälle ein.

§ 12. Vereinfachung der gewonnenen Ausdrücke.

Indem man über die Constanten in geeigneter Weise disponirt, lassen sich sehr verschiedenartige Erscheinungen darstellen.

Würde man z. B. setzen:

$$A_1 = A_2, \quad B_1 = B_2, \quad C_1 = C_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2,$$

1) Fröhlich, l. c. p. 587 u. 589.

so erhalte man:

$$\frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{D}_3} = 1; \quad \operatorname{tg}(\varphi_3 - \chi_3) = \operatorname{tg}(\psi_3 - \chi_3) = \infty.$$

Dies bedeutet circular polarisirtes Licht für jeden gebeugten Strahl, dessen Intensität jedoch von der zum Strahl gehörigen Richtung α abhängt.

Damit man jedoch zu solchen Ausdrücken gelange, die einfacher sind als (36), (37), (38), und die dennoch mit der Erfahrung übereinstimmen, setze man:

$$(39) \quad \text{I.} \quad \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0.$$

Dann folgt aus (36):

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}_3^2 = B_1^2 + (A_2 \sin \alpha - C_2 \cos \alpha)^2, \\ \mathfrak{B}_3^2 = B_2^2 + (A_1 \sin \alpha - C_1 \cos \alpha)^2, \\ \operatorname{tg} \varphi_3 = \operatorname{tg} \psi_3 = - \frac{B_1}{A_2 \sin \alpha - C_2 \cos \alpha}, \\ \operatorname{tg} \chi_3 = + \frac{A_1 \sin \alpha - C_1 \cos \alpha}{B_2}. \end{array} \right.$$

Auch hier hängt jede der Phasen und Amplituden explicite von α ab. Aus (38) wird aber:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathfrak{B}_3^2}{\mathfrak{D}_3^2} = \operatorname{tg}^2 \eta = \frac{B_2^2 + (A_1 \sin \alpha - C_1 \cos \alpha)^2}{B_1^2 + (A_2 \sin \alpha - C_2 \cos \alpha)^2}, \\ \operatorname{tg}(\chi_3 - \varphi_3) = \operatorname{tg}(\chi_3 - \psi_3) \\ = - \frac{A_1 A_2 \sin^2 \alpha + B_1 B_2 + C_1 C_2 \cos^2 \alpha - (A_1 C_2 + A_2 C_1) \sin \alpha \cos \alpha}{(B_1 C_1 - B_2 C_2) \cos \alpha - (A_1 B_1 - A_2 B_2) \sin \alpha}. \end{array} \right.$$

Selbst diese Ausdrücke vereinfachen sich, wenn man von den Constanten A_1 , B_1 , A_2 , C_2 eine oder zwei gleich Null setzt.

II. Man schreibe:

$$(42) \quad B_1 = B_2 = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma.$$

Es wird dann aus (36):

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}_3^2 = A_2^2 \sin^2 \alpha + C_2^2 \cos^2 \alpha - 2 A_2 C_2 \cos(\alpha - \gamma) \sin \alpha \cos \alpha, \\ \mathfrak{B}_3^2 = A_1^2 \sin^2 \alpha + C_1^2 \cos^2 \alpha - 2 A_1 C_1 \cos(\alpha - \gamma) \sin \alpha \cos \alpha, \\ \operatorname{tg} \varphi_3 = \operatorname{tg} \psi_3 = + \frac{A_2 \sin \alpha \sin \alpha - C_2 \sin \gamma \cos \alpha}{A_2 \cos \alpha \sin \alpha - C_2 \cos \gamma \cos \alpha}, \\ \operatorname{tg} \chi_3 = - \frac{A_1 \cos \alpha \sin \alpha - C_1 \cos \gamma \cos \alpha}{A_1 \sin \alpha \sin \alpha - C_1 \sin \gamma \cos \alpha}. \end{array} \right.$$

Auch diese Phasen und Amplituden hängen einzeln explicite von α ab, während $\mathfrak{B}_3^2/\mathfrak{D}_3^2$ und $\operatorname{tg}(\chi_3 - \varphi_3) = \operatorname{tg}(\chi_3 - \psi_3)$ sich aus (38) sofort ergeben.

§ 13. Rückblick und Schlussbemerkung.

Ausgangspunkt und Grundlage der vorstehenden Betrachtungen waren die partiellen Differentialgleichungen der Bewegung, die für einen unendlich ausgedehnten elastischen Körper Geltung haben, § 3. Wir zeigten, dass die von R  thy und W. König benutzten zwei L  sungssysteme mit den Erfahrungsthatsachen in Widerspruch seien (§§ 5–8).

Hierauf stellten wir ein drittes System von Lösungen auf, das zur Wiedergabe der Beobachtungen vollkommen geeignet ist (§ 9–12).

Eine numerische Vergleichung der aus dem letzten Systeme folgenden Formeln mit der Erfahrung erscheint hier wohl überflüssig, da, wie schon oben bemerkt, mittels zwölf Constanten schon ganz unregelmässig scheinende Erscheinungen dargestellt werden können.

Gelegentlich meiner Untersuchungen über die Intensität des gebeugten Lichtes bemerkte ich, dass es kein richtiger Vorgang ist, für solche optische Gitter, die W. König und ich benutzten, und deren Intervall nur sehr wenige Wellenlängen beträgt, die in (7) auftretenden Grössen $A, B, F; \alpha, \beta, \gamma$ als constant zu betrachten.

Ich habe daher dort¹⁾ einen anderen Vorgang gewählt; ich betrachtete die Bewegung an der Beugungsfläche als im allgemeinen unbekannt und setzte nur voraus, dass sie homogen sei.

Ich versuchte, aus den Beobachtungsdaten auf diejenigen Lichtbewegungen zurückzuschliessen, die an der Beugungsfläche möglicherweise stattfinden können, und fand, dass unendlich viele solcher Bewegungen möglich sind, deren jede die Beobachtungen mit der grössten Genauigkeit wiedergibt.

Auch jetzt halte ich noch diese Betrachtungsweise der Beugungserscheinungen für die richtige, trotzdem das in vorliegender Arbeit entwickelte dritte System von Lösungen die angeführten Erfahrungen beschreiben kann.

1) l. c. p. 596.

Ich erblicke in dieser hier gezeigten Lösungsmethode nur einen neuen Beweis des Erfahrungssatzes unserer⁹ Naturerkenntniss, dass man selbst aus den unwahrscheinlichsten Voraussetzungen Folgerungen ziehen und Formeln entwickeln kann, die sich durch geschickte Behandlung mit den Beobachtungen in Uebereinstimmung bringen lassen.

IV. Studien über Salzlösungen; von C. Bender.

(Hierzu Taf. II Fig. 1—3a—5.)

1. Allgemeine Gesichtspunkte. Correspondirende Lösungen.

Mischt man eine concentrirte Lösung eines Salzes (in Wasser) mit einer verdünnten Lösung desselben oder eines anderen Salzes, welches gegen ersteres vollständig chemisch inactiv ist, so werden im allgemeinen Mischungen entstehen, deren physikalische Constanten nicht mit denjenigen übereinstimmen, welche man als Mittelwerthe aus den Constanten der einzelnen Lösungen berechnet hat. Von dem Vorgang bei der Mischung solcher chemisch inactiver Salzlösungen kann man sich zwei Vorstellungen bilden. Man kann annehmen, die concentrirte Lösung entziehe der verdünnteren das Lösungswasser und umgekehrt. Man kann jedoch auch annehmen, die gelösten Salzmoecüle treten bei der Mischung zu Gruppen zusammen, welche sich in dem gemeinsamen Lösungsmittel lösen. Welche Auffassung auch die richtige sein mag, immerhin wird es Lösungen geben müssen, deren Concentrationsgrad von der Art ist, dass beide in Bezug auf eine oder mehrere Constanten indifferent in ihren Mischungen nebeneinander existiren. Lösungen dieser Art mögen correspondirende Lösungen genannt werden. Es sind daher: correspondirende Salzlösungen solche untereinander chemisch inactive Salzlösungen, welche die Eigenschaft haben, dass ihre physikalischen Constanten in die Mischungen gleicher oder verschiedener Volumina der Lösungen untereinander ohne

Veränderung ihres Werthes eintreten, sodass die physikalischen Constanten der Mischungen das arithmetische Mittel bilden aus den betreffenden physikalischen Constanten der Einzellösungen.

Dieser Satz, welcher späterhin eine Erweiterung erfahren wird, lässt sich allgemein darstellen durch:

$$k = \frac{a_1 k_1 + a_2 k_2}{a_1 + a_2},$$

in welcher Formel k_1 und k_2 die gleichartigen Constanten der Einzellösungen, a_1 und a_2 ihre, der Mischung unterworfenen Volumenmengen, und k die berechnete Constante und das arithmetische Mittel bedeuten.

Das Aufsuchen der correspondirenden Lösungen bildet den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung. Ich verdanke die Anregung zu dieser Arbeit Hrn. Prof. Dr. W. v. Bezold in München, welcher seiner Zeit so freundlich war, mir dieses Thema und speciell die Untersuchung der Ausdehnungscoëfficienten zur experimentellen Ausführung zu empfehlen. Dieser Anregung kam ich um so lieber nach, als systematische Untersuchungen in der angedeuteten Richtung vollständig fehlen. Ebenso schien mir der Gegenstand für die chemische Statik von weittragender Bedeutung zu sein. Selbst die analytische Chemie, und sogar die Theorie constanter Ketten kann durch systematisch in dieser Richtung ausgeführte Versuche wesentlich bereichert werden.

Die bis jetzt bekannten Eigenschaften der Salzlösungen lassen es wahrscheinlich erscheinen, dass jede Salzlösung als ein homogenes Individuum für sich betrachtet werden muss, welches, vom physikalischen Standpunkte aus, nicht in Wasser + Salz zu trennen ist. Hierfür sprechen wohl alle physikalischen Untersuchungen über Salzlösungen, welche ich unterlasse namentlich und inhaltlich hier anzuführen.

Eine besondere Stütze für diese Ansicht bilden die interessanten Modulareigenschaften der Salzlösungen, welche bis jetzt von C. A. Valson¹⁾ für die Capillarerhebung, für

1) C. A. Valson, Ann. de chim. et de phys. (4) 20. p. 361. 1870. Jahresber. f. Chem. 1870. p. 42.

die Dichte ¹⁾ und für das Lichtbrechungsvermögen ²⁾ ermittelt wurden, und deren allgemeines Dichtegesetz von mir ³⁾ bewiesen wurde. Diese deuten zweifellos an, dass die physikalischen Constanten der Salzlösungen wesentlich eine Function der gelösten Salzatome sind, während das Wasser in ihnen doch nur den Vermittler der Erscheinungen bildet.

Die von mir ⁴⁾ bewiesenen, für alle Concentrationsgrade geltenden Modulareigenschaften der Dichte lassen nun endlich erkennen, dass die Anzahl der in der Raumeinheit der Salzlösungen bei gegebener Temperatur vorhandenen Salz-molecüle den einzigen Maassstab der Vergleichung der Salzlösungen untereinander bezüglich ihrer physikalischen Constanten bilden kann.

2. Die correspondirenden NaCl- und KCl-Lösungen für Dichte und Ausdehnungscoefficient.

a) Dichte und Ausdehnungscoefficient der Chlorkalium-lösungen.

Untersuchungsmethode. — Die Untersuchung der Dichte und des scheinbaren Ausdehnungscoefficienten verbreitet sich zunächst über eine Reihe von Metallchloridlösungen und ihren Mischungen, über welche ich gruppenweise berichten werde, um schliesslich einem allgemeinen Ueberblick über die erlangten Resultate mich zuzuwenden. Für jede Gruppe wurde gleichzeitig die Electricitätsleitung bestimmt. Die Mittheilung dieser letzteren Beobachtungen schliesst sich an diejenige der Dichte und des Ausdehnungscoefficienten an.

Die Normallösungen enthalten sämmtlich bei 15° C. in einem Liter der Lösung eine bis auf 1 mg genau abgewogene Anzahl Grammmolecüle, und zwar in der Regel 0,5, 1, 1,5 etc. Die Herstellungsweise der Normallösungen lieferte sie ziemlich luftfrei, da durch längeres Kochen diese Luft stets entfernt worden war.

Die Mischungen der Salzlösungen wurden durch Zu-

1) C. A. Valson, Compt. rend. 73. p. 441. 1871 u. 77. p. 806. 1873.

2) C. A. Valson, Compt. rend. 76. p. 224. 1873.

3) C. Bender, Wied. Ann. 20. p. 560—578. 1883.

4) C. Bender, l. c.

sammenfügen gleicher bei 15° C. gemessener Volumina der betreffenden Salzlösungen erhalten. Hierbei geschah die Mischung von $\text{NaCl}_{(4 \text{ Mol.})}$ mit fast sämtlichen Normallösungen der KCl-Reihe, und die gleiche Anzahl Mischungen bestehen für $\text{NaCl}_{(2 \text{ Mol.})}$ als gemeinschaftlichen Bestandtheil. Die aus diesen Versuchsreihen erkannten Wahrheiten wurden durch die übrigen Combinationen von NaCl mit KCl-Lösungen bestätigt.

Zur Bestimmung des Ausdehnungscoefficienten diente das Dilatometer von Dr. Reischauer. Dieses Instrument bietet den Vortheil, dass man die Salzlösungen ohne Aenderung ihrer Concentration einfüllen kann.

Die Dimensionen des Apparates sind:

Volumen des Dilatometergefässes bis zum Theilstrich 0 der Scala
96,0749 ccm bei 0° ,

Vol. der einen vollkommen cylindrischen Capillarröhre für 1 cm der
Theilung 0,01729 bei mittlerer Temperatur,

Vol. der anderen vollkommen cylindrischen Capillarröhre für 1 cm
der Theilung 0,01702 bei mittlerer Temperatur.

Das Volumen des Dilatometergefässes wurde durch Wägen derjenigen luftfreien Wassermenge bestimmt, welche bei 0° das Dilatometer in den beiden Capillarröhren bis zum Theilstrich 0 erfüllte.

Zur Bestimmung des cubischen Ausdehnungscoefficienten der Glassorte des Dilatometergefässes dienten kleine, aus dieser Glassorte verfertigte Kölbchen, welche, mit Quecksilber gefüllt, bei 0° und 100° C. gewogen wurden. (Methode von Jolly). Unter Zugrundelegung des Ausdehnungscoefficienten des Quecksilbers für 1° C. = 0,0001815 wurde der cubische Ausdehnungscoefficient des betreffenden Glases = 0,00002798 für 1° C. gefunden. Hieraus berechnet sich das

Volumen des Dilatometers bis zum Theilstrich 0 = 96,11522 ccm bei 15° C.

„ „ „ „ „ „ „ 0 = 96,12869 „ „ 20°

Während der Ausdehnungsversuche befand sich das Dilatometer so weit in dem, bis zum Rande gefüllten, Wasserbad, dass noch gerade eine Fernrohrablesung möglich war. Die grosse Wassermenge des, mit einer Rührvorrichtung ver-

sehenen, Bades (35 Liter) gestattete eine langsame und regelmässige Temperatursteigerung. Damit eine möglichste Uebereinstimmung zwischen der Temperaturangabe des Thermometers und der Temperatur des Dilatometergefässes stattfände, umkleidete ich das Thermometer mit einem unten geschlossenen und mit Wasser gefüllten Glascylinder, in welchen es durch einen lose aufgesteckten Kork hineinragte. Jeder Versuch nahm von dem Augenblicke an, in welchem die gewünschte Temperatur des Bades bis auf $0,1^{\circ}\text{C.}$ unterhalb erreicht war, $\frac{1}{3}$ — $\frac{3}{4}$ Stunden in Anspruch.

Das von Dr. Geissler's Nachfolger in Bonn construirte Thermometer war in $\frac{1}{50}^{\circ}\text{C.}$ getheilt und änderte während der Dauer eines Jahres seinen Nullpunkt nicht. Die Fernrohrbeobachtung gestattete eine Abschätzung von $0,01^{\circ}\text{C.}$ In Ermangelung eines Luftthermometers verglich ich dieses Thermometer mit einem Normalthermometer der hiesigen meteorologischen Station, welches seinerseits nach dem Normalthermometer von Fuess in Berlin im Jahre 1878 corrigirt worden war und seit dieser Zeit seinen Nullpunkt nicht geändert hatte. Die Temperaturablesungen geschahen stets bei steigender Temperatur. Da das Thermometer nur innerhalb des Temperaturintervalles 15 bis 25°C. Verwendung fand und nie einer höheren Temperatur ausgesetzt wurde, so war ein Schwanken des zeitlichen Nullpunktes ausgeschlossen.

Bei der Ablesung der Scalentheile der Capillarröhren des Dilatometers wurden 0,1 mm abgeschätzt. Im ungünstigsten Falle konnten hierdurch Beobachtungsfehler von $0,35\%$ des Resultates eintreten. Die Bestimmungen sind daher vollkommen zuverlässig bis zur fünften Decimalstelle und differiren in der sechsten Decimalstelle um etwa ± 2 Einheiten. Die Dichteangaben d_{15}° gelten fast durchweg für die Temperatur 15°C. und beziehen sich auf Wasser von $4^{\circ}\text{C.} = 1$. Sie schwanken um ± 3 Einheiten in der vierten Decimale, ein Fehler, welcher durch die, nur angenäherten, Correctionen auf den luftleeren Raum bedingt ist. Das Dilatometergefäss wog ich frühestens eine Stunde nach dem Aufhängen an der Wage, deren umgebende Luft durch Schwefelsäure

trocken gehalten wurde. Die Lösungen wurden in luftfreiem Zustande dem Versuche unterworfen und zu diesem Zwecke unmittelbar vorher in einem langhalsigen Kolben mehrere Minuten lang zum Sieden erhitzt, hierauf, wohl verschlossen, erkalten lassen.

Es bedeuten in sämtlichen nachfolgenden Tabellen:

v_{15} Volumen der Lösung bei 15° C.;

v_{20} " " " " 20° C.;

d_{15} Dichte " " " 15° C.;

Δv_{15-20} scheinbare Volumenzunahme der Lösung bei 15—20° C.;

Δv_{20-25} scheinbare Volumenzunahme der Lösung bei 20—25° C.;

$\alpha_{15-20} = \Delta v_{15-20} / v_{15}$ scheinbarer Ausdehnungscoefficient zwischen 15 und 20°;

$\alpha_{20-25} = \Delta v_{20-25} / v_{20}$ scheinbarer Ausdehnungscoefficient zwischen 20 und 25°.

Will man zum Zwecke der Vergleichung die, in sämtlichen Tabellen angegebenen, scheinbaren Ausdehnungscoefficienten für das Intervall von 5° in absolute umwandeln, so hat man zu denselben die Zahl 0,000 139 9 zu addiren.

Tabelle 1.

Chlorkaliumlösungen (KCl = 74,58). Fig. 1.

Nr.	Molekül- zahl μ ¹⁾	v_{15}	α_{15-20}	α_{20-25}	d_{15}
1	4,23	—	—	0,001 718	— ²⁾
2	4,11	96,3469	0,001 625	1 712	1,1762 ³⁾
3	3,92	2422	1 606	—	1,1696 ⁴⁾
4	3,5	2740	1 577	1 672	1,1523
5	3	3705	1 521	1 620	1,1317
6	2,5	2550	1 440	1 566	1,1086 (?)
7	2	2720	1 360	1 508	1,0887
8	1,5	4000	1 255	1 427	1,0672
9	1	3977	1 109	1 312	1,0444
10	$\frac{2}{3}$	3950	1 043	1 248	1,0339
11	$\frac{3}{4}$	2417	0 897	1 135	1,0163
12	$\frac{1}{2}$	3140	0 823	1 074	1,0081
13	0	2178	0 738	1 011	0,9991

1) μ bedeutet die in 1 l der Lösung bei 15° C. enthaltenen Gramm-moleküle an wasserfreiem Salz.

2) Bei 20° C. übersättigte Lösung; $\mu = 4,23$ in 1 l der Lösung bei 20° C.

3) Bei 15° C. übersättigte Lösung.

4) Bei 14,9° C. gesättigte Lösung.

Die Curven α_{15-20° und α_{20-25° sind darstellbar durch Ausdrücke zweiten Grades in Bezug auf μ . Nach der Methode der kleinsten Quadrate wurde für die concentrirteren Chlorkaliumlösungen von $\mu = 1,5$ aufwärts der Ausdruck aufgestellt:

$$\alpha_{20-25^\circ} = 0,001\,077\,8 + 0,000\,271\,62\,\mu - 0,000\,029\,40\,\mu^2$$

und für die verdünnteren bis $\mu = 1$:

$$\alpha_{20-25^\circ} = 0,001\,008\,77 + 0,000\,356\,19\,\mu - 0,000\,049\,92\,\mu^2,$$

wobei das von μ freie Glied dieses zweiten Ausdrucks mit α_{20-25° für $\mu = 0$, d. h. mit dem α_{20-25° , welches bei Wasser gefunden wurde $= 0,001\,011$, innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmt.

Die Dichten der Salzlösungen lassen sich, wie schon früher bemerkt, ebenfalls durch einen in Bezug auf μ quadratischen Ausdruck darstellen, und für die Chlorkaliumlösungen gilt von $\mu = 1$ an aufwärts:

$$d_{15^\circ} = 0,999\,963 + 0,045\,349\,\mu - 0,000\,418\,\mu^2,$$

wobei zu bemerken ist, dass sich diese Chlorkaliumlösungen nur sehr schwierig einer allgemeinen Formel zweiten Grades unterordnen lassen.

Wie aus Fig. 1 hervorgeht, nähern sich die Curven α_{15-20° und α_{20-25° bei zunehmender Concentration, was die schon bekannte Thatsache bestätigt, dass mit wachsendem Salzgehalte die Ausdehnung der Lösungen eine gleichmässige wird. Dies gilt für alle in Fig. 1 gezeichneten Curven. Eine sprunghafte Aenderung bei dem Uebergang von ungesättigten zu den gesättigten und übersättigten Lösungen kann bei diesen Curven nicht nachgewiesen werden.

b) Contraction beim Lösen des Chlorkaliums.

Bezeichnen wir mit v das Volumen des zu lösenden Salzes bei 15° C.

mit V das Volumen des Lösungswassers bei 15° C.

„ V' „ „ beider nach dem Lösen bei 15° C.
(hier durchweg $= 1$ l),

so ist $(V + v) - V' = \Delta v$ die Volumenabnahme beim Lösen des Salzes.

Wir bezeichnen das Verhältniss der Contraction Δv zu dem Volumen des gelösten Salzes (vor der Lösung) v mit dem Namen Contractionscoëfficient ($= \Delta v/v$).

Die in Tabelle 2 niedergelegten Werthe sind aus den Dichtebestimmungen, welche in Tab. 1 angegeben wurden, entnommen, während für die Dichte des festen Chlorkaliums bei 15° C. derjenige Werth ($= 1,976$) gewählt wurde, welchen P. A. Favre und C. A. Valson¹⁾ bei ihren Untersuchungen über Contractionsverhältnisse verschiedener Salze angeben. Die Dichte des Wassers bei 15° C. ist $= 0,9991$ angenommen worden.

Tabelle 2.

Contraction beim Lösen des Chlorkaliums.

Nr.	μ	v	V	Δv	$\frac{\Delta v}{v}$	Bemerkungen
1	4,11	155,1	870,5	25,6	0,165	bei 15° C. übersättigte Lösung
2	3,92	147,9	878,0	25,9	0,176	„ 14,9° C. gesättigte „
3	3,5	132,1	892,1	24,2	0,183	
4	3	118,2	908,8	22,0	0,194	
5	2,5	94,4	923,0	17,3	0,184	?
6	2	75,5	940,4	15,9	0,210	
7	1,5	56,6	956,2	12,8	0,226	
8	1	37,7	970,7	8,4	0,224	
9	$\frac{3}{4}$	28,3	978,8	7,1	0,250	
10	$\frac{2}{3}$	14,2	989,2	3,4	0,240	?
11	$\frac{1}{6}$	7,1	995,0	2,1	0,294	

Der Contractionscoëfficient nimmt, wie diese Tabelle zeigt, mit wachsender Concentration fortwährend ab und zeigt selbst für übersättigte Lösungen keine sprunghafte Aenderung, wie auch aus den Beobachtungen von C. A. Valson²⁾ hervorgeht. Die einzelnen Werthe zeigen kleine Unregelmässigkeiten, welche sich einerseits dadurch erklären lassen, dass ein Fehler in der Dichtebestimmung von 0,0004 die zweite Decimalstelle schon beeinflusst.

Andererseits mag auch wohl die grosse Neigung des Chlorkaliums, übersättigte Lösungen einzugehen, auf die Dichte der Lösungen, selbst der verdünnteren, nicht ohne Einfluss sein.

1) P. A. Favre u. C. A. Valson, Compt. rend. 77. p. 802—809. 1873. Jahresb. f. Chem. 1873. p. 87.

2) C. A. Valson. Compt. rend. 73. p. 1376. 1871.

c) Die übersättigten Chlorkaliumlösungen.

Obgleich nach den Angaben J. Jeannel's und Ch. Tomlinson's¹⁾ wasserfrei krystallisirende Salze keine übersättigte Lösungen bilden sollen und bei Luftabschluss aus den kochend gesättigten Lösungen immer bis zum Sättigungspunkt auskrystallisiren, so ist doch später von D. Page und A. D. Reightley²⁾ gezeigt worden, dass der Salzgehalt einer sogenannten gesättigten Chlorkalium- oder Chlornatriumlösung abhängig davon ist, ob die Lösung vorher bei einer höheren Temperatur (100° C.) gesättigt war und alsdann langsam auf eine niedrigere Temperatur abgekühlt wurde, oder ob das Salz bei einer gegebenen Temperatur so lange im Ueberschuss mit Wasser in Berührung war, als sich noch davon löste.

Im ersteren Falle enthielten bei 15,6° C. 1000 Gewichtstheile 248,4 Gew. KCl, im letzteren Falle enthielten bei 15,6° C. 1000 Gewichtstheile 247,4 Gew. KCl.

So gering dieser Unterschied auch ist, führte er mich doch zur Vermuthung, dass Chlorkalium geneigt ist, auch bei gewöhnlicher Temperatur übersättigte Lösungen zu bilden, ähnlich wie dieses von L. C. de Coppet³⁾ bei Kochsalz für niedere Temperatur gefunden wurde.

Meine nicht erschöpfenden Untersuchungen hierüber bestätigen diese Vermuthung.

Eine bei Siedehitze der Lösung gesättigte Lösung wurde sehr langsam auf 14,9° C. erkalten lassen, ohne umzuschütteln, und enthielt alsdann in 1000 Gew. der Lösung 249,9 Gew. KCl. Sie zeigte die charakteristischen Eigenschaften einer übersättigten Lösung nicht, doch setzten sich nach Verlauf von acht Tagen etwa an dem Boden dichte Krystalle von Chlorkalium ab. Da auch diese Lösung concentrirter ist, als jede der beiden oben angegebenen bei 15,6° C.

1) J. Jeannel, *Compt. rend.* **62**, p. 37. 1876. *Zeitschr. f. Chem.* 1866. p. 108. *Jahresb. f. Chem.* 1865. p. 79. Ch. Tomlinson, *London Proc. Roy. Soc.* **16**, p. 403. 1868. *Jahresb. f. Chem.* 1868. p. 44.

2) D. Page u. A. D. Reightley, *Jahresb. f. Chem.* 1872. p. 25.

3) de Coppet, *Compt. rend.* **74**, p. 328. 1872. *Jahresber. f. Chem.* 1672. p. 21.

gesättigten Lösungen, so tritt hiermit der Einfluss der anfänglichen Sättigungstemperatur deutlich hervor und modifiziert den Begriff der Sättigung wesentlich. Eine zweite, kochend gesättigte Lösung erkaltete ziemlich rasch auf 15° C., eine andere ebenso auf 20° C.

Erstere enthielt in 1000 Gew. der Lösung 260.6 Gew. KCl (I).

Letztere enthielt in 1000 Gew. der Lösung 267,3 Gew. KCl (II).

Beide Lösungen waren übersättigte. Erstere (I) schied, in einem verschlossenen Kölbchen aufbewahrt, beim Schütteln, während die Temperatur 15° C. blieb, oder beim Einbringen eines kleinen Krystalles, nadelförmige Krystalle aus. Im Dilatometer dagegen trat erst bei 12,4° C. eine rasche Ausscheidung krystallinischer Nadeln ein, welche sich kugelförmig grupperten und an den Ansatzstellen der beiden Capillarröhren sich zuerst bildeten.

Die andere (II), auf 20° erkaltete und übersättigte Lösung schied in dem Dilatometergefäß bei 16,6° C. ebenfalls Krystalle ab. Beide Lösungen repräsentiren also einen gewissen labilen Zustand, welcher das Merkmal übersättigter Lösungen ist. Die Fähigkeit, übersättigte Lösungen einzugehen, scheint überhaupt eine allgemeine Eigenschaft der Salze zu sein, wie auch schon Mulder¹⁾ annimmt.

Die übersättigten Chlorkaliumlösungen ziehen sich bis zur Grenze der Krystallabscheidung sehr gleichmässig zusammen. An dem Dilatometer wurden bei der Lösung (I) folgende relative Volumina über dem Nullpunkte der Capillaren für die nebenstehenden Temperaturen beobachtet.

t	v	t	v
25,00	0,488	14,20	0,143
20,00	0,322	12,40	0,088
18,00	0,266	12,40	0,096
16,95	0,228	12,00	0,126
15,00	0,168	11,60	0,126

nach 3 Stunden,
nach weiteren 3 Stunden
" " ³/₄ "

1) G. J. Mulder, *Bijdragen tot de geschiedenis van het scheikundig gebonden water*. Rotterdam 1864, p. 146.

Die mit dem Abscheiden der Krystalle verbundene Volumenvermehrung kann bei den übersättigten Chlorkaliumlösungen bequem zu einem Vorlesungsexperiment Verwendung finden, da andere stark übersättigte Salzlösungen, wie z. B. Glaubersalzlösungen, eine wesentlich subtilere Behandlung erfordern.

d) Dichte und Ausdehnungscoefficient der Chlornatriumlösungen.

Tabelle 3. Fig. 1.

(NaCl = 58,5.)

Nr.	μ	r_{15°	α_{15-20°	α_{20-25°	d_{15°	Bemerkungen
1	5,33	96,1627	0,002 039	0,002 086	1,2014	bei 15° gesättigte Lösung
2	4,5	3297	1 935	2 007	1698	
3	4	3181	1 875	1 954	1522	
4	3,5	4150	1 808	1 901	1339	
5	3	3153	1 736	1 835	1164	
6	2,5	1744	1 636	1 750	0975	
7	2	2298	1 523	1 648	0788	
8	1,5	2581	1 382	1 526	0593	
9	1	2911	1 217	1 390	0401	
10	0,5	3198	1 001	1 223	0200	
11	0,25	3538	0 873	1 115	0096	

Bei gleicher Concentration dehnen sich also die Chlornatriumlösungen stärker aus, als die Chlorkaliumlösungen.

Die Ausdehnungscoefficienten der Chlornatriumlösungen von $\mu = 1$ aufwärts lassen sich durch die allgemeine Formel darstellen:

$$\alpha_{20-25^\circ} = 0,001\,076\,48 + 0,000\,346\,87\,\mu - 0,000\,031\,45\,\mu^2,$$

welche sich den experimentellen Bestimmungen enger anschliesst, als diejenige, welche für die Chlorkaliumlösungen abgeleitet wurde:

$$d_{15} = 1,001\,020 + 0,039\,651\,\mu - 0,000\,429\,\mu^2.$$

e) Contraction beim Lösen des Chlornatriums.

Tabelle 3.

Dichte des festen Chlornatriums bei 15° C. = 2,143.

Dichte des Wassers bei 15° C. = 0,9991.

Nr.	v	μ	I	Δv	$\frac{\Delta v}{v}$	Bemerkungen
1	5,33	150,0	880,7	30,7	0,204	b. 15° C. gesätt.
2	4,5	122,8	907,5	30,3	0,247	
3	4	109,2	919,1	28,3	0,259	
4	3,5	95,5	930,0	25,6	0,267	
5	3	81,9	941,6	23,6	0,287	
6	2,5	68,2	952,2	20,4	0,299	
7	2	54,6	962,7	17,3	0,316	
8	1,5	40,9	972,5	13,4	0,328	
9	1	27,3	982,4	9,7	0,356	
10	0,5	13,6	991,6	5,3	0,388	
11	0,25	6,8	995,9	2,7	0,399	

Auch hier verdient die Thatsache Beachtung, dass der Contractionscoefficient $\Delta v/v$ mit der Concentration regelmässig abnimmt.

f) Mischungen gleicher Raumtheile verschiedener Lösungen.

Zunächst mögen verschieden concentrirte Lösungen desselben Salzes betrachtet werden. Die den gefundenen Werthen in Klammern überschriebenen Zahlen bedeuten arithmetische Mittel, welche aus den Einzellösungen mit den Moleculzahlen μ , resp. μ' berechnet wurden:

Tabelle 5.

KCl μ + KCl μ' .

Nr.	μ	μ'	τ_{15}	α_{15-20}	α_{20-25}	d_{15}
1	3	1,5	96,3771	(1 388) 0,001 407	(1 524) 0,001 548	(1,0995) 1,1006
2	1,5	$\frac{3}{2}$	2880	(1 150) 1 162	(1 338) 1 349	—
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	3294	(0 972) 0 978	(1 191) 1 197	—
4	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	—	—	(1 104) 1 107	—
NaCl μ + NaCl μ' .						
5	4	2	96,2607	(1 699) 0,001 740	(1 801) 0,001 834	—
6	2	1	3181	(1 370) 1 381	(1 519) 1 539	—

Hieraus folgt die schon bekannte Thatsache, dass der Ausdehnungscoëfficient der Mischung verschieden concentrirter Lösungen desselben Salzes grösser ist als derjenige, welcher aus den einzelnen Salzlösungen als arithmetisches Mittel berechnet wird.

Dass beim Mischen solcher Lösungen Contraction eintritt, lehrt Nr. 1 der obigen Tabelle.

Tabelle 6. Fig. 2.¹⁾NaCl_(μ=4) + KCl_(μ=x)

Nr.	x	v _{15°}	α _{15-20°}	α _{20-25°}	α _{15-25°}	d _{15°}
1	3,5	96,2716	(1 726) 0,001 732 (1698)	(1 814) 0,001 814 (1 787)	(3 540) 0,003 546 (3 485)	(1522) 1,1526 (1421)
2	3	2165	1 713 (1 658)	1 803 (1 760)	3 516 (3 418)	1425 (1304)
3	2,5	2812	1 689 (1 618)	1 778 (1 731)	3 467 (3 349)	1307 (1205)
4	2	2719	1 662 (1 565)	1 757 (1 691)	3 419 (3 256)	1212 (1099)
5	1,5	2010	1 630 (1 492)	1 741 (1 636)	3 371 (3 128)	1110 (9981)
6	1	3282	1 596 (1 459)	1 713 (1 601)	3 309 (3 060)	1001 (9932)
7	$\frac{3}{4}$	2837	1 592 (1 386)	1 700 (1 545)	3 292 (2 931)	0952 (0846)
8	$\frac{3}{4}$	2602	1 556 (1 349)	1 677 (1 514)	3 233 (2 863)	0870 (0802)
9	$\frac{3}{16}$	3060	1 543	1 662	3 205	0834

Der allgemeine Charakter der Curven ist derjenige des zweiten Grades. Es lassen sich daher auch die gefundenen Werthe darstellen durch:

$\alpha_{20-25^\circ} = 0,001\,652\,990 + 0,000\,064\,318\,x - 0,000\,005\,293\,x^2$,
von $x = \frac{3}{16}$ bis $x = 3,5$ und die berechneten Werthe (arithmetische Mittel) durch:

$\alpha_{20-25^\circ} = 0,001\,513\,740 + 0,000\,138\,122\,x - 0,000\,015\,142\,x^2$,
von $x = 1$ bis $x = 3,5$.

Aus diesen allgemeinen Formeln, wie aus der Betrachtung der Figur, geht hervor, dass die Curven, welche die gefundenen Werthe darstellen, weit weniger stark gekrümmt sind, als diejenigen der arithmetischen Mittel. Das mit x^2

1) Die berechneten Mittelwerthe sind in sämtlichen Figuren durch punktirte Linien dargestellt.

verbundene Glied des ersteren Ausdruckes ist daher in diesem auch wesentlich kleiner, als in dem zweiten.

Contraction und Unterschied des Ausdehnungscoëfficienten zwischen berechnetem und gefundenem Werthe nehmen zu in dem Maasse, in welchem die Concentration der Lösungen verschiedener wird.

Der berechnete Werth des Ausdehnungscoëfficienten und der Dichte ist bei vorhergehender Versuchsreihe durchweg kleiner, als der gefundene.

Die Curven beider convergiren sehr wahrscheinlich nach dem Punkte $x = 4$.

Tabelle 7.
NaCl_($\mu=3$) + KCl_($\mu=x$).

Nr.	x	v_{15°	α_{15-20°	α_{20-25°	α_{15-25°	d_{15°
			(1 629)	(1 728)	(3 357)	(1240)
1	3	96,3033	0,001 630	0,001 724	0,003 354	1,1242
			(1 548)	(1 672)	(3 220)	(1025)
2	2	2777	1 559	1 672	3 231	1029
			(1 423)	(1 574)	(2 997)	(0787)
3	1	2704	1 481	1 615	3 096	0813

Hier liegt innerhalb der zulässigen Fehlergrenzen der Vereinigungspunkt beider Curven bei $x = 3$.

Tabelle 8.
NaCl_($\mu=2$) + KCl_($\mu=x$).

Nr.	x	v_{15°	α_{15-20°	α_{20-25°	α_{15-25°	d_{15°
			(1 550)	(1 660)	(3 211)	(1,1156)
1	3,5	96,2202	0,001 558	0,001 672	0,003 230	1,1162
			(1 521)	(1 634)	(3 156)	(1053)
2	3	3134	1 582	1 645	3 177	1057
			(1 482)	(1 608)	(3 089)	(0937)
3	2,5	1945	1 475	1 610	3 085	0938
			(1 442)	(1 579)	(3 020)	(0837)
4	2	3431	1 436	1 578	3 014	0838
			(1 389)	(1 538)	(2 927)	(0730)
5	1,5	3000	1 391	1 542	2 933	0733
			(1 316)	(1 480)	(2 796)	(0615)
6	1	3464	1 338	1 492	2 830	0618
			(1 283)	(1 448)	—	(0563)
7	$\frac{3}{4}$	2877	1 308	1 465	—	0569
			(1 210)	(1 392)	—	(0475)
8	$\frac{2}{3}$	2836	1 265	1 431	—	0484
			(1 173)	(1 361)	—	(0435)
9	$\frac{1}{6}$	3512	1 241	1 405	—	0448

Die Curve α_{15-25° der arithmetischen Mittel dringt vor $x = 2,5$ in die Curve der gefundenen Werthe ein und verlässt dieselbe wieder hinter $x = 2$. Da nun in Uebereinstimmung mit sämtlichen übrigen Combinationen dieser Gruppe die arithmetischen Mittel sowohl für Dichte als Ausdehnungscoefficient nie grösser sind als die gefundenen Werthe, so scheint innerhalb der zulässigen Fehlergrenzen eine Berührung beider Curven bei $x = 2$ stattzufinden.

Die nun noch folgenden Tabellen sind weniger detaillirt und bezwecken nur eine oberflächliche Bestätigung der bis jetzt mit einiger Sicherheit gefundenen Resultate.

Tabelle 9.

 $\text{NaCl}_{(\mu=1)} + \text{KCl}_{(\mu=x)}$

Nr.	x	v_{15°	α_{15-20°	α_{20-25°	α_{15-25°	d_{15°
1	3	96,2604	(1 369) 0,001 403	(1 505) 0,001 547	(2 874) 0,002 950	(1,0859) 1,0868
2	1,5	2002	(1 236) 1 236	(1 409) 1 410	(2 645) 2 646	(0537) 0538
3	1	3375	(1 163) 1 157	(1 351) 1 349	(2 514) 2 507	(0421) 0422
4	$\frac{3}{2}$	2939	(1 130) 1 135	(1 319) 1 324	(2 449) 2 459	(0370) 0372
5	$\frac{3}{4}$	2228	(1 057) 1 068	(1 262) 1 279	(2 319) 2 347	(0282) 0286
6	$\frac{3}{16}$	2534	(1 020) 1 034	(1 232) 1 245	(2 252) 2 279	(0241) 0248

Die Curve der arithmetischen Mittel α_{15-25° tritt in die Curve der gefundenen Werthe zwischen den Werthen $x = 1,5$ und $x = 1$ ein und zwischen $x = 1$ und $x = \frac{3}{4}$ wieder aus. Eine Berührung beider Curven scheint also nach der Bemerkung zu vorhergehender Tabelle bei $x = 1$ stattzufinden.

Tabelle 10.

 $\text{NaCl}_{(\mu=1/2)} + \text{KCl}_{(\mu=x)}$

Nr.	x	v_{15°	α_{15-20°	α_{20-25°	α_{15-25°	d_{15°
1	3	96,2820	(1 261) 0,001 333	(1 423) 0,001 491	(2 684) 0,002 824	(1,0738) 1,0774
2	1,5	2068	(1 128) 1 134	(1 327) 1 335	(2 455) 2 469	(0434) 0440
3	$\frac{3}{4}$	2530	(1 022) 1 020	(1 237) 1 238	(2 259) 2 258	(0270) 0272

Nr.	x	v_{15°	α_{15-20°	α_{20-25°	α_{15-25°	d_{15°
4	$\frac{1}{8}$	96,4793	(0 949) 0,000 947 (0 912)	(1 181) 0,001 186 (1 150)	(2 130) 0,002 133 (2 062)	(0181) 0178 (0140)
5	$\frac{1}{16}$	3062	0 914	1 155	2 069	0140

Die beiden Curven α_{15-25° berühren sich innerhalb der Grenzen der Versuchsfehler zwischen $x = \frac{1}{8}$ und $x = \frac{1}{16}$.

Tabelle 11.

$\text{NaCl}_{(\mu = 1/4)} + \text{KCl}_{(\mu = x)}$

Nr.	x	v_{15°	α_{15-20°	α_{20-25°	α_{15-25°	d_{15°
1	3	96,2850	(1 197) 0,001 299 (1 064)	(1 368) 0,001 452 (1 271)	(2 565) 0,002 751 (2 335)	(0711) 1,0724 (0384)
2	1,5	2777	1 099 (0 958)	1 285 (1 181)	2 384 (2 139)	0390 (0218)
3	$\frac{1}{4}$	3045	0 968 (0 885)	1 181 (1 125)	2 149 (2 010)	0221 (0129)
4	$\frac{1}{8}$	3229	0 894 (0 847)	1 128 (1 100)	2 022 (1 947)	0132 (0089)
5	$\frac{1}{16}$	3671	0 851	1 099	1 950	0093

Diese Tabelle ist weniger instructiv, wie die vorhergehenden, doch widerspricht sie nicht der Annahme eines Schnittpunktes der beiden Curven α_{15-25° bei $x = \frac{1}{8}$. Die sehr verdünnten Lösungen geben überhaupt wenig Anhaltspunkte, da ihre Mischungen wenig Contraction zeigen, und die Ausdehnungscoefficienten der letzteren von den arithmetischen Mitteln aus denjenigen der Einzellösungen nur um Grössen abweichen, welche innerhalb der Fehlergrenze des Versuches liegen. Ich habe aus diesem Grunde bei anderen Salzlösungen mich auf die Untersuchung der concentrirteren Lösungen beschränkt.

Aus sämtlichen Tabellen lässt sich nun der Schluss ziehen, dass diejenigen NaCl-, KCl-Lösungen, welche in der Volumeneinheit bei gegebener Temperatur eine gleiche Anzahl Grammmoleküle enthalten, in Bezug auf Dichte und Ausdehnungscoefficient als correspondirende Lösungen aufzufassen sind. Uebersichtlich geht dieses noch aus nachfolgender Tabelle hervor.

Tabelle 12.
 $\text{NaCl}_{(\mu)} + \text{KCl}_{(\mu)}$.

μ	ϵ_{15°	α_{15-20°	α_{20-25°	α_{15-25°	d_{15°
4	—	—	(1 827) 0,001 825	—	—
3,5	96,2889	(1 693) 0,001 697	(1 787) 1 782	(3 480) 0,003 479	(1,1431) 1,1434
3	3033	(1 629) 1 630	(1 728) 1 724	(3 357) 3 354	(1240) 1242
2,5	3123	(1 539) 1 539	(1 658) 1 652	(3 197) 3 191	(1031) 1032
2	3431	(1 442) 1 436	(1 578) 1 578	(3 020) 3 014	(0837) 0838
1,5	3032	(1 318) 1 319	(1 476) 1 475	(2 794) 2 794	(0632) 0634
1	3375	(1 163) 1 158	(1 351) 1 349	(2 514) 2 507	(0421) 0422

Sämmtliche, in vorhergehenden Tabellen beschriebenen Mischungen waren durch Mischen gleicher Raumtheile der einzelnen Lösungen bei 15° C. erhalten worden. Zu demselben Resultat hätte man auch durch Wahl eines jeden anderen Mischungsverhältnisses gelangen müssen. Bei correspondirenden Lösungen stimmen dann die, als arithmetisches Mittel berechneten Werthe mit den, unabhängig von dem Mischungsverhältniss gefundenen, wie man aus nachfolgendem Beispiel entnehmen kann:

1 Raumtheil $\text{NaCl}_{(\mu=3)} + 3$ Raumtheile $\text{KCl}_{(\mu=3)}$.

ϵ_{15°	α_{15-20°	α_{20-25°	d_{15°
96,2534	(1 575) 0,001 571	(1 674) 0,001 675	(1,1279) 1,1280

Dass die correspondirenden Lösungen mit dem Sättigungsvermögen der Salze in keiner einfachen Beziehung stehen, folgt schon aus dem Vorhergehenden. Den directen Nachweis, dass zwei gesättigte Salzlösungen, hier KCl- und NaCl-Lösungen nicht als correspondirende aufzufassen sind, liefert nachfolgender Versuch.

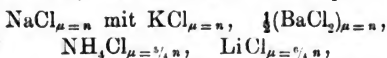
	α_{15-20°	α_{20-25°	α_{15-25°
+ KCl bei $14,9^\circ$ C. gesättigt	(1 823)	(1 895)	(3 718)
+ NaCl bei 15° C. „	0,001 829	0,001 913	0,003 742

13*

Die Existenz solcher Lösungen, welche für die Dichte miteinander correspondiren, hat Kremers¹⁾ für $(\text{NaCl}, \text{KNO}_3)$, $(\text{NaCl}, \text{KCl})$, $(\text{NaCl}, \text{NaNO}_3)$ gefunden. Seine Einzellösungen enthielten aber in 100 Theilen Wasser eine bestimmte Anzahl Salzmoecüle. Wie oben schon erwähnt, halte ich diesen Vergleichsmaassstab der Lösungen unter einander nicht für den richtigen. Wenn nun dem ungeachtet die Gesetzmässigkeiten über die Dichte derselben mehr oder weniger auch an solchen Lösungen hervortreten, so beruht diese auf den geringen Aenderungen, welche die Dichte mit der Concentration erfährt. Zur Entscheidung dieser Frage eignet sich daher die Dichte viel weniger, als der Ausdehnungscoefficient.

Die Kenntniss der correspondirenden Lösungen kann auch dazu dienen, die physikalischen Constanten sehr concentrirter Lösungen zu bestimmen, welche einzeln in Lösung nicht existiren können, aber in ihren Mischungen sich in Lösungen von hohem Concentrationsgrade erhalten lassen. So kann man z. B. zwar eine Lösung von 5 g Moecüle NaCl in 1 l darstellen, nicht aber eine solche 5 g Moecüle KCl in 1 l bei 15°C ., es lässt sich aber sehr wohl ein Gemenge aus der angegebenen Quantität beider Salze in 2 l Wasser lösen. Mit einiger Wahrscheinlichkeit lassen sich alsdann Dichte und Ausdehnungscoefficient der einzelnen Lösungen aus den gefundenen Werthen berechnen.

Von sämmtlichen bis jetzt untersuchten Salzlösungen habe ich gefunden, dass miteinander correspondiren:



und zwar die drei ersten mit Sicherheit, die beiden letzten mit grosser Wahrscheinlichkeit. Jede der angegebenen Lösungen correspondirt mit sämmtlichen übrigen, und auch für die Mischungen aus den drei ersten Salzlösungen wurde gefunden, dass die angegebenen physikalischen Constanten ohne Aenderung ihres Werthes in die Mischung eintreten.

Es ist sehr wohl möglich und sogar wahrscheinlich, dass nicht nur Dichte und Ausdehnungscoefficient, sondern auch

1) Kremers, Pogg. Ann. 98., p. 58. 1856.

andere physikalische Constanten die nämlichen correspondirenden Lösungen haben. Versuche in dieser Richtung werde ich zunächst für die Flüssigkeitsreibung der Salzlösungen und ihrer Gemische beim Ausströmen aus Capillarröhren anstellen.

Zum Schlusse möchte ich die Vermuthung aussprechen, dass das Studium der Ausdehnung solcher Salzlösungsgemische, in welchen eine doppelte Zersetzung möglich ist, diese Zersetzung voraussichtlich in ganz der nämlichen Weise zu ermitteln gestattet, wie dies so weitgehend durch Thomson aus den Wärmereactionen und durch Ostwald aus den Dichteveränderungen der Lösungsgemische geschehen ist. Dahin zielende Versuche gedenke ich später zu veröffentlichen.

3. Die correspondirenden NaCl- und KCl-Lösungen für electrischen Leitungswiderstand und electrisches Leitungsvermögen.

a) Die Lösungen einzeln.

Die Bestimmung des Leitungswiderstandes der Electrolyte ist durch die hervorragenden Untersuchungen von F. Kohlrausch¹⁾ und die Einfachheit, welche dieser Forscher der Methode gab, eine ebenso scharfe, als leicht anwendbare geworden. Ich bediente mich bei den nachfolgenden Untersuchungen der Wechselströme, des Telephons²⁾ und der Brücke. Da meine von Edelman in München bezogene Widerstandsscala nur eine ganze Anzahl S.-E. direct zu messen erlaubte, musste durch Verschieben des Steges *s* in Fig. 3, der Ton im Telephon zum Verschwinden gebracht werden.

Zur Bestimmung der Capacität der angewandten Widerstandsgefäße diente mir eine bei 15° C. gesättigte, chemisch reine Kochsalzlösung von dem specifischen Gewichte 1,2014 bei 15° C. Für diese gibt F. Kohlrausch³⁾ das specifische Leitungsvermögen an:

$$k = 0,000\,020\,15 + 0,000\,000\,45 (t - 18^{\circ}).$$

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 1—51 und 145—210. 1879.

2) Die Apparate sind nach den Angaben F. Kohlrausch's von E. Hartmann in Würzburg construiert.

3) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 660. 1879.

Im ganzen genommen dürften die Widerstände in den später folgenden Tabellen um etwa 0,2—0,3% ungenau sein, wobei übrigens bemerkt werden möge, dass für die sehr verdünnten Lösungen eine etwas grössere Ungenauigkeit angenommen werden muss.

In den ersten Momenten des Durchleitens des Wechselstromes durch den Electrolyten ist der gefundene Widerstand um 0,2% des ganzen Widerstandes kleiner, als der spätere bleibende. Gegen diesen Fehler kann man sich durch die Versuchsdauer schützen, welche bei mir nie unter einer halben Stunde währte.

Völlig luftfreie Lösungen anzuwenden, ist bei der Bestimmung des electricen Leitungswiderstandes nicht erforderlich. Ich habe mich durch directe Versuche davon überzeugt und daher stets diejenigen Lösungen einfach dem Versuch unterworfen, welche früher zur Bestimmung der Dichte und des Ausdehnungscoefficienten gedient hatten.

Während des Versuches befand sich das Widerstandsgefäss in dem oben beschriebenen grossen Wasserbad, dessen Temperatur möglichst constant auf 18° C. erhalten wurde. Schwankungen von höchstens 0,1° C. kamen vor, da jedoch die Temperaturfunction für die untersuchten Lösungen nach den Versuchen von F. Kohlrausch den Werth von 0,0234 nicht übersteigt, so fallen diese Correctionen noch in die Fehlergrenzen des Versuches und wurden daher unterlassen.

Die für die einzelnen, einfachen Lösungen gefundenen Werthe des electricen Leitungswiderstandes und der Leitungsfähigkeit stimmen im allgemeinen mit den von F. Kohlrausch¹⁾ angegebenen überein. Die Werthe dieses Forschers sind in den Tabellen 1 und 2 durch Einklammerung kenntlich gemacht. Wo die Differenzen gross waren, habe ich meine Untersuchung wiederholt. Ich möchte diese Differenzen dem Umstande zuschreiben, dass Herr Kohlrausch interpolirte Werthe angibt, während die meinigen direct aus den Lösungen von der angegebenen Concentration gewonnen wurden. Weiter bemerke ich, dass genannter Forscher sich auf Lösungen bezieht, welche bei 18° C. in der Volumeneinheit eine

¹⁾ F. Kohlrausch, l. c. p. 148.

bestimmte Anzahl von Grammmoleculen enthalten, während meine Lösungen bei der Temperatur 15° C. die angegebene Moleculzahl in der Volumeneinheit der Lösung besitzen. Allgemein will ich bemerken, dass die KCl- und NaCl-Curven, welche die Beziehungen zwischen Moleculzahl und Leitungsvermögen darstellen, bei der Wahl der Werthe von Kohlrausch sich weniger stark krümmen, als nach meinen Bestimmungen. Für sehr concentrirte Lösungen stimmen die beiden Angaben wieder überein.

Tabelle 1.¹⁾

KCl = 74,58.

Nr.	Molecul- zahl μ	$w_{18} \cdot 10^{-2}$ ₇₎	$k_{18} \cdot 10^3$	Nr.	Molecul- zahl μ	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^3$
1	$\frac{3}{16}$	5283	189				
2	$\frac{3}{8}$	2718	360	7	2	574	(1728) 1741
3	$\frac{3}{4}$	1410	709 (471)				(2112)
4	$\frac{1}{2}$	2093	478 (911)	8	2,5	475	2106 (248 J)
5	1	1092	916 (1328)	9	3	403	2484 (2822)
6 ³⁾	1,5	734	1362	10	3,5	355	2820
				11	4	320	3128

Das Leitungsvermögen der verdünnten KCl-Lösungen von $\mu = \frac{3}{4}$ an abwärts lässt sich sehr genau darstellen durch: $k_{18} \cdot 10^3 = c_1 + \mu c_2$, wobei $c_1 = 18$ und $c_2 = 912$.

Tabelle 2.

NaCl = 58,5.

Nr.	μ	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^3$	Nr.	μ	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^3$
1	0,25	4863	296 (380)	6	2,5	705	(1412) 1425
2	0,5	2581	388 (698)				(1584)
3	1	1425	702 (974)	7	3	629	1594 (1728)
4	1,5	1023	977 (1209)	8	3,5	573	1745 (1846)
5	2	822	1217	9	4	524	1845

1) Die eingeklammerten Werthe sind die von Hrn. F. Kohlrausch gefundenen.

2) w_{18} bedeutet den spec. Leitungswiderstand bei 18° C.

3) Aus vier Versuchen und zwei verschiedenen Lösungen.

b) Mischungen gleicher Raumtheile der Lösungen.

In den nachfolgenden Tabellen bedeuten, ebenso wie früher, die eingeklammerten Zahlenwerthe die arithmetischen Mittel aus den Werthen der, in der Mischung vorhandenen Einzellösungen.

Tabelle 3.¹⁾
 $\text{NaCl}_{(\mu=1/2)} + \text{KCl}_{(\mu=x)}$.

Nr.	x	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^8$	Nr.	x	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^8$
1	$\frac{3}{16}$	(3875)	(291)	4	$\frac{3}{8}$	(1996)	(548)
		3438	291			1836	545
		(2679)	(374)			(1657)	(875)
2	$\frac{3}{8}$	2654	377	5	$\frac{3}{4}$	1154	866
		(2318)	(437)			(1492)	(1436)
		2295	436			680	1471
3	$\frac{1}{2}$			6	3		

Der gefundene Widerstand ist stets kleiner als der aus den einzelnen Lösungen berechnete, er kommt ihm bei $x = \frac{3}{8}$ und $x = \frac{1}{2}$ jedoch am nächsten. Das gefundene Leitungsvermögen ist theils grösser, theils kleiner, wie das berechnete, jedoch geben die verdünnteren Lösungen hier wenig Unterschiede. Ein allgemeines Gesetz lässt sich aus diesen vorläufig noch nicht mit Sicherheit ableiten.

Tabelle 4.
 $\text{NaCl}_{(\mu=1)} + \text{KCl}_{(\mu=x)}$.

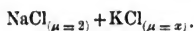
Nr.	x	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^8$	Nr.	x	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^8$
1	$\frac{3}{16}$	(8297)	(448)	5	1,5	(1079)	(1032)
		2262	442			986	1014
		(2101)	(531)			(999)	(1222)
2	$\frac{3}{8}$	1832	546	6	2	817	1224
		(1418)	(706)			(913)	(1593)
		1415	707			(625)	1600
3	$\frac{3}{4}$	(1252)	(814)	7	3		
4	1	1245	814)				

Die Curve der berechneten Werthe der Widerstände kommt derjenigen der gefundenen Werthe bei $x = \frac{3}{4}$ am nächsten. Hierfür stimmen auch die berechneten und gefundenen Leitungsvermögen miteinander überein. Die be-

1) $\text{KCl}_{\mu=1/2}$ wurde durch Verdünnen der Lösung $\text{KCl}_{\mu=1}$ erhalten.

rechneten Werthe der Widerstände sind sonst durchweg grösser, wie die gefundenen.

Tabelle 5. Fig. 3.

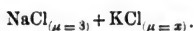


Nr.	x	$w_{1s} \cdot 10^{-2}$	$k_{1s} \cdot 10^8$	Nr.	x	$w_{1s} \cdot 10^{-2}$	$k_{1s} \cdot 10^8$
		(2996)	(705)			(698)	(1479)
1	$\frac{3}{15}$	1288	776	5	2	686	1458
		(1800)	(789)			(649)	(1659)
2	$\frac{2}{5}$	1168	856	6	2,5	612	1635
		(951)	(1072)			(612)	(1851)
3	1	922	1085	7	3	546	1832
		(778)	(1289)			588	(2019)
4	1,5	778	1283	8	3,5	(503)	1989

Die berechneten Werthe und die gefundenen Werthe des Leitungswiderstandes und des Leitungsvermögens stimmen für $x = 1,5$ miteinander überein. Die ausgezogenen und punktirten Curven des Leitungswiderstandes Fig. 3 berühren sich in diesem Punkte, diejenigen des Leitungsvermögens schneiden sich daselbst.

Die aus Tabelle 5 beobachteten correspondirenden Lösungen sind also $\text{NaCl}_{\mu=2}$, $\text{KCl}_{\mu=3/2}$. Dieses Concentrationsverhältniss wird durch nachfolgende Tabellen weiter begründet.

Tabelle 6. Fig. 4.



Nr.	x	$w_{1s} \cdot 10^{-2}$	$k_{1s} \cdot 10^8$	Nr.	x	$w_{1s} \cdot 10^{-2}$	$k_{1s} \cdot 10^8$
		(854)	(1260)			(552)	(1850)
1	1	751	1332	4	2,5	541	1848
		(681)	(1478)			(516)	(2039)
2	1,5	664	1506	5	3	499	2003
		(602)	(1668)			(492)	(2207)
3	2	597	1674	6	3,5	463	2161

Die Curven des Leitungsvermögens schneiden sich zwischen $x = 2$ und $x = 2\frac{1}{2}$; für $x = 2\frac{1}{2}$ stimmen Leitungsvermögen und Leitungswiderstand innerhalb der Versuchsfehlergrenzen mit den berechneten Werthen überein.

Tabelle 7. Fig. 5.

 $\text{NaCl}_{(\mu=4)} + \text{KCl}_{(\mu=x)}$

Nr.	x	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^5$	Nr.	x	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^5$
		(2856)	(1019)			(558)	(1793)
1	$\frac{1}{16}$	776	1289	6	2	539	1857
		(1660)	(1103)			(509)	(1976)
2	$\frac{1}{8}$	732	1367	7	2,5	500	2001
		(976)	(1277)			(472)	(2165)
3	$\frac{1}{4}$	677	1476	8	3	461	2167
		(811)	(1386)			(448)	(2333)
4	1	645	1551	9	3,5	435	2300
		(638)	(1604)			(432)	(2487)
5	1,5	585	1709	10	4	412	2428

Die für Leitungswiderstand und Leitungsvermögen correspondirenden Lösungen dieser Tabelle sind $\text{NaCl}_{\mu=4}$; $\text{KCl}_{\mu=3}$.

Es ist also durch vorliegende Untersuchung bewiesen, dass die für das electrische Leitungsvermögen und den electrischen Leitungswiderstand correspondirenden Lösungen von NaCl und KCl in dem Molecülzahlverhältniss 4:3 stehen. Dieses Verhältniss findet durch alle Concentrationen hindurch statt.

Wir geben in nachfolgender Tabelle eine Zusammenstellung der bis jetzt untersuchten correspondirenden Lösungen beider Salze.

Tabelle 8.

 $\text{NaCl}_{(\mu=m)} + \text{KCl}_{(\mu=\frac{3}{4}m)}$ (Correspondirende Lösungen.)

Nr.	$\text{NaCl}_{\mu=}$	$\text{KCl}_{\mu=}$	$w_{18} \cdot 10^{-2}$	$k_{18} \cdot 10^5$	Bemerkungen
			(2679)	(374)	
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	2654	377	Tabelle 3 Nr. 2
			(1418)	(706)	
2	1	$\frac{3}{4}$	1415	707	„ 4 „ 3
			(778)	(1289)	
3	2	$\frac{3}{2}$	778	1283	„ 5 „ 4
			(577)	(1770)	
4	3	2 $\frac{1}{4}$	569	1773	aus „ 6 „ 3 u. 4 interpolirt
			(472)	(2165)	
5	4	3	461	2167	„ 7 „ 8

Die correspondirenden Lösungen von NaCl und KCl für das electrische Leitungsvermögen und den electrischen Leitungswiderstand enthalten also nicht, wie wir früher für Dichte und Ausdehnung gefunden hatten, gleiche Molecülzahlen.

Um jeden Zweifel auszuschliessen, gedenke ich noch eines Versuches mit 30 ccm $\text{NaCl}_{\mu=2} + 90$ ccm $\text{KCl}_{(\mu=2/3)}$, welcher ergab:

$w_{18} \cdot 10^{-2}$	(756)	752
$k_{18} \cdot 10^8$	(1326)	1330

und durch welchen gleichzeitig bewiesen ist, dass die correspondirenden Lösungen für ein beliebiges Mischungsverhältniss die gleichen Eigenschaften haben.

Gewisse Berührungspunkte finden zwischen der Ausdehnung und dem electricischen Leitungsvermögen statt.

Wie aus den Curven Fig. 1 hervorgeht, nimmt der Ausdehnungscoefficient α_{15-20° oder α_{20-25° mit wachsendem Salzgehalt anfänglich rasch zu, später aber wesentlich langsamer. Ein Blick auf diejenigen Curven, durch welche das electricische Leitungsvermögen dargestellt wird¹⁾, zeigt damit eine auffallende Aehnlichkeit. Diese dürfte noch mehr hervorgehen aus Lösungen von solchen Salzen, welchen eine fast unbegrenzte Löslichkeit zukommt, wie aus den Chlorlithiumlösungen. Die Curve $\text{LiCl}_{\alpha_{20-25^\circ}}$ lässt beispielsweise von $\mu = 5$ an ein schwaches Sinken des Ausdehnungscoefficienten beobachten. Das electricische Leitungsvermögen der LiCl -Lösungen nimmt von der Concentration $\mu = 6$ an ab.

Indem ich theoretische Erörterungen bis zur vollständigen Untersuchung des electricischen Leitungsvermögens sehr verdünnter Lösungen (über welche E. Bouty²⁾ neuerdings publicirt hat), und ihrer Gemische verschiebe, bemerke ich, dass bis jetzt folgende untereinander correspondirende Lösungen gefunden wurden:

$\text{NH}_4\text{Cl}_{\mu=1/4n}$; $\text{KCl}_{\mu=1/4n}$; $\text{NaCl}_{\mu=n}$; $\frac{1}{2}(\text{BaCl}_2)_{\mu=n}$, wobei n jede, für alle diese Lösungen gleiche, ganze oder gebrochene positive Zahl bedeuten kann. Es correspondirt hierbei jede Lösung mit der anderen hier angegebenen.

Aus den vorliegenden Resultaten scheint der später noch weiter zu begründende Satz hervorzugehen:

Correspondirende Lösungen sind solche, deren Molecülzahl in einem einfachen Verhältniss zu einander stehen.

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. Taf. I. 1879.

2) E. Bouty. Compt. rend. 98. p. 140—142; 362—365. 1884.

**V. Ueber Probleme, welche die Neumann'sche Reflexionstheorie nicht lösen zu können scheint.
Die Metall- und Totalreflexion der doppeltbrechenden Medien; von E. Ketteler.**

Sieht man ab von der Erklärung der Phosphorescenz und Fluorescenz, so dürfte sich die höchste und letzte Aufgabe, die der theoretischen Optik gestellt werden kann, wohl folgendermassen aussprechen lassen. Man denke sich zwei Prismen, sei es aus irgend welchen trichroitischen und zugleich mit Dispersion der Axen begabten Krystallen oder aus irgend welchen dichroitischen und durch Rotationspolarisation ausgezeichneten Krystallen beliebig hergestellt, und beide miteinander zu einer beliebig orientirten Combination verbunden. Es sollen alsdann sämmtliche, einem beliebigen Einfallswinkel entsprechende äussere und innere Wellen construirt, die zugehörigen Refractions- und Extinctionscoëfficienten für alle Farben bestimmt und endlich die Amplituden und Phasen aller dieser Wellen berechnet werden.

Der Verfasser dieses Aufsatzes, welchem das vorstehend gezeichnete Problem seit Jahren vorgeschwebt, und welcher nach vieljährigen, nicht immer sofort von Erfolg gekrönten Bemühungen nunmehr die Lösung desselben endgültig gefunden zu haben glaubt, wird Inhalt, Fruchtbarkeit und Tragweite derselben nicht anschaulicher vorführen können, als wenn er ein direct der Theorie fast unzugängliches Erscheinungsgebiet, die Totalreflexion der anisotropen Medien, auf einem vielleicht sonderbar scheinenden Umwege, nämlich unter Benutzung der undurchsichtigen krystallisirten Metalle, zur streng mathematischen Darstellung bringt. Da der Neumann'schen Reflexionstheorie dieses indirecte Verfahren versagt ist, und da sie, soweit ich sehe, bei directem Angreifen mit weit grösseren Schwierigkeiten zu kämpfen haben würde, als der von mir erweiterte Fresnel'sche Standpunkt, so dürfte die Totalreflexion der Krystalle wie keine andere Erscheinung berufen sein, bei der neuerdings begonnenen Auseinandersetzung zwischen beiden Grundanschauungen selbst denen gegenüber, welche die Erklärung

der Metallreflexion, resp. Absorption noch für verfrüht halten, ein entscheidendes Wort mitzusprechen.

Es ist übrigens nicht das erste mal, dass ich Totalreflexion und Metallreflexion in Verbindung bringe. Für isotrope Medien habe ich ihren Zusammenhang schon früher in zwei Arbeiten¹⁾ aufgedeckt, die leider wohl aus secundären Gründen nicht die von mir gewünschte Verbreitung gefunden haben. Es sei mir daher zunächst gestattet, aus meinem damaligen Auszuge folgenden, den Schwerpunkt der Arbeit entwickelnden Passus hier wörtlich zu reproduciren:

„Fresnel hat die Gesetze der Totalreflexion mittelst eigenthümlicher Deutung seiner für totalreflectirende Incidenzen complex werdenden Intensitätsformeln abgeleitet. Ihm erscheint so die Totalreflexion neben der gewöhnlichen Reflexion als ein und derselbe Vorgang, da beide durch die gleichen Ausdrücke umfasst werden und unmittelbar ineinander verwandelbar sind. Diese Auffassung bleibt natürlich bestehen, wenn man den gleichfalls complex werdenden Schwingungsaus Schlag des gebrochenen Lichtes auf Ausdrücke mit Exponentialfactoren zurückführt, in diesen aber die imaginären Glieder beibehält.“

„Sobald man aber im Interesse der physikalischen Erklärung sich ausschliesslich auf reelle Glieder beschränkt, so wird damit das erwähnte Einheitsband zerrissen, und Totalreflexion und gewöhnliche Reflexion erscheinen unstatthafter weiser als selbständige Vorgänge.“²⁾

„In der That freilich — und das war der Inhalt des damaligen Aufsatzes — bilden die Fresnel'schen Gesetze der totalen wie der gewöhnlichen Reflexion einen speciellen ein-

1) Ketteler, Carl's Repert. 16. p. 261. 1880. — Beibl. 4. p. 879 1880. Ausz. d. Verf.

2) Dies war der Standpunkt Cauchy's und Beer's, für den ich indess insofern (Wied. Ann. 3. p. 88. 1878) eine Lücke ausgefüllt habe, als ich dort zeigte, dass die in Betracht kommenden, theilweise verwickelten Schwingungsausdrücke aus den Differentialgleichungen der bezüglichen Medien abzuleiten sind. Hr. Glazebrook (und so eben theilweise auch Hr. Voigt) hat die Möglichkeit dieses Standpunktes auch für die Vertreter der Neumann'schen Grundvorstellungen nachgewiesen. Vgl. die Nachschrift.

zelen Grenzfall der Gesetze der Reflexion an absorbirenden Medien. Diese letzteren, die der Verfasser bereits früher¹⁾ streng und erschöpfend behandelt zu haben glaubt, involviren bekanntlich einen vom Einfallswinkel abhängigen Refractions- und Extinctionscoefficienten, wie ihn die Totalreflexion, von niemand mehr bezweifelt, wirklich vorführt.²⁾ Die absorbirenden Medien sind eben die allgemeineren und, vom Weltäther abgesehen, die einzig thatsächlichen, während dagegen das ideel durchsichtige Mittel Fresnel's mit seinem doppelten Verhalten und seinem discontinuirlichen Sprung (für die Incidenz des Grenzwinkels) lediglich als eine durch Abstraction zu gewinnende Möglichkeit aufzufassen ist.“

Meine Arbeit, die nur stetig verlaufende Formeln gibt, welche das ganze Erscheinungsgebiet zwischen normaler und streifender Incidenz umfassen, hat sonach das erwähnte Ein-

1) Ketteler, Wied. Ann. 3. p. 95 u. 284. 1878.

2) In einem eben erschienenen Referate der Berl. Fortschritte 36. p. 382. 1883 über meine Arbeiten, betreffend den Zusammenhang von Metall- und Totalreflexion, wird auffallend stark betont, dass ich in den absorbirenden Medien Refractions- und Extinctionscoefficient variabel nehme, was eben daher rührt, dass ich Extinctionsrichtung und Loth immer zusammenfallen lasse. Es macht das fast den Eindruck, als solle angedeutet werden, dass auch eine andere Auffassungsweise möglich sei, also die meinige wenigstens bis zu ihrer näheren Begründung als willkürlich bezeichnet werden müsse. Da diesen selben Vorwurf auch Hr. Lommel einst gelegentlich ausgesprochen hat, so bemerke ich darüber kurz Folgendes. Die einzige Auffassung, die der meinigen entgegengestellt werden könnte, ist doch wohl nur die Annahme, dass in den absorbirenden Medien (wenigstens bei kleineren Incidenzen) Amplituden und Phasen gemeinsam längs der Fortpflanzungsrichtung selber variiren. Ich möchte nun die Vertheidiger dieser Annahme, die ich selbst nur für innerlich gespiegeltes Licht, nicht dagegen für gebrochenes Licht für möglich halte, ersuchen, deren Consequenzen für letzteres zu prüfen. Es genügen dazu bei Benutzung meiner Uebergangsgleichungen und unter Zuziehung des Incompressibilitätsprincips einige ausserordentlich einfache Rechnungen. Man findet dann z. B. für die Schwächungscoefficienten der Spiegelung sonderbar geformte Ausdrücke, welche in der Nähe des Grenzwinkels zu auffallenden Erscheinungen führen, die, ihre Realität vorausgesetzt, die Beobachtung längst hätte entdecken müssen. — Was übrigens bei einer solchen Behandlung für kleinere Incidenzen scheinbar an Einfachheit gewonnen wird, geht dann für die totalreflectirenden erst recht verloren.

heitsband zwischen der gewöhnlichen und totalen Reflexion der durchsichtigen Medien wieder hergestellt, und beide Erscheinungen werden zugleich mit den Reflexionserscheinungen der undurchsichtigen Metalle durch identische Ausdrücke dargestellt. Kann die Neumann'sche Reflexionstheorie von dem eben erst durch Glazebrook und Voigt für sie gewonnenen, aber nicht genügenden Standpunkte aus nicht bald den gleichen Schritt thun, so dürfte es für immer um ihre Anerkennung geschehen sein.

Nach diesen, meines Erachtens nothwendigen orientirenden Vorbemerkungen wende ich mich zur vorgesteckten Aufgabe, die für die isotropen Medien soeben skizzirten Resultate auch auf die anisotropen auszudehnen. Zuvor werde nur noch bemerkt, dass, was ich bisher an anderer Stelle¹⁾ über die Totalreflexion der Krystalle mitgetheilt habe, sich ausschliesslich auf die Bedingung ihres Zustandekommens bezog und sich etwa in die Worte zusammenfassen lässt: „Es muss stets der gebrochene Strahl, nicht dagegen auch die gebrochene Normalrichtung der Trennungsfläche parallel sein.“ Der Einfachheit wegen soll sich die folgende Discussion auf absorbirende gewöhnliche Krystalle, d. h. auf solche ohne Dispersion der Axen und ohne Rotationspolarisation beschränken.

Denken wir uns zunächst einen durchsichtigen Krystall von parallelen Strahlen durchlaufen, so erfahren dieselben für verschiedene Richtungen eine verschieden geschwinde Fortpflanzung der Phasen. Auch ein einzelner Strahl, den wir etwa durch eine unendlich enge cylindrische Röhre von den übrigen isoliren, wird ungeschwächt (unter Constant-erhaltung seiner Amplitude) durch dieselbe hindurchgehen und seine Energie auf immer weitere Punkte übertragen. Wir nehmen dabei an, dass die Schwingungen, wenn extraordinär (wie Fresnel es will), im Hauptschnitt erfolgen, aber auf dem Strahle selbst (nicht auf der zugehörigen Normale) senkrecht stehen, während sie bekanntlich nach Neumann zugleich auf Hauptschnitt und Strahl senkrecht stehen

1) Ketteler, Wied. Ann. 18. p. 653. 1883.

sollen. Diese Annahme, für die Anhänger der Fresnel'schen Richtung die einzig correcte, stelle ich hier nicht willkürlich auf, sondern sie ist mir durch die mühsam gefundene Thatsache, dass jede andere Voraussetzung zu unmöglichen oder wenigstens unwahrscheinlichen Resultaten führt, allmählich aufgezwungen.¹⁾

Dies angenommen, beschränken wir uns im Folgenden auf die Lichtverbreitung durch (ideelle) enge Röhren; es ist dies nämlich diejenige Form, welche — abgesehen vom vorausgesetzten Huygens'schen Princip — in den Grenzgleichungen der Reflexionstheorie ausschliesslich von Bedeutung ist. Die zu untersuchenden Medien sollen dabei absorbirende sein, d. h. Medien, in welchen gewisse innere Reibungskräfte die ursprünglich gegebene Amplitude fort und fort verkleinern.

Dringt dann Licht von aussen her in einen absorbirenden Krystall ein, so werden sofort zwei zusammengehörige Richtungen zu unterscheiden sein, nämlich die Propagationsrichtung (senkrecht zur Ebene gleicher Phasen, parallel also dem Strahle als der Röhrenaxe) und die Extinctionsnormale (senkrecht zur Ebene gleicher Amplituden, parallel also dem Einfallslothe). Fallen zunächst für senkrechten Eintritt des Lichtes Extinctions- und Propagationsrichtung zusammen, so heisse a das einer bestimmten Krystallrichtung und Schwingungsdauer entsprechende Verhältniss der Propagationsgeschwindigkeiten im freien Aether und im Krystall und b der zugehörige Extinctionscoëfficient, letzterer als Maass für die Geschwindigkeit der Abnahme der Amplitude. Die beiden so definirten Grössen a und b betrachten wir als Functionen der Strahlenrichtung und Schwingungsdauer und nennen sie die Hauptindices der betreffenden Richtung.

Wird aber bei unveränderter Schwingungsdauer und bei festgehaltener Strahl- und Krystallrichtung die Eintrittsfläche continuirlich gegen dieselbe gedreht, sodass sich also die Winkel, welche einfallender und gebrochener Strahl mit dem Einfallslothe machen, stetig ändern, so ändern

1) Vgl. darüber Ketteler, Wied. Ann. 18. p. 636. 1883.

sich auch die beiden erwähnten Geschwindigkeiten, und aus a und b mögen etwa für irgend einen Brechungswinkel r des Strahles die neuen Werthe v und q werden.

Es lassen sich dann, meinen früheren Arbeiten zufolge¹⁾, für isotrope wie für anisotrope Medien, dieselben als Aggregate von zusammenschwingenden Aether- und Körpertheilchen betrachtet, Bewegungsgleichungen aufstellen, welche zwischen den Attributen a , b und v , q die Bedingungen²⁾ verlangen:

$$(I_a) \quad v^2 - q^2 - 1 = (a^2 - b^2 - 1) \Phi, \quad vq \cos r = ab \Phi.$$

Darin ist noch Φ ein vom Einfallswinkel abhängiger Bruch, welcher für senkrechte Incidenz gleich Eins wird. Derselbe ist insbesondere für absorbirende isotrope, sowie für durchsichtige anisotrope Medien bei allen Incidenzen $= 1$, und kommt daher die Differenz $(1 - \Phi)$ nur für Medien, die zugleich stark absorbiren und stark doppelt brechen, als solche in Betracht. Für alle anderen dagegen schreibt sich einfacher:

$$(I) \quad v^2 - q^2 = a^2 - b^2, \quad vq \cos r = ab.$$

Löst man diese letzteren Gleichungen in Beziehung auf v und q auf, sodass man erhält:

$$2v^2 = + (a^2 - b^2) + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 4a^2b^2 \operatorname{tg}^2 r},$$

$$2q^2 = - (a^2 - b^2) + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 4a^2b^2 \operatorname{tg}^2 r},$$

so sieht man, dass beide mit Zunahme von r bis zur Unendlichkeit ansteigen.

Was endlich das den Lichtübergang vermittelnde Huygens'sche Princip betrifft, so heisse E der Einfallswinkel im Weltäther (resp. Luft), r_n der Brechungswinkel der sich dem Strahle zuordnenden Normale und v_n das entsprechende Brechungsverhältniss. Alsdann ist bekanntlich zu setzen:

$$\frac{\sin E}{\sin r_n} = \frac{v}{\cos \delta} = v_n,$$

1) Vgl. z. B. Ketteler, Wied. Ann. 18. p. 646. 1883.

2) Ich benutze diese Gelegenheit, um einen bisher dunkel gebliebenen Punkt (p. 651) durch directe Heranziehung der Incompressibilitätsbedingung durch vorstehende genauere Fassung aufzuhellen.

wenn δ den Winkel bedeutet zwischen Strahl und Normale. Versteht man noch unter ψ den Flächenwinkel zwischen der Ebene von Strahl und Loth und der Einfallsebene, so ist der Zusammenhang zwischen r_n und r durch die Gleichung ausgedrückt:

$$(II) \quad \cos \delta = \cos r \cos r_n + \sin r \sin r_n \cos \psi.$$

Eine für die Anwendung bequemere Form der bisherigen Ausdrücke erhält man durch Einführung eines dem Einfallswinkel E verwandten Winkels J und einer Hilfsgrösse p , die beide defnirt seien durch die Beziehungen:

$$(1) \quad \nu \cos r = \sqrt{\nu^2 - \sin^2 J} = p, \quad \sin J = \nu \sin r.$$

Da wir im Folgenden speciell die Totalreflexion an einem anisotropen Medium untersuchen, so muss dasselbe entweder optisch dünner sein, als die Luft, oder man muss diese wie beim Kohlrausch'schen Totalreflectometer durch ein dichteres (isotropes) Medium ersetzen. Betrachten wir dasselbe als genügend durchsichtig, um seinen Extinctionscoëfficienten $b_1 = 0$ setzen zu können, so wird der absolute Refractionscoëfficient desselben $a_1 = n_1$ constant. Die Einfallswinkel E und J des Weltäthers hängen dann aber mit dem thatsächlichen Einfallswinkel e und einem virtuellen i im Innern dieses Mediums zusammen durch die Gleichungen:

$$\sin E = n_1 \sin e, \quad \sin J = n_1 \sin i.$$

Wir wollen jetzt diese neuen Winkel in die Ausdrücke (I) und (II) einführen und erhalten durch einfache Rechnungen:

$$(2) \quad \begin{cases} 2p^2 = +(a^2 - b^2 - n_1^2 \sin^2 i) + \sqrt{(a^2 - b^2 - n_1^2 \sin^2 i)^2 + 4a^2 b^2}. \\ 2q^2 = -(a^2 - b^2 - n_1^2 \sin^2 i) + \sqrt{(a^2 - b^2 - n_1^2 \sin^2 i)^2 + 4a^2 b^2}, \\ 2\nu^2 = +(a^2 - b^2 + n_1^2 \sin^2 i) + \sqrt{(a^2 - b^2 - n_1^2 \sin^2 i)^2 + 4a^2 b^2}, \end{cases}$$

Werthe, in welchen die Wurzelgrösse stets mit positivem Vorzeichen zu nehmen ist.

Ferner:

$$(3) \quad n_1^2 \sin i \sin e \cos \psi = \nu^2 - p \sqrt{\nu^2 - n_1^2 \sin^2 e}.$$

Was jetzt weiter die Grenz- oder Uebergangsbedingungen betrifft, so denken wir uns die ebene Trennungsfäche beider

Medien als die XY -Ebene eines Coordinatensystemes, dessen Z -Axe sonach mit der Richtung des Lothes zusammenfällt. Alsdann sind diese Bedingungen die folgenden vier:

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \frac{d\xi_1}{dt} = \sum \frac{d\xi_2}{dt}, \quad \sum \frac{d\eta_1}{dt} = \sum \frac{d\eta_2}{dt} \\ \sum \left(\frac{d\xi_1}{dz} - \frac{d\zeta_1}{dx} \right) = \sum \left(\frac{d\xi_2}{dz} - \frac{d\zeta_2}{dx} \right) \\ \sum \left(\frac{d\eta_1}{dz} - \frac{d\zeta_1}{dy} \right) = \sum \left(\frac{d\eta_2}{dz} - \frac{d\zeta_2}{dy} \right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$$

Darin bedeuten ξ , η , ζ die Schwingungskomponenten im Coordinatenanfangspunkt als Einfallspunkt, die angehängten Indices 1 und 2 beziehen sich auf das erste und zweite Mittel und die Summenzeichen auf die Zahl der vorhandenen Strahlen. Lassen wir fortan üblicher Weise die Y -Axe auf der Einfallsebene senkrecht stehen, bezeichnen mit ϱ^p , ϱ^r , resp. ϱ_R^p , ϱ_R^r die Ausschlagskomponenten des einfallenden und reflectirten Lichtes parallel und senkrecht zur Einfallsebene und mit ξ_D , η_D , ζ_D die axialen Componenten der gebrochenen Strahlen, so werden dieselben dargestellt durch:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho^p = \mathfrak{E}_p \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{n_1(z \cos e + x \sin e)}{\lambda} \right), \\ \eta = \varrho^r = \mathfrak{E}_r \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{n_1(z \cos e + x \sin e)}{\lambda} \right), \\ \varrho_R^p = \mathfrak{R}_p \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{n_1(-z \cos e + x \sin e)}{\lambda} \right) - \pi - \chi_p \right], \\ \varrho_R^r = \mathfrak{R}_r \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{n_1(-z \cos e + x \sin e)}{\lambda} \right) - \chi_r \right], \\ \xi_D = \mathfrak{D}_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{v(ux + vy + wz)}{\lambda} \right) - \chi_x \right], \\ \eta_D = \mathfrak{D}_y e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{v(ux + vy + wz)}{\lambda} \right) - \chi_y \right], \\ \zeta_D = \mathfrak{D}_z e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{v(ux + vy + wz)}{\lambda} \right) - \chi_z \right], \end{array} \right.$$

wo noch u , v , w die Richtungscosinus der gebrochenen Strahlen sind.

Dazu treten für beide gebrochene Strahlen die Incompressibilitätsbedingungen:

$$(IV) \quad \frac{d\xi_D}{dx} + \frac{d\eta_D}{dy} + \frac{d\zeta_D}{dz} = 0.$$

Die Gesamtheit dieser Formeln umfasst die Probleme der sogenannten metallischen Spiegelung und Brechung, soweit dieselben von einem durchsichtigen Medium aus erfolgen.

Um nicht zu ausführlich zu werden, wollen wir uns auf die Vorgänge im Hauptschnitt beschränken, wollen etwa den Hauptschnitt mit der Einfallsebene zusammenfallen lassen, sodass nur ein gebrochener Strahl — der extraordinäre — zu Stande kommt. Dann dürfen wir insbesondere in den drei letzten der Ausdrücke (4) setzen:

$$(5) \quad \nu v = 0, \quad \nu u = n_1 \sin i, \quad \nu w = p,$$

und ausserdem $\eta = \eta_R = \eta_D = 0$ nehmen.

Führt man unter diesen Bedingungen die Ausdrücke (4) in die Gleichungen (III), (IV) ein und eliminirt in bekannter Weise die laufende Zeit, so erhält man ohne Schwierigkeit für Amplitude und Phasenänderung des gespiegelten Lichtes die folgenden Werthe:

$$(6_a) \quad \Re_p^2 = \frac{[pn_1 - (\nu^2 - q^2) \cos e]^2 + q^2(n_1 - 2p \cos e)^2}{[pn_1 + (\nu^2 - q^2) \cos e]^2 + q^2(n_1 + 2p \cos e)^2},$$

oder kürzer:

$$(6) \quad \frac{\mathfrak{E}_p^2 - \Re_p^2}{\mathfrak{E}_p^2 + \Re_p^2} = \frac{2pn_1 \cos e [n_1^2 \sin^2 i + (p^2 + q^2)]}{(p^2 + q^2)n_1^2 + \cos^2 e [(\nu^2 - q^2)^2 + 4p^2 q^2]},$$

und dazu:

$$(7) \quad \operatorname{tg} \chi_p = \frac{2qn_1 \cos e [n_1^2 \sin^2 i - (p^2 - q^2)]}{(p^2 + q^2)n_1^2 - \cos^2 e [(\nu^2 - q^2)^2 + 4p^2 q^2]}.$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für den gebrochenen Strahl, doch gehe ich hier nicht näher auf dieselben ein.¹⁾

Wie aus Vorstehendem hervorgeht, verlaufen in anisotropen absorbirenden Medien die einer gegebenen Richtung

1) Die Formeln des Textes werden bekanntlich für isotrope Medien mit den von Cauchy gegebenen identisch, sobald man setzt:

$$p = c \vartheta \cos(\varepsilon + u), \quad q = c \vartheta \sin(\varepsilon + u) \\ a = \vartheta \cos \varepsilon, \quad b = \vartheta \sin \varepsilon.$$

Dasselbe gilt von den bezüglichen Ausdrücken der Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene.

sich zuordnenden p, q, v und darum weiter auch die $\Re, \chi$ als stetige Functionen des Einfallswinkels e , resp. der Winkel e und i ohne alle Discontinuität. Eine totale Reflexion ist daher im allgemeinen, d. h. bei gegebener Charakteristik (a, b) nur möglich für $e = 90^\circ$, also bei streifender Incidenz.

Im besonderen ist das Zustandekommen derselben geknüpft an die Bedingung:

$$(V) \quad p = 0.$$

Von den drei Specialfällen, für welche dieselbe erfüllbar ist ($b = 0, a = 0, b = a = 0$), möge hier der erste als der wichtigste genügen. Wir wollen in der That in allen vorstehenden Formeln $b = 0$ setzen und dabei den Incidenzwinkel e von 0 bis 90° ansteigen lassen.

Zunächst geben die Ausdrücke (2) für das Intervall zwischen den Grenzen $n_1 \sin i = 0$ und $n_1 \sin i = a$:

$$(8) \quad \begin{cases} p = \sqrt{a^2 - n_1^2 \sin^2 i}, \\ q = 0, \\ v = a, \\ \chi = 0. \end{cases}$$

Dagegen zwischen den Grenzen $n_1 \sin i = a$ und $n_1 \sin i = n_1$:

$$(9) \quad \begin{cases} p = vw = 0, \\ q = \sqrt{n_1^2 \sin^2 i - a^2}, \\ v = n_1 \sin i, \\ \chi = \chi_p, \end{cases}$$

Dürfen wir daher für das erste Intervall auch:

$$p = a \cos r$$

schreiben und in Rücksicht auf Gleichung (3) noch die unbestimmte Form:

$$(10) \quad e \approx i$$

hinzufügen, so wird für das zweite Intervall nach Substitution der Ausdrücke (9) in die nämliche Gleichung:

$$n_1^2 \sin i \sin e \cos \psi = v^2 = n_1^2 \sin^2 i,$$

woraus folgt:

$$(11) \quad \sin e = \frac{\sin i}{\cos \psi}.$$

Was jetzt weiter die Schwingungsausdrücke (4) für den gebrochenen Strahl betrifft, so reduciren sich dieselben für das erste Intervall auf die eine Form:

$$(12) \quad \varrho_D = \mathfrak{D} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{a(ux + vy + wz)}{\lambda} \right),$$

oder auch bei Einführung der neuen, in der Ebene von Strahl und Loth gelegenen Coordinate r :

$$(12_b) \quad \varrho_D = \mathfrak{D} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{a(z \cos r + r \sin r)}{\lambda} \right).$$

Dagegen liefert das zweite Intervall die Strahlcomponenten:

$$\xi_D = \mathfrak{D}_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{n_1^2 \sin^2 e \cos^2 \psi - a^2}} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + r \frac{n_1 \sin e \cos \psi}{\lambda} \right) - \chi_x \right] \dots,$$

sodass folglich der Totalreflexion stets ein gebrochener, streifender Strahl entspricht mit variablem Extinctions- und variablem Refractionscoëfficienten.

Hierin ist $\lambda/n_1 \sin e \cos \psi$ der in der Richtung des Strahles gemessene Abstand zweier Punkte der Trennungsfläche, die vermöge der einfallenden und reflectirten Wellenbewegung in jedem Augenblick in gleichen Schwingungszuständen sind. Liegt insbesondere der gebrochene Strahl im Hauptschnitte selber, so ist noch $\psi = 0$, $\cos \psi = 1$ zu setzen.

Die dieser speciellen Voraussetzung entsprechenden Ausdrücke (6) und (7) endlich geben für das erste Intervall:

$$(14) \left\{ \begin{aligned} \Re_p &= \pm \frac{n_1 \sqrt{a^2 - n_1^2 \sin^2 i} - a^2 \cos e}{n_1 \sqrt{a^2 - n_1^2 \sin^2 i} + a^2 \cos e} \mathfrak{E}_p = \mp \frac{a \cos e - n_1 \cos r}{a \cos e + n_1 \cos r} \mathfrak{E}_p, \\ \text{tg } \chi_p &= 0. \end{aligned} \right.$$

Dieselben sind, abgesehen von dem um 90° differirenden Schwingungsazimuth, identisch mit den bezüglichlichen Ausdrücken der Theorie Neumann's.

Andererseits erhält man für das zweite Intervall:

$$(15) \quad \Re_p = \pm \mathfrak{E}_p, \quad \text{tg } \chi_p = \frac{2n_1 a^2 \cos e \sqrt{n_1^2 \sin^2 e - a^2}}{n_1^2 (n_1^2 \sin^2 e - a^2) - a^4 \cos^2 e},$$

und diese wiederum werden bei Einführung des relativen Index $n = (n_1/a)$ identisch mit den für isotrope Medien geltenden Ausdrücken Fresnel's und Cauchy's.

Da für den etwa gleichzeitig mit entstehenden ordinären Strahl unbeschadet seines verschiedenen Index ($a_o \geq a_i$) dieselben Ausdrücke anzuwenden sind, die Fresnel und Cauchy für senkrecht zur Einfallsebene schwingendes Licht und für isotrope Medien aufgestellt, und die ich bereits früher¹⁾ in ähnlicher Weise abgeleitet habe, so übersieht man auch die durch das Zusammenwirken beider Schwingungsantheile entstehende gemischte Erscheinung, die meines Wissens bisher noch von niemand experimentell behandelt ist.

Vorstehende Untersuchung hat sonach gelehrt, dass die Totalreflexion auch in anisotropen Medien ein specieller Fall der Metallreflexion ist, und dass gegenwärtig weder die eine noch die andere der früheren, physikalisch unbefriedigenden imaginären Kunstgriffe mehr bedarf. Andererseits ist für den Uebergang der gewöhnlichen Reflexion in die totale und umgekehrt die durch Cauchy's Erklärungsversuche stark getrübt Continuität der Erscheinung in ihrer vollen Ursprünglichkeit, und zwar vom streng mechanischen Standpunkte aus, wieder hergestellt.

Bonn, Herbst 1883.

Nachschrift. In einem eben veröffentlichten Aufsatze: „Theorie der Quincke'schen Beobachtungen über totale Reflexion“²⁾ hat Hr. Voigt einen dankenswerthen Beitrag zur Theorie der Totalreflexion geliefert. Da indess die Arbeiten der unmittelbaren Vorgänger nicht citirt sind, so möchte ich mir hier die Bemerkung gestatten, dass ich die Theorie der Totalreflexion an isotropen Medien zuerst von allen ihr noch anklebenden Unsicherheiten und Unklarheiten befreit und sie sogar als einen speciellen Fall der allgemeineren Metallreflexion dieser habe subsumiren können. Ersteres ist insbesondere bereits von einem Anhänger des Neumann'schen Systemes, Hrn. Glazebrook³⁾, in bestimm-

1) Ketteler, Carl's Repert. 16, p. 261. 1880. Beibl. 4, p. 879. 1880.

2) Voigt, Göttinger Nachr. Febr. 1884. p. 50.

3) Glazebrook, Proc. Cambridge Phil. Soc. 3, p. 330. 1880 und 4, p. 155. 1881.

ter Form anerkannt, und hat derselbe zuerst von seinem Standpunkte aus die Fresnel'schen Ausdrücke ohne Benöthigung complexer Grössen abgeleitet.

Was also Hr. Voigt auf den vier ersten Seiten seiner Abhandlung gibt, ist daher nicht neu, ja nicht einmal vollständig, sofern die Verträglichkeit eines Schwingungsausdruckes von der Form:

$$\Re e^{\frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{n_1^2 \sin^2 e - n_2^2}} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + n_1 \sin e \frac{x}{\lambda} \right) - \chi \right]$$

mit den Differentialgleichungen der bezüglichen Medien von ihm stillschweigend als selbstverständlich vorausgesetzt wird. Auch die Art und Weise, wie gerade der Absorptionsvorgang die Erhaltung der Energie ermöglicht, kommt nirgendwo zur Sprache.

Was sodann die Quincke'schen Versuche betrifft, so habe ich eine exacte Theorie derselben der Umständlichkeit der Rechnungen wegen — sie erfordern drei hintereinander liegende Medien — bisher noch verschoben, habe aber andererseits eine in gewissem Sinne noch schwierigere Aufgabe, die Berechnung des Durchganges des Lichtes durch eine planparallele Metallplatte, schon vor mehreren Jahren durchgeführt.¹⁾ Hätte ich hierbei nicht, wie das begreiflicher Weise meistens zulässig ist, den Einfluss des an der Hinterfläche gespiegelten Lichtes auf das an der Vorderfläche reflectirte vernachlässigt, so würden meine Formeln die des Hrn. Voigt vollständig umfassen, und würden letztere durch Nullsetzung des Absorptionscoëfficienten ohne weiteres daraus abzuleiten sein.

Die in Rede stehende Arbeit hat jedenfalls ihre Aufgabe mit Erfolg gelöst. Da Hrn. Voigt's Ausdrücke nur durch geringfügige Aenderungen in die des Fresnel'schen Systemes übergehen, so nehme ich natürlich das gesammte Resultat, das ja ohnehin für seinen Autor in Bezug auf Dispersion nur näherungsweise gültig ist, für jenes von mir vertretene System als streng richtig in Anspruch.

1) Ketteler, Wied. Ann. 3. p. p. 95 u. 284. 1878.

Nunmehr dürfte wohl auch die Entwicklung der Totalreflexion der anisotropen Medien für die Anhänger der Neumann'schen Grundvorstellung ein erhöhtes Interesse gewinnen; dieselbe wird eben für die Leistungsfähigkeit des „vollständigen Kirchhoffschen Princip“ die schärfste Probe abgeben.

Bonn, im April 1884.

VI. *Duplik gegen Hr. W. Voigt;
von E. Ketteler.*

Hr. Voigt hat meiner Erwiderung¹⁾ eine Duplik²⁾ folgen lassen, die ich im Folgenden in möglichster Kürze besprechen werde, ohne freilich zu erwarten, dass Hr. Voigt selbst sich dadurch „zur Aufgabe irgend eines seiner Bedenken veranlasst sehen werde.“

Indem ich zunächst bemerke, dass die folgenden Zeilen für die Beurtheilung der Reflexionstheorien Fresnel's und Neumann's einige neue Gesichtspunkte enthalten, folge ich einzeln den von ihm aufgeführten Punkten; es sind ihrer sieben.

1) Wenn Hr. Voigt bezüglich der Constitution der Materie die Anschauungen der Hrn. v. Helmholtz, Lommel sowie die meinige derart zurechtlegt, dass dieselben z. B. auf die Gase der kinetischen Theorie nicht mehr zu passen scheinen, so ist das scheinbar, und dürfte insbesondere ein Einblick in die astronomische Undulationstheorie vor derartigen Täuschungen schützen. Ich nenne die Moleküle der Chemie durchweg schwingungsfähige Atomgebilde und unterscheide an ihnen folglich Punkte, die in relativer Ruhe, und solche, die in relativer Bewegung sind.

1) Ketteler, Wied. Ann. 21. p. 178. 1884.

2) Voigt, Wied. Ann. 21. p. 534. 1884.

2) Ich habe bewiesen, dass die von Hrn. Voigt anfänglich aufgestellten, später freilich aufgegebenen allgemeinen Bewegungsgleichungen als solche falsch sind, weil sie auf einer unrichtigen Handhabung des Reactionsprinzips beruhen. Hr. Voigt erklärt diesen meinen Beweis für unrichtig, weil — Aether- und Körpertheilchen nicht ineinander verwandelbar sind. Er erklärt also damit die vielfach gehegte Ansicht, die ponderable Materie sei nicht essentiell vom Aether verschieden, für irrig. Keinenfalls aber dürfte es angehen, selbst einen mathematischen Beweis von dieser Möglichkeit abhängig zu machen.

Eigenthümlich ist übrigens die Meinung Hrn. Voigt's, dass alles, was ich zur allgemeinen Aufklärung gegen sein System vorbringe, ausschliesslich im Interesse und zum „Aushelfen“ meiner eigenen Theorie dienen müsse.

3) Wenn ich speciell infolge der Anregungen, die ich Hrn. Voigt verdanke, in die glückliche Lage gekommen bin, meine Differentialgleichungen vervollständigen zu können, und dadurch jetzt näher auf den eigentlichen Grund der Erscheinungen einzugehen vermag, so würde ich für diese Anregungen doppelt dankbar sein, wenn sie nicht mit einer so unerfreulichen Polemik verbunden wären. Diese meine Erklärung besagt freilich nicht, dass meine jetzige Auffassung mit meiner früheren in directem Widerspruch steht, sondern nur, dass dieselbe durch die eingeführten Zusatzglieder mehr leistet als die frühere. In der That werden in der ersten der Differentialgleichungen (13)¹⁾, solange man dieselbe auf ganz kurze Wellen bezieht, die beiden hinzugefügten Glieder der rechten Seite überflüssig, und geht dieselbe dadurch im wesentlichen in die ältere Form zurück.

4) Hiernach komme ich zur Reflexionstheorie und werde bei derselben etwas ausführlicher verfahren.

a) In Betreff der Fresnel'schen Formeln macht Hrn. Voigt neben der aus dem Incompressibilitätsprincip ableitbaren Grenzbedingung der Normalcomponenten:

1) Ketteler, Wied. Ann. 21. p. 205. 1884. Die dort hinzugefügte Anmerkung stellt sich auch für die Optik als wichtiger heraus, als damals angenommen ist.

$$\sum \zeta_1 n_1 \cos r_1 = \zeta_2 n_2 \cos r_2$$

die auf dieselben Componenten bezügliche, aber mit jenem Princip nicht direkt in Verbindung stehenden Form:

$$\sum \zeta_1 n_1 = \zeta_2 n_2$$

mehrfache Schwierigkeit. Die erste dieser Gleichungen ergibt sich für $\eta = 0$ ohne weiteres aus der Fresnel-Neumann'schen Continuitätsbedingung: $\sum \xi_1 = \xi_2$, die ja in Rücksicht auf das Huygens'sche Princip auch $\sum (d\xi_1/dx = d\xi_2/dx)$ geschrieben werden kann, und die dann unter Benutzung der Incompressibilitätsgleichung übergeht in:

$$(1) \quad \sum \frac{d\zeta_1}{dz} = \frac{d\zeta_2}{dz}.$$

b) Was dagegen die zweite der obigen Gleichungen betrifft, so hat Hr. Voigt die mehr negative als positive Form $\sum \zeta_1 \geq \zeta_2$ derselben, die ich einmal lediglich im Gegensatz zur Neumann'schen Forderung:

$$\sum \zeta_1 = \zeta_2$$

gebraucht habe, aus ganz befremdlichen Gründen mit der Annahme der gleichen Dichte und der Incompressibilität des Aethers unvereinbar erklärt. Ich habe darauf nur kurz, aber wohl verständlich, geantwortet, dass ich nicht begreife, wie man derartiges aus dem Incompressibilitätsprincip folgern könne, und jetzt nun muss ich geradezu darüber staunen, dass ich „dieses Princip nicht überall anerkennen soll (ob mit Nebengedanken über seine strenge Gültigkeit oder nicht, sei gleichgültig), sondern nur wo es mir passe“ (!). Der dann folgende Beweis der erwähnten Neumann'schen Grenzgleichung als Consequenz des Incompressibilitätsprincips ist aber falsch, sofern von den drei Componenten ξ , η , ζ der bekannten Gleichung:

$$(2) \quad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0,$$

ξ und η ausser Acht gelassen werden, während doch bei allen vorkommenden Erscheinungen mindestens etwa ξ und ζ zusammengehören. Wenn allerdings für den Grenzfall der

streifenden Incidenz und bei Schwingungen parallel der XZ -Ebene als der Einfallsebene $\xi = 0$ zu werden scheint, so bleibt dennoch die obige Gleichung erfüllt, da dann bei endlichem ζ der Factor $\cos r$ gleich Null wird.

Wie sehr und unbedingt ich meinerseits das in der Reflexionstheorie der absorbirenden Medien von mir zu Ehren gebrachte Incompressibilitätsprincip anerkenne, geht doch auch wohl daraus hervor, dass ich der obigen Gleichung für den Aether eine ganz gleiche für die Körpertheilchen hinzugefügt habe.¹⁾

c) Es soll jetzt bewiesen werden, dass die neueste Form der von Hrn. Voigt aufgestellten Reflexionstheorie, die sich als eine die Dispersion berücksichtigende Verbesserung der Neumann'schen Theorie ankündigt, in Wirklichkeit ein Aufgeben ihrer Folgerichtigkeit ist. Des Leser möge dabei entscheiden, inwieweit die mir p. 539 von Hrn. Voigt vorgeworfenen „Wandelungen“ sich auch in seinen eigenen Arbeiten nachweisen lassen. Bevor ich indess den angedeuteten Versuch mache, habe ich einen Hülfsatz zu besprechen.

Zu dem Ende erinnere ich an die vier folgenden Grenzgleichungen, die, wie ich²⁾ früher erwiesen habe, die specielle Theorie Fresnel's und Neumann's in sich einschliessen. Sie lauten bei beliebiger Lage der X - und Y -Axe:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{d\xi_2}{dt}, \quad \sum \frac{d\eta_1}{dt} = \frac{d\eta_2}{dt} \\ B_1 \sum \left(\frac{d\xi_1}{dz} - \frac{d\zeta_1}{dx} \right) = B_2 \left(\frac{d\xi_2}{dz} - \frac{d\zeta_2}{dx} \right) \\ B_2 \sum \left(\frac{d\eta_1}{dz} - \frac{d\zeta_1}{dy} \right) = B_2 \left(\frac{d\eta_2}{dz} - \frac{d\zeta_2}{dy} \right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{array}$$

Ich habe sie bei jenem Anlass als vier zusammengehörige, sich gegenseitig ergänzende Beziehungen in aller Strenge aus einer einzigen Formel abgeleitet, die einer Formel Hrn. Kirch-

1) Ketteler, Wied. Ann. 18. p. 647. 1888. Ferner: 21. p. 207. 1884.

2) Ketteler, l. c. 21. p. 633. 1883.

hoff's nachgebildet ist, welche seitdem von Hrn. Voigt kurz das „Kirchhoff'sche Princip“ genannt wird.

Auch Hr. Voigt erkennt diese Gleichungen als richtig an und braucht dieselben, wenngleich in viel verwickelterer, äusserer Gestalt, die freilich sich mehr an Kirchhoff's Arbeit anschliesst, als an die meinige. Legen wir uns jetzt die Frage vor: Welches ist die mit den vier vorstehenden Gleichungen verträgliche Form der Grenzbedingung der Normalcomponenten?

Obwohl ich schon mehrfach darauf hingewiesen habe, dass die anscheinend von Cauchy herrührende Verquickung der Grenzgleichungen der Elasticität mit dem Huygens'schen Princip durch nichts begründet sei, und dass somit das eine dem anderen coordinirt und nicht subordinirt sei, so bezieht nichtsdestoweniger Hr. Voigt in herkömmlicher Weise seine Uebergangsbedingungen nicht auf den (allerdings beliebigen) Coordinatenanfangspunkt, sondern auf die ganze Ebene $z = 0$. Hat das zwar für durchsichtige Medien keine directen üblen Folgen, so trübt es doch die logische Consequenz. Es sei also nochmals constatirt, dass die obigen Gleichungen zunächst nur gelten sollen für den Punkt $x=y=z=0$.

Supponiren wir jetzt der Kürze halber den Fall, dass es sich um Parallelschwingungen zur Einfallsebene handle, sodass die $\eta = 0$ sind und sich einfach schreiben lässt:

$$\Sigma \xi_1 = \xi_2, \quad B_1 \Sigma D_1 = B_2 D_2,$$

unter D die Drehcomponente in der Einfallsebene verstanden.

Der Umstand nun, dass der Coordinatenanfangspunkt beliebig ist, und dass folglich die vorstehende Gleichheit der Ausschläge und Drehcomponenten für alle Punkte der X -Axe gleichzeitig zutrifft, lässt sich für die oben aufgeworfene Frage analytisch verwerthen. Betrachten wir einen vom Coordinatenanfang um Δx abstehenden Punkt, so werden offenbar für ihn die Grenzbedingungen gelten:

$$\begin{aligned} \Sigma \left(\xi_1 + \frac{d\xi_1}{dx} \Delta x \right) &= \xi_2 + \frac{d\xi_2}{dx} \Delta x \\ B_1 \Sigma \left(D_1 + \frac{dD_1}{dx} \Delta x \right) &= B_2 \left(D_2 + \frac{dD_2}{dx} \Delta x \right). \end{aligned}$$

Wir haben folglich die vier verträglichen Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sum \xi_1 &= \xi_2, & \sum \frac{d\xi_1}{dx} &= \frac{d\xi_2}{dx} \\ B_1 \sum \left(\frac{d\xi_1}{dz} - \frac{d\zeta_1}{dx} \right) &= B_2 \left(\frac{d\xi_2}{dz} - \frac{d\zeta_2}{dx} \right) \\ B_1 \sum \frac{d \left(\frac{d\xi_1}{dz} - \frac{d\zeta_1}{dx} \right)}{dx} &= B_2 \frac{d \left(\frac{d\xi_2}{dz} - \frac{d\zeta_2}{dx} \right)}{dx} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Der zweiten derselben ist schon oben gedacht worden. Was jetzt die vierte betrifft, so soll dazu der beiderseits identisch gleiche Ausdruck:

$$- B_1 \sum \frac{d \left(\frac{d\xi_1}{dx} + \frac{d\zeta_1}{dz} \right)}{dz} = - B_2 \frac{d \left(\frac{d\xi_2}{dx} + \frac{d\zeta_2}{dz} \right)}{dz}$$

als Ausdruck des Incompressibilitätsprinzips addirt werden. Es kommt dann:

$$(4) \quad B_1 \sum \left(\frac{d^2 \zeta_1}{dx^2} + \frac{d^2 \zeta_1}{dy^2} + \frac{d^2 \zeta_1}{dz^2} \right) = B_2 \left(\frac{d^2 \zeta_2}{dx^2} + \frac{d^2 \zeta_2}{dy^2} + \frac{d^2 \zeta_2}{dz^2} \right),$$

sofern wir nämlich die Glieder $d^2 \zeta / dy^2$, die im allgemeineren Falle eine eben solche Verschiebung des Einfallspunktes in der Richtung der Y -Axe zuwege bringt, gleich hinzufügen. Diese so erwiesene Gleichung habe ich schon in einem älteren Aufsatz¹⁾, ohne sie freilich damals auch theoretisch zu begründen, empirisch abgeleitet; sie mag jetzt den Gleichungen (3) als eine Art Ergänzung hinzugefügt werden.

Setzt man in diesen Gleichungen:

$$B_1 = B_2,$$

so ergibt die Substitution der Schwingungsausdrücke die Fresnel'schen Formeln. Setzt man dagegen:

$$B_1 : B_2 = \frac{1}{n_1^2} : \frac{1}{n_2^2},$$

so erhält man die Formeln Neumann's.

Was insbesondere die letzte Gleichung (4) betrifft, so führt dieselbe unter der ersteren Annahme zur Forderung:

$$\sum \zeta_1 n_1 = \zeta_2 n_2,$$

unter letzterer Annahme dagegen zu:

$$\sum \zeta_1 = \zeta_2.$$

1) Ketteler, Wied. Ann. 1. p. 220. 1877.

Handelt es sich insbesondere auf dem Standpunkte Fresnel's um genäherte streifende Incidenz, sodass für $\eta = \xi = 0$ Gleichung (4) geschrieben werden kann:

$$\sum \frac{d^2 \zeta_1}{dx^2} = \frac{d^2 \zeta_2}{dx^2},$$

so besagt dieselbe, dass die Krümmung der aneinander anstossenden Grenzsichten beider Medien in jedem Augenblick gleich ist. Dasselbe gilt für die Incidenzen der Totalreflexion.

d) Hat sonach die vorstehende Entwicklung dargethan, dass die strenge Neumann'sche Theorie für den Hauptfall $\eta = 0$ zu den Uebergangsbedingungen führt:

$$(5) \quad \Sigma \zeta_1 = \zeta_2, \quad \frac{1}{n_1^2} \Sigma D_1 = \frac{1}{n_2^2} D_2,$$

so stellen wir diesen nunmehr die von Voigt gewollten gegenüber. Letztere haben zur Zeit die Form¹⁾:

$$(6) \quad \begin{cases} M_1 \Sigma \zeta_1 = M_2 \zeta_2, & B_1 \Sigma D_1 = B_2 D_2 \\ \frac{1}{n_1^2} = \frac{B_1}{M_1}, & \frac{1}{n_2^2} = \frac{B_2}{M_2}. \end{cases}$$

Dieselben sind folglich nur dann mit den strengen Neumann'schen Gleichungen und folglich auch nur dann unter einander verträglich, wenn gesetzt wird: $M_1 = M_2$. Nun hat Hr. Voigt aus seiner Dispersionstheorie die Ausdrücke abgeleitet:

$$B_1 = e_1 + a_1 - \frac{a_1'}{r^2}, \quad M_1 = m_1 + r_1 - n_1 r^2,$$

$$B_2 = e_2 + a_2 - \frac{a_2'}{r^2}, \quad M_2 = m_2 + r_2 - n_2 r^2,$$

worin r der Schwingungsdauer proportional ist. Und wenn er auf Grund der Erfahrung die vereinfachende Annahme macht, dass $M_1 = M_2$, so ist damit seine Reflexionstheorie und insbesondere seine Grenzbedingung:

$$\Sigma M_1 \zeta_1 = M_2 \zeta_2$$

zu einer empirischen und ganz und gar willkürlichen geworden, die, wie Hr. Voigt mir p. 536 vorwirft, „nur aufgestellt

1) Voigt, Göttinger Nachr. Febr. 1884. p. 50.

ist, um die von ihm gewünschten Ausdrücke zu geben.“ Dann darf man aber auch (p. 540) „derartige Gleichungen nicht als eine strenge Theorie hinstellen, am wenigsten wenn sie sich mit erprobten allgemeineren Gesetzen in Widerspruch befinden.“

Der Voigt'sche Uebergang von der strengen Neumann'schen Gleichung $\Sigma \zeta_1 = \zeta_2$ zur vorstehenden hat sich mittelst der Durchgangsform:

$$m_1 \Sigma \zeta_2 = m_2 \zeta_2$$

vollzogen, worin m_1 , m_2 die bezüglichen Aetherdichtigkeiten bedeuten, eine natürlich ebenso falsche Gleichung, die seiner Zeit¹⁾ durch den Satz motivirt wurde: „Bekanntlich nimmt man an, dass die Normalcomponenten sich in unmerklicher Entfernung von der Grenze umgekehrt wie die Dichtigkeiten verhalten.“ Hr. Voigt scheint zwar diese Widersprüche gelegentlich selbst gefühlt zu haben, in ihren tieferen Grund aber nicht eingegangen zu sein.

5) Nach diesem Zusammenbruch der „Pfeiler seiner Theorie“ verlieren die weiteren Monita stark an Interesse. Da Hr. Voigt in seiner ersten Kritik sechs Continuitätsgleichungen, nämlich solche für die Aethertheilchen und solche für die Körpertheilchen, getrennt aufgestellt, und ich die letzteren aus dem Grunde verworfen hatte, weil sie im Falle des Lichtüberganges vom freien Aether aus ein Mitschwingen der Körpertheilchen unmöglich machten, so schliesst Hr. Voigt diese missliche Consequenz jetzt mit den Worten aus: „Bekanntlich werden dann die Verrückungscomponenten der Körpertheilchen unbestimmt.“

6) Was sodann die Besprechung des Kirchhoff'schen Principis und seinen Zusammenhang mit den Gleichungen der potentiellen und kinetischen Energie betrifft, so hat er von meiner Erwiderung nicht hinlänglich Notiz genommen. Wenn ich mir vorstelle, dass ein brechender Körper abwechselnd aus unendlich dünnen Schichten freien Aethers und aus solchen, die zugleich ponderable Materie enthalten,

1) Voigt, Wied. Ann. 19. p. 900. 1883.

bestehe, so will Hr. Voigt „kein Wort über diese Annahme verlieren.“ Er vergisst dabei leider nur, dass der Flächenraum dieser Schichten auch nur unendlich klein zu sein braucht, und dass die rationelle Reflexionstheorie (abgesehen von dem von ihr vorausgesetzten Huygens'schen Princip) mit unendlich engen „Strahlcylindern“ auskommt. Im übrigen liegen diese Vorstellungen so sehr in der neueren Dispersionstheorie begründet, dass auch die Herren Sellmeier, v. Helmholtz und Lommel sie mit mir theilen werden.

Was schliesslich das „Merkwürdige“ betrifft, dass ich eine Formulirung des so oft von mir citirten Princip der Energie nirgends gegeben haben soll, so will ich zunächst die Gleichung:

$$(7) \quad B_1 \sin e \cos e (\Delta_2 \xi_E \cdot d\xi_E - \Delta_2 \xi_R \cdot d\xi_R) = B_2 \sin r \cos r \Delta_2 \xi_D \cdot d\xi_D$$

als Ausdruck für das Princip der Erhaltung der Aetherarbeit oder genauer der potentiellen Energie desselben nochmals hinschreiben. Wenn Hr. Voigt dann in dieselbe den aus der folgenden Beziehung¹⁾:

$$(8) \quad m \frac{d^2 \xi}{dt^2} d\xi + m' \frac{d^2 \xi'}{dt^2} d\xi' = e \Delta_2 \xi d\xi + \beta m' \xi' d\xi - \alpha \xi' d\xi',$$

sich ergebenden Werth von $e \Delta_2 \xi d\xi$ für beide Medien einführt, so gewinnt er damit diejenige Gleichung, die für $\xi = 0$ mit den Gleichungen der lebendigen Kräfte von Fresnel und Neumann (dieselben auf die kinetischen Energien bezogen gedacht) übereinstimmt.

7) Die von Hrn. Kirchhoff gegebene Entwicklung, die seit meiner Heranziehung derselben von Voigt adoptirt ist, befindet sich in einer Arbeit über die Krystallreflexion und bezieht sich sonach ursprünglich nur auf diese. Da nun die Differenzen zwischen den beiden (früher gleich berechtigten) Reflexionstheorien für anisotrope Medien weit schroffer hervortreten als für isotrope, so muss bei ersteren jede Verwerthung einer bestimmten Idee sofort je nach der Grundanschauung zu gänzlich verschiedenen Gestaltungen führen.

1) Ketteler, Wied. Ann. **21**. p. 203. 1884.

Es ist also willkürlich, meine Grenzgleichungen (3) darum anzugreifen, weil sie im Gegensatz zu den Neumann'schen für anisotrope und isotrope Medien identisch sind.

Nach Erledigung dieser sieben Punkte will ich mich bei dem mir schliesslich gemachten Vorwurfe der „Wandelungen“ in meiner Theorie (p. 539) nicht lange aufhalten. So lange „Wandelung“ und „stetige Verbesserung“ sich deckende Begriffe sind, bleibt jene eben ein Attribut des menschlichen Fortschreitens, nur muss sie sich natürlich hüten, in Ueberstürzung umzuschlagen.

Hiermit wird es hoffentlich der Polemik genug sein.

Bonn, im März 1884.

VII. *Ueber die Verzögerung, welche beim Durchgange des Lichtes durch eine Platte eintritt, und über einige darauf gegründete Apparate;*
von W. Voigt.

Es sei eine Schicht von der Dicke l eines beliebigen Mediums (1), welchem eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω_1 entspricht, gegeben; aus einem angrenzenden Medium (0) mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω falle eine ebene Lichtwelle unter einem Winkel gegen das Einfallslot ein, dessen Sinus und Cosinus α und γ ist, und pflanze sich in der Schicht (1) in einer Richtung fort, die durch α_1 und γ_1 definiert ist. Dann setzt man den Unterschied der Phase, den die Welle nach dem Durchgang durch die Schicht an einer beliebigen Stelle gegenüber einer frei fortgepflanzten Welle besitzt, gewöhnlich ¹⁾:

$$\Delta = \frac{l}{i\gamma_1} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{\gamma\gamma_1 + \alpha\alpha_1}{\omega} \right),$$

worin $2\pi\tau = T$ die Schwingungsdauer ist. Speciell bei senkrechtem Einfall wird dies:

1) Vgl. z. B. Quincke, Pogg. Ann. 132. p. 205. 1867.

$$\Delta_0 = \frac{l}{t} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega} \right)$$

oder $2\pi\tau\omega = \lambda$, d. i. gleich der Wellenlänge, und $\omega/\omega_1 = n$, d. i. gleich dem Brechungscoëfficienten gesetzt:

$$\Delta_0 = \frac{2\pi l}{\lambda} (n - 1).$$

Diese Formeln sind aber unrichtig, weil die Lichtwelle nicht einfach durch die Platte hindurchgeht, sondern an den Grenzen reflectirt wird, die austretende Welle also aus Theilen, welche verschieden oft die Platte passirt haben, zusammengesetzt ist. Nur bei schiefe Einfall können diese inneren Reflexionen ganz wirkungslos werden, wenn die Fläche der Platte klein gegen ihre Dicke ist, bei normalem Einfall kann ihre Wirkung durch gewisse Umstände zwar gemindert, im Allgemeinen aber nicht aufgehoben werden.

Da diese mindestens ungenauen Formeln in viele Handbücher¹⁾ ohne eine Bemerkung über die Grenze ihrer Gültigkeit übergegangen sind, so dürfte es angemessen sein, einmal auf diejenigen hinzuweisen, welche die strenge Theorie — die jene inneren Reflexionen berücksichtigt — abzuleiten gestattet.²⁾

Ich nehme die Normale der Platte zur *Z*-Axe, ihre erste Fläche zur Ebene $z = 0$, die zweite zur Ebene $z = l$, die *XZ*- zur Einfallsebene und denke die beiderseits die Platte begrenzenden Medien von verschiedener Natur, definirt durch $\alpha\gamma\omega$ und $\alpha'\gamma'\omega'$.

Setze ich noch die Verschiebungscomponente normal zur Grenze

in der einfallenden Welle:

$$v_e = E_s \sin \frac{1}{t} \left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega} \right),$$

in der an der ersten Fläche reflectirten:

$$v_r = R_s' \sin \frac{1}{t} \left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} \right) + R_s'' \cos \frac{1}{t} \left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} \right),$$

1) Vgl. z. B. Wüllner, Physik, 2. p. 388 und 422. 1875; Mousson, Physik, 2. p. 493. 1872; V. v. Lang, Physik. p. 252. 1873; auch Billet, Optik, p. 66. 1858; Radicke, Optik, 1. p. 409. 1839; Verdet-Exner, Optik, 1. p. 40. 1881.

2) Vgl. übrigens hierzu Zech, Pogg. Ann. 109. p. 60. 1860.

in der ebenda gebrochenen:

$$v_1 = \Delta_s' \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} \right) + \Delta_s'' \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} \right).$$

in der an der zweiten Fläche reflectirten:

$$v_2 = P_s' \sin \left(t - \frac{\alpha_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1} \right) + P_s'' \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1} \right),$$

in der ebenda gebrochenen:

$$v_d = D_s' \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha' x + \gamma' (z-l)}{\omega'} \right) + D_s'' \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha' x + \gamma' (z-l)}{\omega'} \right),$$

so werden unter Benutzung der Neumann'schen Grenzgleichungen, die ich früher unter gewissen Voraussetzungen mit dem Princip der Energie verträglich erwiesen habe¹⁾, die Bedingungen bestehen:

für $z = 0$

$$E_s + R_s' = \Delta_s' + P_s'$$

$$R_s'' = \Delta_s'' + P_s''$$

$$\frac{\alpha' \gamma'}{\alpha_1 \gamma_1} (E_s - R_s') = \Delta_s' - P_s'$$

$$- \frac{\alpha' \gamma'}{\alpha_1 \gamma_1} R_s'' = \Delta_s'' - P_s'',$$

$$\text{für } z = l \quad D_s' = (\Delta_s' + P_s') c + (\Delta_s'' - P_s'') s \quad 1.$$

$$D_s'' = -(\Delta_s' - P_s') s + (\Delta_s'' + P_s'') c$$

$$\frac{\alpha' \gamma'}{\alpha_1 \gamma_1} D_s' = (\Delta_s' - P_s') c + (\Delta_s'' + P_s'') s$$

$$\frac{\alpha' \gamma'}{\alpha_1 \gamma_1} D_s'' = -(\Delta_s' + P_s') s + (\Delta_s'' + P_s'') c,$$

$$\text{worin kurz} \quad s = \sin \frac{l \gamma_1}{\omega_1 \tau} \quad c = \cos \frac{l \gamma_1}{\omega_1 \tau}.$$

Unter Benutzung der Abkürzungen:

$$\sigma = \alpha \gamma + \alpha_1 \gamma_1, \quad \delta = \alpha \gamma - \alpha_1 \gamma_1,$$

$$\sigma' = \alpha' \gamma' + \alpha_1 \gamma_1, \quad \delta' = \alpha' \gamma' - \alpha_1 \gamma_1,$$

erhält man hieraus:

$$\Pi_s D_s' = E_s c (\sigma^2 - \delta^2) (\sigma \sigma' - \delta \delta')$$

$$\Pi_s D_s'' = -E_s s (\sigma^2 - \delta^2) (\sigma \sigma' + \delta \delta')$$

$$\Pi_s R_s' = E_s [(\sigma'^2 + \delta'^2) \sigma \delta - \sigma' \delta' (\sigma^2 + \delta^2) (c^2 - s^2)] \quad 2.$$

$$\Pi_s R_s'' = E_s \sigma' \delta' (\sigma^2 - \delta^2) 2 s c$$

$$\Pi_s = (\sigma \sigma' - \delta \delta')^2 c^2 + (\sigma \sigma' + \delta \delta')^2 s^2.$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 900. 1883.

Die Intensitäten werden gemessen durch:

$$R_s^2 = R_s'^2 + R_s''^2 = \frac{E_s^2}{\Pi_s} \left((\sigma\delta' - \sigma'\delta)^2 + 4\sigma\sigma'\delta\delta's^2 \right)$$

$$D_s^2 = D_s'^2 + D_s''^2 = \frac{E_s^2}{\Pi_s} (\sigma^2 - \delta^2)^2,$$

worin man auch schreiben kann:

$$\Pi_s = (\sigma\sigma' - \delta\delta')^2 + 4\sigma\sigma'\delta\delta's^2.$$

Die Phasendifferenz Δ_s zwischen zwei an den beiden Grenzflächen der Platte, und zwar an derselben Normalen gelegenen Stellen ist (im Sinne einer Verzögerung gerechnet) gegeben durch:

$$\operatorname{tg} \Delta_s = - \frac{D_s''}{D_s'} = \frac{s}{c} \cdot \frac{\sigma\sigma' + \delta\delta'}{\sigma\sigma' - \delta\delta'}. \quad \left| \quad 3. \right.$$

d. h.:

$$= \frac{\alpha\gamma\alpha'\gamma' + \alpha_1^2\gamma_1^2}{(\alpha\gamma + \alpha'\gamma')\alpha_1\gamma_1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma_1 l}{\omega_1}.$$

Ist das erste und dritte Medium identisch, so gibt sich:

$$\operatorname{tg} \Delta_s = \frac{\alpha^2\gamma^2 + \alpha_1^2\gamma_1^2}{2\alpha\gamma\alpha_1\gamma_1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma_1 l}{\omega_1}. \quad \left| \quad 3a. \right.$$

Für senkrechten Einfall ist das letztere unter Einführung des Brechungscoefficienten n :

$$\operatorname{tg} \Delta_s = \frac{n^2 + 1}{2n} \cdot \operatorname{tg} \frac{l}{\omega_1}. \quad \left| \quad 3b. \right.$$

Ebenso ist die Componente parallel der Einfallsebene zu behandeln.

Setzt man die analogen Grössen wie vorstehend:

$$u_e = r_e\gamma, \quad u_r = r_r\gamma, \quad u_1 = r_1\gamma_1, \quad u_2 = r_2\gamma_2, \quad u_d = r_d\gamma' \\ w_e = -r_e\alpha, \quad w_r = r_r\alpha, \quad w_1 = -r_1\alpha_1, \quad w_2 = r_2\alpha_2, \quad w_d = -r_d\alpha'$$

$$r_e = E_p \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega} \right)$$

$$r_r = R_p' \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} \right) + R_p'' \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} \right)$$

$$r_1 = \Delta_p' \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} \right) + \Delta_p'' \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} \right)$$

$$r_2 = P_p' \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1} \right) + P_p'' \cos \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\alpha_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1} \right)$$

$$r_d = D_p' \sin \frac{1}{t} \left(t - \frac{\alpha' x + \gamma' (z-l)}{\omega} \right) + D_p'' \cos \frac{1}{t} \left(t - \frac{\alpha' x + \gamma' (z-l)}{\omega} \right),$$

so werden die Grenzbedingungen:

für $z = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma_1} (E_p + R_p') &= \Delta_p' + P_p' \\ \frac{\gamma}{\gamma_1} R_p'' &= \Delta_p'' + P_p'' \\ \frac{\alpha}{\alpha_1} (E_p - R_p') &= \Delta_p' - P_p' \\ -\frac{\alpha}{\alpha_1} R_p'' &= \Delta_p'' - P_p'', \end{aligned}$$

für $z = l$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma_1} D_p' &= (\Delta_p' + P_p') c + (\Delta_p'' - P_p'') s \\ \frac{\gamma}{\gamma_1} D_p'' &= -(\Delta_p' - P_p') s + (\Delta_p'' + P_p'') c \\ \frac{\alpha}{\alpha_1} D_p' &= (\Delta_p' - P_p') c + (\Delta_p'' + P_p'') s \\ \frac{\alpha}{\alpha_1} D_p'' &= -(\Delta_p' + P_p') s + (\Delta_p'' - P_p'') c. \end{aligned} \quad 4.$$

Daraus folgt unter Benutzung der Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha \gamma_1 + \alpha_1 \gamma, & \kappa &= \alpha \gamma_1 - \alpha_1 \gamma, \\ \lambda' &= \alpha' \gamma_1 + \alpha_1 \gamma', & \kappa' &= \alpha' \gamma_1 - \alpha_1 \gamma'; \\ \Pi_p D_p' &= E_p c (\lambda^2 - \kappa^2) (\lambda \lambda' - \kappa \kappa') \\ \Pi_p D_p'' &= -E_p s (\lambda^2 - \kappa^2) (\lambda \lambda' + \kappa \kappa') \\ \Pi_p R_p' &= E_p [\lambda \kappa (\lambda'^2 + \kappa'^2) - \lambda' \kappa' (\lambda^2 + \kappa^2) (c^2 - s^2)] \\ \Pi_p R_p'' &= E_p \lambda' \kappa' (\lambda^2 - \kappa^2) 2 s c \\ \Pi_p &= (\lambda \lambda' - \kappa \kappa')^2 c^2 + (\lambda \lambda' + \kappa \kappa') s^2. \end{aligned} \quad 5.$$

Hieraus:

$$\begin{aligned} R_p^2 &= R_p'^2 + R_p''^2 = \frac{E_p^2}{\Pi_p} [(\lambda \kappa' - \kappa \lambda')^2 + 4 s^2 \lambda \lambda' \kappa \kappa'] \\ D_p^2 &= D_p'^2 + D_p''^2 = \frac{E_p^2}{\Pi_p} (\lambda^2 - \kappa^2)^2, \end{aligned}$$

worin auch: $\Pi_p = (\lambda \kappa' + \kappa \lambda'^2) + 4 s^2 \lambda \lambda' \kappa \kappa'.$

$$\text{Ferner:} \quad \operatorname{tg} \Delta_p = -\frac{D_p''}{D_p'} = \frac{s}{c} \cdot \frac{\lambda \lambda' + \kappa \kappa'}{\lambda \lambda' - \kappa \kappa'} \quad 6.$$

$$\text{d. h.:} \quad = \frac{\alpha \alpha' \gamma_1^2 + \gamma \gamma' \alpha_1^2}{(\alpha \gamma' + \gamma \alpha') \alpha_1 \gamma_1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma_1 l}{t \omega_1}.$$

Ist das erste und dritte Medium identisch, so wird:

$$\operatorname{tg} \Delta_p = \frac{\alpha^2 \gamma_1^2 + \gamma^2 \alpha_1^2}{2 \alpha \gamma \alpha_1 \gamma_1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma_1 l}{\tau \omega_1} \quad | \quad 6_a.$$

Für senkrechten Einfall resultiren dieselben Formeln wie für $\operatorname{tg} \Delta_s$.

Die Grössen Δ_s und Δ_p bezogen sich auf zwei Punkte, welche auf derselben Normalen zur Platte in den beiden Grenzen liegen, oder zwei ebene Wellen im äusseren Medium, welche um $l\gamma$ voneinander entfernt sind. Wäre die Platte nicht vorhanden, so würde längs dieses Weges eine Verzögerung um $\Delta_0 = l\gamma/\tau\omega$ eingetreten sein. Der Unterschied der Phase für die durch die Platte und die frei fortgepflanzte Welle ist also für Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt:

$$\Delta = \Delta_s - \Delta_0 = \arctg \left(\frac{\alpha^2 \gamma^2 + \alpha_1^2 \gamma_1^2}{2 \alpha \gamma \alpha_1 \gamma_1} \operatorname{tg} \frac{l\gamma_1}{\tau \omega_1} \right) - \frac{l\gamma}{\tau \omega}, \quad | \quad 7.$$

für Licht parallel der Einfallsebene polarisirt:

$$\Delta = \Delta_p - \Delta_0 = \arctg \left(\frac{\alpha^2 \gamma_1^2 + \alpha_1^2 \gamma^2}{2 \alpha \gamma \alpha_1 \gamma_1} \operatorname{tg} \frac{l\gamma_1}{\tau \omega_1} \right) - \frac{l\gamma}{\tau \omega}. \quad | \quad 8.$$

Dies sind aber durchaus andere Werthe, als die durch die gewöhnliche, angenäherte Theorie gegebenen, welche an den Eingang dieser Mittheilung gestellt sind.

Zur Beurtheilung des Unterschiedes will ich die Werthe von Δ für senkrechten Einfall nach der alten und neuen Formel berechnet, d. h. $(\Delta)_a$ und $(\Delta)_n$, einander gegenüberstellen, und zwar für $n = 1,5$ und für Werthe $l/\tau\omega_1$, die um $\pi/20$ d. i. 9° fortschreiten. Man findet aus:

$$(\Delta)_a = \frac{l}{\tau} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega} \right) \quad \text{und:}$$

$$(\Delta)_n = \arctg \left(\frac{n^2 + 1}{2n} \operatorname{tg} \frac{l}{\tau \omega_1} \right) - \frac{l}{\tau \omega} \quad | \quad 9.$$

in Theilen von π für:

$l/\tau\omega = 0$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
$(\Delta)_a = 0$	0,0167	0,0333	0,0500	0,0667	0,0833
$(\Delta)_n = 0$	0,0208	0,0410	0,0605	0,0789	0,0960
Diff. = 0	0,0041	0,0077	0,0105	0,0122	0,0127
0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	
0,1000	0,1167	0,1333	0,1500	0,1667	
0,1118	0,1287	0,1406	0,1538	0,1667	
0,0118	0,0100	0,0073	0,0038	0.	

In den folgenden Intervallen kehren dieselben Werthe mit abwechselnden Vorzeichen wieder.

Die Differenz ist also verschwindend, wenn $l/\tau\omega_1$ ein ganzes Vielfaches von $\pi/2$ ist, und erreicht den grössten Werth in der Nähe von $(2h+1)\pi/4$. Man erkennt, dass die Abweichungen recht bedeutend sind und namentlich wo es sich um die recht genaue Bestimmung sehr kleiner Verzögerungen handelt, von Einfluss werden können.

Ist $(n^2+1)/2n$ wenig von Eins verschieden, also $(n-1)^2/2n$ ein kleiner Bruch, so kann man bis auf zweite Ordnung exclusive (9) schreiben:

$$(\Delta)_n = \frac{2\pi l}{\lambda} (n-1) + \frac{(n-1)^2}{4n} \sin \frac{2l}{\tau\omega_1}, \quad | \quad 9_{\text{a}}.$$

wo nun das zweite Glied die Correction bezeichnet, welche durch die strengere Theorie zur alten Formel hinzukommt.

Wenn die Beobachtung der Verzögerung in einem sehr dünnen Blättchen zur Bestimmung des Brechungscoefficienten benutzt werden soll, so wird meistens die Ungenauigkeit der Ablesungsmethode ihre Berücksichtigung unnöthig machen. Werden zwei nahe gleich dicke Platten von nahe gleichem Brechungscoefficienten zu demselben Zwecke angewandt, so kommt noch ein Anderes hinzu, um sie auch für die feinsten Beobachtungsmittel ausser Betracht kommen zu lassen.

Selbst das am meisten homogene Licht, welches wir herstellen können, enthält ein Gemisch verschiedener Farben; in praxi wird also eine Verzögerung beobachtet, welche das Mittel der den einzelnen Farben entsprechenden ist. Ueberschreitet die Dicke l eine bestimmte Grösse (dieselbe, bei welcher die Platte im benutzten „homogenen“ Licht aufhört die Newton'schen Interferenzen zu zeigen, also für Glas und Natriumlicht ca. 1 cm) so wird das letzte Glied deshalb ohne Wirkung sein und die ältere Formel gültig bleiben.

Der Jamin'sche Compensator¹⁾, welcher dazu dienen soll, einem Paar Lichtwellen einen gewünschten Gangunterschied zu geben, besteht bekanntlich aus zwei identischen Glasplatten, die nebeneinander unter einem sehr kleinen

1) Jamin, Ann. de chim et de phys. (3) 52. p. 166. 1858.

Winkel geneigt auf der Axe eines Theilkreises so befestigt sind, dass ihre Schnittlinien dieser Axe parallel sind. Die eine Welle lässt man durch die eine, die andere, der ersten parallel, durch die andere Platte gehen, beide unter äusserst kleinem Einfallswinkel.

Beziehen sich die Grössen $\alpha' \gamma' \alpha_1' \gamma_1'$ auf die eine, $\alpha'' \gamma'' \alpha_1'' \gamma_1''$ auf die andere Platte, so ist nach dem obigen die gegenseitige Verzögerung der beiden Wellen gegeben durch:

$$(\Delta)_n = \arctg \left(\frac{n^2 + 1}{2n} \operatorname{tg} \frac{l \gamma_1'}{\tau \omega_1} \right) - \arctg \left(\frac{n^2 + 1}{2n} \operatorname{tg} \frac{l \gamma_1''}{\tau \omega_1} \right) - \frac{l}{\tau \omega} (\gamma' - \gamma''), \quad 10.$$

vorausgesetzt, dass die Einfallswinkel hinreichend klein sind, um in dem Factor der tg die $\gamma' \gamma'' \gamma_1' \gamma_1''$ gleich Eins zu setzen; im anderen Falle würden die Componenten parallel und senkrecht zur Einfallsebene verschiedene Δ ergeben, d. h. bei Anwendung von natürlichem Licht unklare Bilder auftreten. Nimmt man noch $(n-1)^2/2n$ neben Eins klein an, so kann man schreiben (bis zweite Ordnung exclusive):

$$(\Delta)_n = \frac{l}{\tau} \left[\frac{1}{\omega_1} (\gamma_1' - \gamma_1'') - \frac{1}{\omega} (\gamma' - \gamma'') \right] + \frac{(n-1)^2}{2n} \cos \frac{l(\gamma_1' + \gamma_1'')}{\tau \omega_1} \sin \frac{l(\gamma_1' - \gamma_1'')}{\tau \omega_1} \quad 10_a.$$

Die ältere Formel¹⁾ gibt in derselben Annäherung:

$$(\Delta)_n = \frac{l}{\tau} \left[\frac{1}{\omega_1} (\gamma_1' - \gamma_1'') - \frac{1}{\omega} (\gamma' - \gamma'') \right].$$

Dieser letztere Werth zeigt, mit dem Ausdruck für $(\Delta)_n$ verglichen, dass die angenäherte Formel mit der strengeren gleiche Resultate liefert, wenn:

$$\frac{l}{\tau \omega_1} (\gamma_1' - \gamma_1'') = h\pi$$

ist, nicht etwa, wenn die ganze gegenseitige Verzögerung $= h\pi$ ist. Es wird demnach der Jamin'sche Compensator,

1) Quincke, Pogg. Ann. 132. p. 205. 1867.

nach der alten Formel berechnet, im Allgemeinen auch dann nicht genaue Werthe liefern, wenn man ihn nur benutzt, um die beobachteten Interferenzstreifen um ganze Streifenbreiten zu verschieben. Der Fehler wird aber nach dem Obigen unmerklich, wenn man die Platten des Compensators recht dick wählt.

Beiläufig sei auch darauf aufmerksam gemacht, dass, weil die Componenten des Lichtes, welche normal und parallel der Einfallsebene polarisirt sind, verschieden verzögert werden, schief auf eine Platte fallendes, linear polarisirtes Licht elliptisch polarisirt aus der Platte austritt.

Bei senkrechtem Einfall kann man die erhaltenen Resultate sogleich auf krystallinische Medien ausdehnen.

Man erhält z. B. für die gegenseitige Verzögerung der zwei senkrecht zu einander polarisirten Wellen, die mit den resp. Geschwindigkeiten ω_1' und ω_1'' (entsprechend den Brechungscoëfficienten n' und n'') sich in einer Platte von der Dicke l parallel dem Einfallslothe fortpflanzen, den Werth:

$$(\Delta)_n = \arctg\left(\frac{n'^2+1}{2n'} \operatorname{tg} \frac{l}{\tau \omega_1'}\right) - \arctg\left(\frac{n''^2+1}{2n''} \operatorname{tg} \frac{l}{\tau \omega_1''}\right). \quad 11.$$

Hierin kann man in praxi stets $n' = n'' = n$ setzen.

Der Ausdruck stimmt dann wiederum nur für:

$$\frac{l}{\tau} \left(\frac{1}{\omega_1'} - \frac{1}{\omega_1''} \right) = h\pi$$

mit dem älteren:

$$(\Delta)_n = \frac{l}{\tau} \left(\frac{1}{\omega_1'} - \frac{1}{\omega_1''} \right)$$

überein.

Wichtiger noch erscheint die Frage nach der genaueren Theorie eines der feinsten optischen Messinstrumente, des Babinet'schen Compensators.

Denkt man sich denselben möglichst einfach aus nur zwei (schwach keilförmigen, für die Rechnung als eben zu betrachtenden) Platten bestehend, so hat man doch fünf

Schichten, welche die Wellen durchschreiten, nämlich: Luft. Quarz, Luft, Quarz, Luft¹⁾; die Rechnung wird demgemäss recht umständlich. Ich theile nur das Resultat mit.

Allgemein erhält man für die Differenz der Phasen Δ_1 der ersten Welle auf der Grenze der Medien (0,1) und (3,4), d. h. beim Eintritt in die erste und Austritt aus der letzten Platte bei senkrechtem Einfall die Formel:

$$\operatorname{tg} \Delta_1 = \frac{\nu_1 [c_3 (c_2 s_1 + s_2 c_1 \nu_3) - \nu_3 s_3 (s_1 s_2 - c_1 c_2 \nu_2)] + \nu_4 [s_3 (c_1 c_2 - s_1 s_2 \nu_2) + \nu_3 s_3 (c_1 s_2 + c_2 s_1 \nu_2)]}{[c_3 (c_1 c_2 - s_1 s_2 \nu_2) - \nu_3 s_3 (c_1 s_2 + s_1 c_2 \nu_2)] - \nu_1 \nu_4 [s_3 (s_1 c_2 + c_1 s_2 \nu_2) + \nu_3 c_3 (s_1 s_2 - c_1 c_2 \nu_2)]}, \quad 12.$$

worin die Verhältnisse der Brechungsindices:

$$\frac{n_0}{n_1} = \nu_1, \quad \frac{n_1}{n_2} = \nu_2, \quad \frac{n_2}{n_3} = \nu_3, \quad \frac{n_3}{n_4} = \nu_4$$

gesetzt sind, sowie:

$$\begin{aligned} \sin \frac{l_1}{r \omega_1} &= s_1, & \sin \frac{l_2}{r \omega_2} &= s_2, & \sin \frac{l_3}{r \omega_3} &= s_3, \\ \cos \frac{l_1}{r \omega_1} &= c_1, & \cos \frac{l_2}{r \omega_2} &= c_2, & \cos \frac{l_3}{r \omega_3} &= c_3. \end{aligned}$$

Bei dem speciell vorliegenden Problem des Babinet'schen Compensators kann man wegen des geringen Unterschiedes von ω_1 und ω_3 und wegen $\omega_0 = \omega_2 = \omega_4$ setzen:

$$\nu_1 = \nu_3 = \frac{1}{\nu_2} = \frac{1}{\nu_4} = \frac{1}{n}.$$

Hierdurch erhält man etwas einfacher:

$$\operatorname{tg} \Delta_1 = \frac{\frac{1}{2n} \sin \frac{l_2}{r \omega_2} \left[(1+n^2)^2 \cos \frac{1}{r} \left(\frac{l_1}{\omega_1} + \frac{l_3}{\omega_3} \right) - (1-n^2)^2 \cos \frac{1}{r} \left(\frac{l_1}{\omega_1} - \frac{l_3}{\omega_3} \right) \right] + (1+n^2) \cos \frac{l_2}{r \omega_2} \sin \frac{1}{r} \left(\frac{l_1}{\omega_1} + \frac{l_3}{\omega_3} \right)}{2n \cos \frac{l_2}{r \omega_2} \cos \frac{1}{r} \left(\frac{l_1}{\omega_1} + \frac{l_3}{\omega_3} \right) - (1+n^2) \sin \frac{l_2}{r \omega_2} \sin \frac{1}{r} \left(\frac{l_1}{\omega_1} + \frac{l_3}{\omega_3} \right)} \quad 13_a.$$

Für die entsprechende Phasendifferenz der zweiten, normal zur ersteren polarisirten Welle erhält man, da diese sich in der ersten Platte mit der Geschwindigkeit ω_3 , in der zweiten mit ω_1 fortpflanzt:

1) Liegt der Compensator direct auf einer zu untersuchenden parallelen Krystallplatte, so ist dieselbe auch mit in das System hineinzurechnen, und die Resultate werden noch complicirter.

$$\operatorname{tg} \Delta_2 = \frac{\frac{1}{2n} \sin \frac{l_2}{\tau \omega_2} \left[(1+n^2) \cos \frac{1}{\tau} \left(\frac{l_1}{\omega_3} + \frac{l_3}{\omega_1} \right) - (1-n^2) \cos \frac{1}{\tau} \left(\frac{l_1}{\omega_3} - \frac{l_3}{\omega_1} \right) \right] + (1+n^2) \cos \frac{l_2}{\tau \omega_2} \sin \frac{1}{\tau} \left(\frac{l_1}{\omega_3} + \frac{l_3}{\omega_1} \right)}{2n \cos \frac{l_2}{\tau \omega_2} \cos \frac{1}{\tau} \left(\frac{l_1}{\omega_3} + \frac{l_3}{\omega_1} \right) - (1+n^2) \sin \frac{l_2}{\tau \omega_2} \sin \frac{1}{\tau} \left(\frac{l_1}{\omega_3} + \frac{l_3}{\omega_1} \right)} \quad 13.$$

$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$ ist dann der gesuchte Werth der gegenseitigen Verzögerung beider Wellen, — ein höchst complicirter Ausdruck und von dem gewöhnlich benutzten stark abweichend. Besonders auffällig ist die scheinbar bedeutende Einwirkung der Dicke der Luftschicht zwischen den beiden Quarzplatten. Lässt man diese Zwischenschicht verschwinden, also $l_2 = 0$ werden, so wird relativ einfach:

$$\Delta = \arctg \left(\frac{1+n^2}{2n} \operatorname{tg} \frac{1}{\tau} \left(\frac{l_1}{\omega_1} + \frac{l_3}{\omega_3} \right) \right) - \arctg \left(\frac{1+n^2}{2n} \operatorname{tg} \frac{1}{\tau} \left(\frac{l_1}{\omega_3} + \frac{l_3}{\omega_1} \right) \right), \quad 14.$$

was der Form nach mit (11) übereinstimmt. Eine andere einfachere Form erhält man, wenn man den Brechungscoefficienten der Schicht zwischen den beiden Quarzplatten, etwa durch Hineinbringen einer Flüssigkeit, dem des Quarzes merklich gleich macht, also setzt:

$$\nu_1 = \frac{1}{\nu_4} = \frac{1}{n}, \quad \nu_2 = \nu_3 = 1;$$

nämlich nach (12):

$$\Delta = \arctg \left(\frac{1+n^2}{2n} \operatorname{tg} \frac{1}{\tau} \left(\frac{l_1}{\omega_1} + \frac{l_2}{\omega_2} + \frac{l_3}{\omega_3} \right) \right) - \arctg \left(\frac{1+n^2}{2n} \operatorname{tg} \frac{1}{\tau} \left(\frac{l_1}{\omega_3} + \frac{l_2}{\omega_2} + \frac{l_3}{\omega_1} \right) \right). \quad 15.$$

Unabhängig von l_2 ist freilich auch sie nicht.

Unter der Voraussetzung, dass $(n-1)^2/2n$ klein gegen Eins sei, erhält man daraus die Gleichung:

$$(\Delta)_n = \frac{l_1 - l_3}{\tau} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_3} \right) + \frac{(n-1)^2}{2n} \cos \frac{1}{\tau} \left((l_1 + l_3) \left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_3} \right) + \frac{2l_2}{\omega_2} \right) \sin \frac{1}{\tau} (l_1 - l_3) \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_3} \right), \quad 15.$$

die deutlich die Abweichung von der älteren zeigt, welche allein das erste Glied enthält.

Man erkennt, dass die Differenz für:

$$\frac{1}{\tau} (l_1 - l_3) \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_3} \right) = h\pi$$

verschwindet; ihr grösstmöglicher Werth ist $(n-1)^2/2n$, also circa 0,1.

Man vermeidet diese theoretischen Schwierigkeiten des Babinet'schen Compensators nach dem p. 232 Erörterten am sichersten, indem man sowohl der Dicke der Quarzkeile als auch ihrem Abstände eine erhebliche Grösse gibt.

Göttingen, April 1884.

VIII. *Ueber den Durchgang des Lichtes durch eine planparallele Schicht eines circularpolarisirenden Mediums; von W. Voigt.*

In einer früheren Arbeit¹⁾ habe ich die Grenzbedingungen erörtert, welche für den Uebergang des Lichtes aus einem gewöhnlichen isotropen in ein circularpolarisirendes Medium aufzustellen sind, um dem Princip der Erhaltung der Energie zu genügen, und habe dieselben bereits auf den Fall einer einfachen Reflexion angewandt. Es werde nun das praktisch wichtigere Problem des Durchganges des Lichtes durch eine Schicht der circularpolarisirenden Substanz vorgenommen, um vornehmlich zu untersuchen, wie die strenge Theorie das Gesetz der Drehung der Polarisationsebene bei diesem Vorgang ergibt, welches bisher immer nur durch eine angenäherte Betrachtung (aus der Annahme, dass die Welle ohne innere Reflexionen bloß einmal die Platte passirt) abgeleitet ist.

Die Schicht des circularpolarisirenden Mediums (1) liege zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = l$, die XZ-Ebene sei

1) W. Voigt, Wied. Ann. 21. p. 522. 1884.

die Einfallsebene; von $z = -\infty$ bis $z = 0$ erstrecke sich ein erstes isotropes Medium (0), von $z = l$ bis zu $z = -\infty$ ein zweites (2).

Im ersten Medium (0) tritt dann ausser der einfallenden eine reflectirte Welle auf; ihre Richtungscosinus seien α, γ und $\alpha, -\gamma$, die Verschiebungscomponenten:

$$\begin{aligned} u_e &= \gamma r_e, & v_e &= v_e, & w_e &= -\alpha r_e, \\ u_r &= -\gamma r_r, & v_r &= v_r, & w_r &= -\alpha r_r. \end{aligned}$$

Im zweiten, circularpolarisirenden Medium (1) treten je zwei Wellen auf, welche den Charakter der durchgehenden und den der reflectirten haben. Ihre Richtungscosinus seien demgemäss $\alpha_1, \gamma_1, \alpha_2, \gamma_2$ und $\alpha_1, -\gamma_1, \alpha_2, -\gamma_2$ und ihre Verschiebungscomponenten:

$$\begin{aligned} u_1 &= \gamma_1 r_1, & v_1 &= v_1, & w_1 &= -\alpha_1 r_1 \\ u_2 &= \gamma_2 r_2, & v_2 &= v_2, & w_2 &= -\alpha_2 r_2 \\ u_3 &= -\gamma_1 r_3, & v_3 &= v_3, & w_3 &= -\alpha_1 r_3 \\ u_4 &= -\gamma_2 r_4, & v_4 &= v_4, & w_4 &= -\alpha_2 r_4. \end{aligned}$$

Im dritten Medium gibt sich nur eine durchgehende Welle; ihre Richtungscosinus seien $\alpha' \gamma'$, und ihre Verschiebungscomponenten:

$$u_d = \gamma' r_d, \quad v_d = v_d, \quad w_d = -\alpha' r_d.$$

Die Grenzbedingungen wollen wir in der einfachsten Form²⁾ benutzen, welche für die Normalcomponente der Verschiebung keine Abweichung von der Neumann'schen Formel enthält, nämlich setzen:

$$\begin{aligned} \text{für } z = 0 \quad & \alpha(r_e + r_r) = \alpha_1(r_1 + r_3) + \alpha_2(r_2 + r_4) \\ & \gamma(r_e - r_r) = \gamma_1(r_1 - r_3) + \gamma_2(r_2 - r_4) \\ & v_e + v_r = (v_1 + v_3) + (v_2 + v_4) \\ & \alpha\gamma(v_e - v_r) = \alpha_1\gamma_1(v_1 - v_3) + \alpha_2\gamma_2(v_2 - v_4) \end{aligned} \quad \Bigg| \quad 1.$$

1) Diese Verfügung hat gegenüber der anderen $u_r = \gamma r_r, w_r = \alpha r_r$ den Nachtheil, dass die Grenzgleichungen für normalen Einfall nicht für die Componenten r und r identisch werden, aber den Vortheil, dass r und r in jeder Welle die gleiche relative Lage haben, also die Rotationsrichtung der circularen Wellen sich bequem beurtheilen lässt.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 21. p. 532. 1884.

$$\begin{aligned} \text{für } z = l \quad & \alpha' r_d = \alpha_1 (r_1 + r_3) + \alpha_2 (r_2 + r_4) \\ & \gamma' r_d = \gamma_1 (r_1 - r_3) + \gamma_2 (r_2 - r_4) \\ & v_d = (v_1 + v_3) + (v_1 + v_4) \\ & \alpha' \gamma' v_d = \alpha_1 \gamma_1 (v_1 - v_3) + \alpha_2 \gamma_2 (v_2 - v_4). \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \alpha' r_d = \alpha_1 (r_1 + r_3) + \alpha_2 (r_2 + r_4) \\ \gamma' r_d = \gamma_1 (r_1 - r_3) + \gamma_2 (r_2 - r_4) \\ v_d = (v_1 + v_3) + (v_1 + v_4) \\ \alpha' \gamma' v_d = \alpha_1 \gamma_1 (v_1 - v_3) + \alpha_2 \gamma_2 (v_2 - v_4). \end{aligned}} \right\} 1.$$

Hierin sei:

$$\begin{aligned} r_e &= E_p S & v_e &= E' S + E'' C' \\ r_r &= R_p'' S_r + R_p'' C_r & v_r &= R_s' S_r + R_s'' C_r \\ r_1 &= \Delta_1' S_1 + \Delta_1'' C_1 & v_1 &= \Delta_1'' S_1 - \Delta_1' C_1 \\ r_2 &= \Delta_2' S_2 + \Delta_2'' C_2 & v_2 &= -\Delta_2'' S_2 + \Delta_2' C_2 \\ r_3 &= P_1' S_3 + P_1'' C_3 & v_3 &= P_1'' S_3 - P_1' C_3 \\ r_4 &= P_2' S_4 + P_2'' C_4 & v_4 &= -P_2'' S_4 + P_2' C_4 \\ r_d &= D_p' S_d + D_p'' C_d & v_d &= D_s' S_d + D_s'' C_d, \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} r_e &= E_p S \\ r_r &= R_p'' S_r + R_p'' C_r \\ r_1 &= \Delta_1' S_1 + \Delta_1'' C_1 \\ r_2 &= \Delta_2' S_2 + \Delta_2'' C_2 \\ r_3 &= P_1' S_3 + P_1'' C_3 \\ r_4 &= P_2' S_4 + P_2'' C_4 \\ r_d &= D_p' S_d + D_p'' C_d \end{aligned}} \right\} 2.$$

worin bedeutet:

$$\begin{aligned} S &= \sin \frac{1}{t} \left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega} \right) & C &= \cos \frac{1}{t} \left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega} \right) \\ S_r &= \sin \frac{1}{t} \left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} \right) & C_r &= \cos \frac{1}{t} \left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega} \right) \\ S_1 &= \sin \frac{1}{t} \left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} \right) & C_1 &= \cos \frac{1}{t} \left(t - \frac{\alpha_1 x + \gamma_1 z}{\omega_1} \right) \\ S_2 &= \sin \frac{1}{t} \left(t - \frac{\alpha_2 x + \gamma_2 z}{\omega_2} \right) & C_2 &= \cos \frac{1}{t} \left(t - \frac{\alpha_2 x + \gamma_2 z}{\omega_2} \right) \\ S_3 &= \sin \frac{1}{t} \left(t - \frac{\alpha_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1} \right) & C_3 &= \cos \frac{1}{t} \left(t - \frac{\alpha_1 x - \gamma_1 z}{\omega_1} \right) \\ S_4 &= \sin \frac{1}{t} \left(t - \frac{\alpha_2 x - \gamma_2 z}{\omega_2} \right) & C_4 &= \cos \frac{1}{t} \left(t - \frac{\alpha_2 x - \gamma_2 z}{\omega_2} \right) \\ S_d &= \sin \frac{1}{t} \left(t - \frac{\alpha' x + \gamma' (z-l)}{\omega'} \right) & C_d &= \cos \frac{1}{t} \left(t - \frac{\alpha' x + \gamma' (z-l)}{\omega'} \right). \end{aligned}$$

Die Einführung ergibt 16 Gleichungen mit 16 Unbekannten und sehr unübersichtliche Resultate.

Ich werde demgemäss schon von Anfang an die Vereinfachung vornehmen, dass ich ausserhalb der trigonometrischen Functionen S und C die in Wahrheit äusserst nahe gleichen Grössen $\alpha_1 \alpha_2$ und $\gamma_1 \gamma_2$ einander gleich setze; hierdurch kann nichts in einer der Beobachtung irgend merklichen Weise geändert werden. Ferner werde ich direct auf die Bestimmung nur der zumeist wichtigen Grössen D , d. h. der Amplituden der durch die Platte hindurchgehenden

Wellen ausgehen. Ihre Werthe können dann, wenn erwünscht, leicht auch die analogen Grössen R für die reflectirte Welle ergeben.

Durch Elimination von r_3, r_4, v_3, v_4 aus (1) erhält man zunächst folgende Gleichungen, falls bedeutet:

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha \gamma_1 + \alpha_1 \gamma' & \kappa &= \alpha \gamma_1 - \alpha_1 \gamma' & \sigma &= \alpha \gamma + \alpha_1 \gamma_1 & \delta &= \alpha \gamma - \alpha_1 \gamma_1 \\ \lambda' &= \alpha' \gamma_1 + \alpha_1 \gamma' & \kappa' &= \alpha' \gamma_1 - \alpha_1 \gamma' & \sigma' &= \alpha' \gamma' + \alpha_1 \gamma_1 & \delta' &= \alpha' \gamma' - \alpha_1 \gamma_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ist für } z = 0 \quad & \lambda r_e + \kappa r_r = 2 \alpha_1 \gamma_1 (r_1 + r_2) \\ & \sigma v_e - \delta v_r = 2 \alpha_1 \gamma_1 (v_1 + v_2) \\ \text{für } z = l \quad & \lambda' r_d = 2 \alpha_1 \gamma_1 (r_1 + r_2) \\ & \sigma' v_d = 2 \alpha_1 \gamma_1 (v_1 + v_2). \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 3.$$

Durch Einsetzen der Werthe hieraus:

$$\begin{aligned} \lambda E_p + \kappa R_p' &= 2 \alpha_1 \gamma_1 (\Delta_1' + \Delta_2') \\ \kappa R_p'' &= 2 \alpha_1 \gamma_1 (\Delta_1'' + \Delta_2'') \\ \sigma E_s' - \delta R_s' &= 2 \alpha_1 \gamma_1 (\Delta_1'' - \Delta_2'') \\ \sigma E_s'' - \delta R_s'' &= -2 \alpha_1 \gamma_1 (\Delta_1' - \Delta_2') \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 4_a.$$

$$\begin{aligned} \lambda' D_p' &= 2 \alpha_1 \gamma_1 (\Delta_1' c_1 + \Delta_1'' s_1 + \Delta_2' c_2 + \Delta_2'' s_2) \\ \lambda' D_p'' &= 2 \alpha_1 \gamma_1 (-\Delta_1' s_1 + \Delta_1'' c_1 - \Delta_2' s_2 + \Delta_2'' c_2) \\ \sigma' D_s' &= 2 \alpha_1 \gamma_1 (-\Delta_1' s_1 + \Delta_1'' c_1 + \Delta_2' s_2 - \Delta_2'' c_2) \\ \sigma' D_s'' &= 2 \alpha_1 \gamma_1 (-\Delta_1' c_1 - \Delta_1'' s_1 + \Delta_2' c_2 + \Delta_2'' s_2) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 4_b.$$

Hierin bedeutet:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sin \frac{l \gamma_1}{r \omega_1}, & c_1 &= \cos \frac{l \gamma_1}{r \omega_1}, \\ s_2 &= \sin \frac{l \gamma_2}{r \omega_2}, & c_2 &= \cos \frac{l \gamma_2}{r \omega_2}. \end{aligned}$$

Dividirt man beide Seiten mit $\sqrt{2}$, so erhält man in (4_b) rechts ein orthogonales System Coëfficienten und kann sonach sogleich schreiben:

$$\begin{aligned} 2 \alpha_1 \gamma_1 \Delta_1' &= \frac{1}{2} [\lambda' (D_p' c_1 - D_p'' s_1) - \sigma' (D_s' s_1 + D_s'' c_1)] \\ 2 \alpha_1 \gamma_1 \Delta_1'' &= \frac{1}{2} [\lambda' (D_p' s_1 + D_p'' c_1) + \sigma' (D_s' c_1 - D_s'' s_1)] \\ 2 \alpha_1 \gamma_1 \Delta_2' &= \frac{1}{2} [\lambda' (D_p' c_2 - D_p'' s_2) + \sigma' (D_s' s_2 + D_s'' c_2)] \\ 2 \alpha_1 \gamma_1 \Delta_2'' &= \frac{1}{2} [\lambda' (D_p' s_2 + D_p'' c_2) - \sigma' (D_s' c_2 - D_s'' s_2)] \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 5.$$

Setzt man dies in (4_a) ein, so erhält man vier Gleichungen, die frei von den Δ und P sind, nämlich:

$$\begin{aligned}
 \lambda E_p + \kappa R_p' &= \frac{1}{2} \left[\lambda' \left(D_p'(c_1 + c_2) - D_p''(s_1 + s_2) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \sigma' \left(D_s'(s_1 - s_2) + D_s''(c_1 - c_2) \right) \right] \\
 \kappa R_p'' &= \frac{1}{2} \left[\lambda' \left(D_p'(s_1 + s_2) + D_p''(c_1 + c_2) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sigma' \left(D_s'(c_1 - c_2) - D_s''(s_1 - s_2) \right) \right] \\
 \sigma E_s' - \delta R_s' &= \frac{1}{2} \left[\lambda' \left(D_p'(s_1 - s_2) + D_p''(c_1 - c_2) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sigma' \left(D_s'(c_1 + c_2) - D_s''(s_1 + s_2) \right) \right] \\
 \sigma E_s'' - \delta R_s'' &= \frac{1}{2} \left[\lambda' \left(-D_p'(c_1 - c_2) + D_p''(s_1 - s_2) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sigma' \left(D_s'(s_1 + s_2) + D_s''(c_1 + c_2) \right) \right]
 \end{aligned} \quad 6.$$

Ein analoges System folgt, indem man aus (1) $r_1 r_2 v_1 v_2$ eliminirt, wodurch man zunächst erhält:

$$\begin{aligned}
 \text{für } z = 0 & & z = l \\
 \kappa r_e + \lambda r_r &= 2\alpha_1 \gamma_1 (r_3 + r_4) & \kappa' r_a = 2\alpha_1 \gamma_1 (r_3 + r_4) \\
 -\delta v_e + \sigma v_r &= 2\alpha_1 \gamma_1 (v_3 + v_4) & -\delta' v_a = 2\alpha_1 \gamma_1 (v_3 + v_4)
 \end{aligned} \quad 7.$$

oder durch Einsetzen der Werthe:

$$\begin{aligned}
 \kappa E_p + \lambda R_p' &= 2\alpha_1 \gamma_1 (P_1' + P_2') \\
 \lambda R_p'' &= 2\alpha_1 \gamma_1 (P_1'' + P_2'') \\
 -\delta E_s' + \sigma R_s' &= 2\alpha_1 \gamma_1 (P_1' - P_2') \\
 -\delta E_s'' + \sigma R_s'' &= -2\alpha_1 \gamma_1 (P_1'' - P_2'')
 \end{aligned} \quad 8a.$$

$$\begin{aligned}
 \kappa' D_p' &= 2\alpha_1 \gamma_1 (P_1' c_1 - P_1'' s_1 + P_2' c_2 - P_2'' s_2) \\
 \kappa' D_p'' &= 2\alpha_1 \gamma_1 (P_1' s_1 + P_1'' c_1 + P_2' s_2 + P_2'' c_2) \\
 -\delta' D_s' &= 2\alpha_1 \gamma_1 (P_1' s_1 + P_1'' c_1 - P_2' s_2 - P_2'' c_2) \\
 -\delta' D_s'' &= 2\alpha_1 \gamma_1 (-P_1' c_1 + P_1'' s_1 + P_2' c_2 - P_2'' s_2)
 \end{aligned} \quad 8b.$$

Auch die Coëfficienten der vier Gleichungen (8b) geben, wenn man beide Seiten durch $\sqrt{2}$ dividirt, ein orthogonales System, und man kann daher schreiben:

$$\begin{aligned}
 2\alpha_1 \gamma_1 P_1' &= \frac{1}{2} [\kappa' (D_p' c_1 + D_p'' s_1) - \delta' (D_s' s_1 - D_s'' c_1)] \\
 2\alpha_1 \gamma_1 P_1'' &= \frac{1}{2} [\kappa' (-D_p' s_1 + D_p'' c_1) - \delta' (D_s' c_1 + D_s'' s_1)] \\
 2\alpha_1 \gamma_1 P_2' &= \frac{1}{2} [\kappa' (D_p' c_2 + D_p'' s_2) + \delta' (D_s' s_2 - D_s'' c_2)] \\
 2\alpha_1 \gamma_1 P_2'' &= \frac{1}{2} [\kappa' (-D_p' s_2 + D_p'' c_2) + \delta' (D_s' c_2 + D_s'' s_2)]
 \end{aligned} \quad 9.$$

Das Einsetzen dieser Resultate in die vier Gleichungen (8a) ergibt:

$$\begin{aligned}
\alpha E_p + \lambda R_p' &= \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &\alpha' (D_p' (c_1 + c_2) + D_p'' (s_1 + s_2)) \\ &- \delta' (D_s' (s_1 - s_2) - D_s'' (c_1 - c_2)) \end{aligned} \right] \\
\lambda R_p'' &= \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &\alpha' (-D_p' (s_1 + s_2) + D_p'' (c_1 + c_2)) \\ &- \delta' (D_s' (c_1 - c_2) + D_s'' (s_1 - s_2)) \end{aligned} \right] \\
-\delta E_s' + \sigma R_s' &= \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &\alpha' (-D_p' (s_1 - s_2) + D_p'' (c_1 - c_2)) \\ &- \delta' (D_s' (c_1 + c_2) + D_s'' (s_1 + s_2)) \end{aligned} \right] \\
-\delta E_s'' + \sigma R_s'' &= \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &-\alpha' (D_p' (c_1 - c_2) + D_p'' (s_1 - s_2)) \\ &+ \delta' (D_s' (s_1 + s_2) - D_s'' (c_1 + c_2)) \end{aligned} \right]
\end{aligned} \tag{10}$$

Die Combination von (10) mit (6) lässt leicht die sämtlichen R eliminiren und gibt die vier Gleichungen für die hindurchgegangenen Amplituden:

$$\begin{aligned}
2E_p (\lambda^2 - \alpha^2) &= D_p' (c_1 + c_2) (\lambda \lambda' - \alpha \alpha') - D_p'' (s_1 + s_2) (\lambda \lambda' + \alpha \alpha') \\
&\quad - D_s' (s_1 - s_2) (\lambda \sigma' - \alpha \delta') - D_s'' (c_1 - c_2) (\lambda \sigma' + \alpha \delta') \\
0 &= D_p' (s_1 + s_2) (\lambda \lambda' + \alpha \alpha') + D_p'' (c_1 + c_2) (\lambda \lambda' - \alpha \alpha') \\
&\quad + D_s' (c_1 - c_2) (\lambda \sigma' + \alpha \delta') - D_s'' (s_1 - s_2) (\lambda \sigma' - \alpha \delta') \\
2E_s' (\sigma^2 - \delta^2) &= D_p' (s_1 - s_2) (\sigma \lambda' - \delta \alpha') + D_p'' (c_1 - c_2) (\sigma \lambda' + \delta \alpha') \\
&\quad + D_s' (c_1 + c_2) (\sigma \sigma' - \delta \delta') - D_s'' (s_1 + s_2) (\sigma \sigma' + \delta \delta') \\
2E_s'' (\sigma^2 - \delta^2) &= -D_p' (c_1 - c_2) (\sigma \lambda' + \delta \alpha') + D_p'' (s_1 - s_2) (\sigma \lambda' - \delta \alpha') \\
&\quad + D_s' (s_1 + s_2) (\sigma \sigma' + \delta \delta') + D_s'' (c_1 + c_2) (\sigma \sigma' - \delta \delta').
\end{aligned} \tag{11}$$

Durch Einsetzen von $s_1 = s_2 = s$, $c_1 = c_2 = c$ gelangt man hiervon zu den Formeln für die durch eine gewöhnliche isotrope Platte hindurchgegangenen Amplituden.¹⁾

Das System Coëfficienten dieser vier Gleichungen hat die Form:

a	b	c	d
$-b$	a	$-d$	c
e	f	g	h
$-f$	e	$-h$	g

und demgemäss merkwürdige Eigenschaften. Früher habe ich den Satz mitgetheilt, dass die Determinante dieses Systems Π die Summe zweier Quadrate ist²⁾; nämlich:

$$\Pi = (ag + df - bh - ec)^2 + (bg + ah - fc - ed)^2.$$

1) Vgl. Formel (2) und (5) der vorhergehenden Abhandlung.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 16. p. 314. 1882.

Setzt man dafür:

$$\Pi = K_1^2 + K_2^2, \quad | \quad 12.$$

so lassen sich auch die Partialdeterminanten von Π in eigenthümlicher Weise durch K_1 und K_2 ausdrücken.

Es ist nämlich, wenn ich mit Π_{hk} den Coëfficienten des z . Elementes der h . Reihe bezeichne:

$$\begin{array}{ll} \Pi_{11} = gK_1 + hK_2; & \Pi_{12} = -hK_1 + gK_2; \\ \Pi_{13} = -eK_1 - fK_2; & \Pi_{14} = fK_1 - eK_2; \\ \Pi_{21} = +hK_1 - gK_2; & \Pi_{22} = gK_1 + hK_2; \\ \Pi_{23} = -fK_1 + eK_2; & \Pi_{24} = -eK_1 - fK_2; \\ \Pi_{31} = -cK_1 - dK_2; & \Pi_{32} = dK_1 - cK_2; \\ \Pi_{33} = aK_1 + bK_2; & \Pi_{34} = -bK_1 + aK_2; \\ \Pi_{41} = -dK_1 + cK_2; & \Pi_{42} = -cK_1 - dK_2; \\ \Pi_{43} = bK_1 - aK_2; & \Pi_{44} = aK_1 + bK_2. \end{array} \quad | \quad 13.$$

Man kann nun die gesuchten Grössen D ohne weiteres hinschreiben, und zwar mit Hülfe der Formeln (13) in bequemer Form, z. B.:

$$(K_1^2 + K_2^2) D_p' = 8\alpha\gamma\alpha_1\gamma_1 [E_p (gK_1 + hK_2) - E_s' (cK_1 + dK_2) - E_s'' (dK_1 - cK_2)],$$

ebenso die anderen; die Werthe der noch übrigen Abkürzungen einzuführen, lohnt nicht. Fällt linear polarisirtes Licht ein, so ist $E_s'' = 0$.

Zu bemerken ist zu diesen Resultaten, dass sie unter der Voraussetzung unbegrenzter Wellen erhalten sind, also bei schiefeinfall nur dann Anwendung auf die Beobachtung gestatten, wenn diese mit Platten der circularpolarisirenden Substanz angestellt ist, welche sehr ausgedehnt gegen ihre Dicke sind. Ferner ist nöthig, dass die Substanz sehr vollständig durchsichtig sei, damit die durch wiederholte innere Reflexionen entstandenen Wellen, welche bei unseren Betrachtungen in Rechnung gezogen sind, nicht durch Absorption unverhältnissmässig geschwächt werden.

Die Hauptfrage ist die nach der Grösse der Drehung der Polarisationssebene beim Durchgang durch unsere Platte.

Zunächst bemerkt man, dass einfallendes linear polarisirtes Licht — gerade wie bei einer Platte aus gewöhnlicher

isotroper Substanz — im Allgemeinen elliptisch polarisirt austritt, wenn auch bei kleinem Einfallswinkel die Abweichung von linearem gering ist.

Die Winkel φ und $(\pi/2) + \varphi$ der grossen und kleinen Ellipsenaxe gegen die Einfallsebene sind gegeben durch:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2(D_s' D_p' + D_s'' D_p'')}{(D_p'^2 + D_p''^2) - (D_s'^2 + D_s''^2)} \quad | \quad 14.$$

Dieser Ausdruck wird relativ einfach, wenn das einfallende Licht parallel oder senkrecht zur Einfallsebene schwingt, im ersten Falle ist nämlich:

$\Pi D_p' = \Pi_{11} E_p$, $\Pi D_p'' = \Pi_{12} E_p$, $\Pi D_s' = \Pi_{13} E_p$, $\Pi D_s'' = \Pi_{14} E_p$,
und:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = \frac{2(eg + hf)}{(e^2 + f^2) - (g^2 + h^2)} \quad | \quad 14_a.$$

im letzteren $E_s'' = 0$, $E_s' = E_s$ also:

$\Pi D_p' = \Pi_{31} E_s$, $\Pi D_p'' = \Pi_{32} E_s$, $\Pi D_s' = \Pi_{33} E_s$, $\Pi D_s'' = \Pi_{34} E_s$,
und:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_2 = \frac{2(ac + bd)}{(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2)} \quad | \quad 14_b.$$

Hierin ist:

$$\begin{aligned} a &= (c_1 + c_2)(\lambda\lambda' - \alpha\alpha'), & b &= -(s_1 + s_2)(\lambda\lambda' + \alpha\alpha') \\ c &= -(s_1 - s_2)(\lambda\sigma' - \alpha\delta'), & d &= -(c_1 - c_2)(\lambda\sigma' + \alpha\delta') \\ e &= (s_1 - s_2)(\sigma\lambda' - \delta\alpha'), & f &= (c_1 - c_2)(\sigma\lambda' + \delta\alpha') \\ g &= (c_1 + c_2)(\sigma\sigma' - \delta\delta'), & h &= -(s_1 + s_2)(\sigma\sigma' + \delta\delta'). \end{aligned}$$

Die Ausdrücke lassen sich nach Einsetzen dieser Werthe etwas vereinfachen, bleiben aber immer noch umfangreich genug.

Der wichtigste Fall ist der des senkrechten Einfalles, dessen Beobachtung ja bekanntlich benutzt wird, um die Differenz der Geschwindigkeiten der beiden im circularpolarisirenden Körper fortgepflanzten Wellen zu bestimmen. Indem man von den inneren Reflexionen absieht und die Welle nur einmal die Dicke der Platte passierend denkt, nimmt man bekanntlich den Drehungswinkel der Polarisationsebene gewöhnlich gleich $l/2r(1/\omega_1 - 1/\omega_2)$ an. Es ist nun die Frage, welcher Werth aus der strengen Theorie, die jene inneren Reflexionen berücksichtigt, erhalten wird.

Für senkrechten Einfall wird:

$$fg = eh$$

und demgemäss:

$$(eg + hf)^2 = (e^2 + f^2)(g^2 + h^2),$$

also:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \left(\sqrt{\frac{g^2 + h^2}{e^2 + f^2}} \right)_{a=0},$$

was auch aus $\operatorname{tg} \varphi_0 = D_s/D_p$ direct zu erhalten wäre.

Die Berechnung ergibt:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \operatorname{tg} \frac{l}{2\tau} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right),$$

d. h. denselben Werth, wie die ungenauere Theorie; die inneren Reflexionen sind also ohne Einfluss.

Dies erklärt sich dadurch, dass die rechts rotirende Welle an der zweiten Fläche links rotirend reflectirt wird, d. h. (da diese Bezeichnung sich auf eine Betrachtung von der Seite der positiven Wellennormale bezieht und diese für die einfallende und reflectirte Welle entgegengesetzt liegt) ihre absolute Rotationsrichtung bei der Reflexion nicht ändert, und dass das analoge bei der zweiten (links rotirenden) Welle stattfindet. Beide Wellen verlieren also beim Rückgang nach der ersten Grenze den Gangunterschied, den sie auf dem Hergang gewonnen hatten, und beginnen zum zweiten mal ihren Weg von der ersten Grenze mit demselben Gangunterschied, den sie beim Eintritt in die Platte besaßen.

Dies lässt sich aus unseren Formeln in der That direct bestätigen.

Fällt circularpolarisirtes rechts rotirendes Licht auf die erste Grenze senkrecht auf, so ist zu setzen $E_p = E_s'' = E$, $E_s' = 0$. Dann muss nothwendig die durch die Platte durchgehende Welle ebenfalls rechts rotiren, d. h. also $\Delta_1' = \Delta_1'' = 0$ sein. Daraus folgt nach (4₁), da für senkrechten Einfall $\lambda = \sigma$, $\kappa = \delta$ ist, dass $R_p' = -R_s''$ und $R_p'' = R_s'$ sein muss. Dies ergibt aber für die in der Platte reflectirte Welle nach (8₁) $P_1' = P_2'' = 0$; die innere reflectirte Welle ist also eine links rotirende. Dasselbe gilt wegen $R_p'' = R_s'$ und $R_p' = -R_s''$ von der aussen an der Platte reflectirten.

Hiermit hängt zusammen, dass eine senkrecht auf die Platte auffallende Welle, welche linear polarisirt ist, bei der Reflexion, trotzdem diese mit einem wiederholten Durchgehen durch die Platte verbunden ist, keine Drehung der Polarisationssebene erleidet. Denn setzt man in (4_a) und (8_a) $E'_s = E''_s = 0$ und wie nach der Symmetrie nöthig:

$$\Delta_1' = \Delta_1'' = \Delta_2' = \Delta_2'' \text{ und } P_1' = P_1'' = P_2' = P_2'',$$

so wird R_s' und $R_s'' = 0$.

Diese Resultate sind um so auffälliger, als in anderen Hinsichten das gewöhnliche angenäherte Verfahren, das Verhalten der durchgegangenen Wellen nach der direct (ohne wiederholte innere Reflexionen) durchgegangenen zu beurtheilen, merkliche Fehler verursachen kann, wie ich in der vorhergehenden Mittheilung gezeigt habe.

Göttingen, im März 1884.

**IX. Herstellung der japanischen magischen Spiegel und Erklärung der magischen Erscheinungen derselben¹⁾;
von Hanichi Muraoka in Japan.**

Dass eine gewisse Sorte des japanischen bronzenen Spiegels den Namen „magischer Spiegel“ erhalten hat, kommt von den folgenden zwei merkwürdigen Erscheinungen her, welche er zeigt. 1) Fängt man das von dem Spiegel reflectirte Licht auf einer weissen Wand auf, so kommt das Bild der Figuren zum Vorschein, welche hinter dem Spiegel eingeprägt sind, und die sonst an der Spiegeloberfläche unsichtbar sind, und zwar erscheinen bei Anwendung divergenten Lichtes die dickeren Stellen, also die, an welchen die hinteren Figuren erhaben sind, lichtstärker als die übrigen. 2) Macht man auf die hintere Fläche des Spiegels mit einer Messerspitze einen Riss, so wird derselbe auch in der Pro-

¹⁾ Auszug aus einer japanischen technischen Zeitschrift „Tokio Gakugeisassi“.

jection sichtbar. Die Stelle des Risses ist im divergenten Licht ebenfalls lichtstärker. Mit diesen beiden Erscheinungen, welche in Japan selbst wenig bekannt waren, haben viele Physiker sich beschäftigt. Zu den älteren Beobachtungen gehören die von Stan. Julien¹⁾, Segquier²⁾, Maillard³⁾ u. a. m. In neuerer Zeit wurden die Spiegel untersucht von R. W. Atkinson⁴⁾, R. D. Darbishire⁵⁾, S. P. Thompson⁶⁾, J. Parnell⁷⁾, E. Masse⁸⁾, E. W. Ayrton und J. Perry⁹⁾, A. Bertin und J. Duboscq¹⁰⁾, und L. Laurent.¹¹⁾ Auch in Japan selbst sind einige Beobachtungen gemacht worden von Jamakawa, Mendenhol, Person, Goto u. s. w., welche hier und da in unbedeutenden Zeitschriften veröffentlicht sind.

Im Folgenden theile ich meine eigenen Untersuchungen mit und werde zeigen, dass erstens der magische Spiegel bloß durch Dünnschleifen sich herstellen lässt, zweitens dass die beiden oben genannten Erscheinungen gleiche Ursache haben. Ferner werde ich den Beweis liefern, dass die Eigenschaft, magisch zu sein, nicht bloß den japanischen Bronzen zukommt, sondern vielmehr ganz allgemein ist. — Die Aufgaben, die wir aufzulösen haben, sind zunächst: 1) Warum erscheinen die hinteren Figuren? 2) Wie lassen sich die magischen Spiegel herstellen?

Die erste Frage ist von den oben genannten Physikern anfänglich ganz falsch, später aber zweifellos richtig beant-

1) Stan. Julien, *Compt. rend.* **24.** p. 999. 1847.

2) Segquier, *l. c.* p. 1001.

3) Maillard, *Comp. rend.* **37.** p. 178—180. 1853.

4) Atkinson, *Nature* **14.** p. 62.

5) Darbishire, *l. c.* p. 142—143.

6) Thompson, *l. c.* p. 162.

7) Parnell, *l. c.* p. 227—228.

8) Masse, *Journ. d. Phys.* **6.** p. 320. 1877.

9) Ayrton und Perry, *Proc. Roy. Soc.* **28.** p. 127—148. 1878; *Roy. Inst.* **24.** Jan.; *Nature* **19.** p. 539—542. 1878—79.

10) Bertin und Duboscq, *Ann. d. chem. et d. phys.* (5) **20.** p. 143 bis 144; *l. c.* (5) **22.** p. 472—513.

11) Laurent, *Comp. rend.* **92.** p. 412—413.

wortet worden, indem sie nachgewiesen haben, dass der japanische Spiegel, welcher immer mehr oder weniger convex ist, auf seiner Oberfläche nicht überall gleiche Convexität hat. Die Stellen nämlich, die den hinten erhabenen Stellen der Figur entsprechen, sind weniger convex, als die übrigen. Der einfachste Beweis dafür ist, nach Person, dass, wenn man auf die Spiegeloberfläche ein Stück Papier mit einer kleinen Oeffnung bringt und die Divergenz des reflectirten Lichtes untersucht, die Zerstreuung an der dicken Stelle geringer ist, als an anderen Stellen, weshalb die Erscheinung eintritt. Die Stelle, welche dem Riss entspricht, ist ebenfalls weniger convex. Die anderen Beweise muss ich hier übergehen und auf die Originale hinweisen.

Die zweite Aufgabe ist, soviel ich weiss, noch von keinem der genannten Physiker genügend gelöst worden, und den Spiegelfabrikanten selbst ist die Herstellung des magischen Spiegels nicht bekannt, vielmehr bekommen sie solche Spiegel blos zufällig. Soviel wusste man schon, dass alle Spiegel, die magische Eigenschaft zeigen, sehr dünn sind. Ich nahm nun viele gewöhnliche japanische Spiegel und schliff sie alle so dünn wie möglich. Es ergab sich, dass alle japanischen Spiegel magisch werden, wenn man sie einfach dünn genug schleift.

Wenn hiermit die zweite Aufgabe gelöst ist, so fragt es sich drittens: warum werden die hinten dickeren und die hinten gerissenen Stellen weniger convex? Die Beantwortung dieser Frage wurde mir möglich durch Mittheilung eines geheimen Kunstgriffes von Hrn. Tsuda, einem der grössten Spiegelfabrikanten in Tokio. Soll nämlich ein Spiegel, dessen Oberfläche durch mechanischen Druck hohl geworden ist, reparirt werden, so geschieht dies nicht etwa durch Hammerschläge von der hinteren Seite, weil dabei der Spiegel Sprünge bekommen kann, sondern man nimmt einen Eisenstab mit abgerundeter, aber rauher Spitze und reibt auf der concaven Stelle hin und her, sodass man feine netzartige Risse bekommt; diese Operation nennt man in der Technik der Spiegelfabrikation „Mege“. Die Stelle erhebt sich dann von selbst und wird etwas mehr convex als die Umgebung. Es

wird dann diese Erhöhung mit einem „Shen“, einem dazu bestimmten Messer, abgescheert, bis die Convexität überall gleich wird. Ist dies geschehen, so wird die ganze Oberfläche neu geschliffen, polirt und amalgamirt. Die technischen Sachen, wie man die Gleichheit der Convexität prüft, und wie das Messer eingerichtet ist u. s. w., will ich hier ganz übergehen. Diese Thatsache des Kunstgriffes nun ist in vollständiger Uebereinstimmung mit der zweiten Erscheinung des Japanspiegels; denn, wenn die Spiegeloberfläche durch einen Riss auf der Rückseite weniger convex wird, so kommt dies offenbar daher, weil die hintere Fläche convex oder erhöht wird.

Zur näheren Untersuchung verfertigte ich viele Messing-
spiegel von der Dicke etwa $\frac{1}{2}$ mm und der Grösse 9 qcm und gab der hinteren Fläche Risse mit scharfen Spitzen, wie Messer und Nadel, mit stumpfen Stäben, mit rauhen Flächen, wie Feilen. Die vorderen Spiegelflächen wurden dabei alle an der gestrichenen Stelle hohl. Ich machte ferner auf der Rückseite Risse mit Sand, schliiff dieselbe mit rauhem und feinem Schleifstein und bekam dadurch immer eine concave vordere Spiegelfläche. Wurde dagegen die hintere geschliffene Fläche polirt und amalgamirt, so war die Convexität dieser Fläche deutlich sichtbar. Es steht dies mit der „Megeerscheinung“ vollständig in Einklang; denn etwas schleifen heisst doch nichts anderes, als feine Risse machen. Es zeigte sich ferner, dass die Erhebung durch Schleifen um so erheblicher ist, je dünner die Metalle sind. Aus diesen Versuchen folgt also, dass erstens die Messingplatten die Eigenschaft haben, durch Schleifen nach der geschliffenen Seite convex zu werden, zweitens dass die Convexität von der Dicke abhängig ist, und zwar um so grösser, je dünner die Platte ist.

Wenn also eine Messingplatte an verschiedenen Stellen ungleiche Dicke hat, wie der japanische Spiegel, so müssen nothwendig beim Schleifen die dünneren Stellen sich stärker krümmen, als die dickeren, wodurch die Verschiedenheit der Convexität entsteht, und die magische Erscheinung hervor-
gebracht wird. Dass alle japanischen Spiegel immer mehr

oder weniger convex sind, wenn sie nicht mit Absicht concav gemacht werden, ist auch eine nothwendige Folge des Schleifens, und es war in der That unmöglich, bei Anwendung ebener Schleifsteine einen nicht erhabenen Messingspiegel herzustellen. Es folgt ferner daraus, dass die beiden Erscheinungen des magischen Spiegels, wenn sie auch äusserlich sich ganz widersprechen, identischen Ursprungs, (nämlich des Risses) sind. Ist nun hiermit die dritte Frage erledigt, so kommt die vierte hinzu: 4) Warum verursachen die Risse die Erhebung der Fläche?

Die Ursache muss entweder in der Erzeugung der Wärme oder in der mechanischen Wirkung des Ritzens oder Schleifens, oder endlich in der Molecularspannung des Metalles liegen. Sollte die Wärme die Ursache sein, so müsste die Krümmung auch dann erfolgen, wenn die Platte einfach an einer Fläche erwärmt oder mit weicheeren Substanzen, wie Kork, Tuch, Knochen, gerieben wird, was aber nicht im geringsten der Fall ist. Zur Krümmung sind also Risse nothwendig. Sollte die mechanische Wirkung der Grund sein, so müsste ein Riss, der auf chemischem Wege gegeben wird, keine Krümmung hervorbringen. Ich überzog die Messingplatte mit Wachs, gab ihm einen Riss mit weicher Spitze, ätzte diese Stelle mit Salpetersäure und erhielt die Krümmung immer, wenn die Aetzung tief genug war. Die mechanische Wirkung kann demnach auch nicht die Ursache sein.

Die einzige Erklärung, welche noch für die Erscheinung übrig bleibt, ist die Spannung. Die Molecüle, welche anfänglich einander Gleichgewicht hielten, nehmen durch Wegnahme eines Theiles derselben, eben durch den Riss, eine neue Gleichgewichtslage an, welche Erscheinung wir in auffallendster Weise bei Glathränen, Bologneser Glas u. s. w. beobachten.

Endlich fragt es sich, kommt die magische Eigenschaft blos der japanischen Bronze zu? Für Messing ist schon der zweite Theil der magischen Eigenschaft nachgewiesen. Um die erste Eigenschaft zu prüfen, löthete ich an eine Messingplatte ein Metallkreuz, machte die andere Fläche zu einem

Spiegel auf üblichem Wege und bekam einen magischen Spiegel, der also das Kreuz im reflectirten Licht zeigte. Für andere Substanzen, wie Kupfer, Blei, Zink, Eisen, Stahl, Glas u. s. w., liess sich die Eigenschaft ohne Ausnahme nachweisen, nur beschränkte ich den Versuch bloß auf die zweite Eigenschaft, da beide ja gleichen Ursprunges sind. Bei manchen Metallen bekam ich, besonders wenn die Platte zu dünn war, wie die Eisenplatte, welche gewöhnlich für Telephone angewendet wird, gerade das verkehrte Resultat; durch Ritzen wurde nämlich die gegenüberliegende Seite gehoben. Es kommt dies einfach daher, dass durch zu starken Druck die Elasticitätsgrenze leicht überschritten wird. Nahm ich aber bei einer solchen Platte ein Lineal und machte den Riss mit feiner Messerspitze ganz leise, so gelangte ich doch zu dem richtigen Resultat. Die Eigenschaft, magisch zu sein, ist demnach allen festen Körpern, wenigstens den angewandten ziemlich zahlreichen Substanzen gemeinschaftlich.

Oft ist die Erscheinung vorhanden, ohne dass man sie erkennt, wenn man nicht sehr vorsichtig beobachtet. Ich beobachtete nicht die Erhebung der gerissenen Fläche, sondern vielmehr die Vertiefung der anderen Fläche in folgender Weise. Ich schliff, polirte, amalgamirte zunächst die nicht zu ritzende Fläche, beobachtete, nachdem der Riss gemacht, die Entstehung der Doppelbilder einer in gehöriger Entfernung sich befindlichen, mit dem Riss parallelen Lichtspalte oder Flamme. Auch bei sehr dünner Glasplatte, wie die mikroskopischen Deckglasplatten, war die Wirkung des Risses bemerkbar. Hierbei war aber die beschriebene Beobachtungsweise wegen der doppelten Reflexion nicht anwendbar. Ich wendete deshalb die Methode von Person¹⁾ an, nämlich ich brachte an die nicht gerissene Fläche eine zweite Deckglasplatte. Durch leisen Druck bekam ich an den beiden Seiten des Risses schöne Farbenringe, zum Beweis, dass die Stelle dem Risse gegenüber vertieft ist. Nach Goto²⁾ soll die Krümmung durch den Riss mit der Zeit zunehmen.

1) Person, Gakugeishirm. Nr. 39.

2) Goto, Tokio-Gakugeisassi. Nr. 22. p. 35.

Um dies zu bestätigen, nahm ich Winkelmessungen an verschiedenen Spiegelplatten vor, indem ich der hinteren Fläche einen langen Riss gab und mittelst eines Goniometers den Winkel bestimmte, welchen die beiden Bilder eines an das Goniometer angebrachten hellen Streifens bildeten. Während mehrerer Stunden und Tage bekam ich keine Aenderung desselben. Danach beruht die Behauptung von Goto wahrscheinlich auf Täuschung. — Der Winkel, den ich so erhielt, betrug zwei bis vier Minuten. Diese Erscheinung könnte man vielleicht technisch anwenden, z. B. zur Herstellung eines sehr stumpfen Winkels.

Hiermit glaube ich, alle Räthsel des magischen Spiegels gelöst zu haben.

X. Die Abhängigkeit des von einer Influenzmaschine erster Art gelieferten Stromes von der Feuchtigkeit; von R. Krüger.

(Hierzu Taf. II Fig. 6.)

In der Abhandlung des Hrn. Prof. Riecke¹⁾ über die von einer Influenzmaschine zweiter Art gelieferten Electricitätsmengen und ihre Abhängigkeit von der Feuchtigkeit ist ein Zusammenhang zwischen den Electricitätsmengen, welche bei einer Umdrehung der Scheibe durch den Querschnitt des Leitungsdrahtes gehen, und der Feuchtigkeit durch eine nach Potenzen der letzteren fortschreitenden Reihe zu geben versucht, und zwar unter den speciellen Annahmen, dass der Differentialquotient $de/d\rho$ für $\rho = 0$ verschwindet, und dass nur das quadratische Glied der Entwicklung in Rechnung gezogen wird. Die Genauigkeit der Beobachtungsreihen, welche zu der Begründung jenes Zusammenhanges dienten, war einerseits durch das Schwanken der Temperatur bei verschiedenen Feuchtigkeitsgraden — es ist hier wie im Folgenden stets die relative Feuchtigkeit verstanden — beeinträchtigt, andererseits war es auch nicht wohl möglich, bei

1) Riecke, Wied. Ann. 13. p. 253. 1881.

den damaligen geringen experimentellen Hilfsmitteln grössere Unterschiede in dem Feuchtigkeitsgehalte der Luft zu erzielen.

In der vorliegenden Arbeit ist nun eine besondere Sorgfalt darauf verwandt, in den bezeichneten beiden Dingen eine möglichst grosse Annäherung an die zur Prüfung der Formel, welche die Abhängigkeit der Electricitätsmenge von der Feuchtigkeit darstellen soll, erforderliche Genauigkeit zu erhalten, und ist es nicht nur gelungen, ein Schwanken der Temperatur bis auf Theile eines Grades herabzudrücken, sondern auch einen Unterschied von fast 60 Proc. in den Feuchtigkeitszuständen der Luft herbeizuführen.

Ein Glaskasten von 70 cm Länge, 40 cm Breite und 55 cm Höhe, dessen innerer Raum durch einen fest anliegenden Deckel vollkommen gegen die äussere Atmosphäre abgeschlossen werden konnte, nahm die Influenzmaschine erster Art in sich auf. Es war dieses dieselbe Maschine, welche von Hrn. F. Kohlrausch zu seinen Untersuchungen über den von einer Influenzmaschine erzeugten Strom nach absolutem Maass¹⁾ verwandt wurde, nur war bei den jetzigen Versuchen die doppelte Ueberführung durch Schnüre in der Weise abgeändert, dass die Axe der Rolle, welche direct durch Schnurlauf mit der Axe der beweglichen Scheibe in Verbindung stand, durch die Glaswand zu einem später noch genauer zu beschreibenden Laufwerk geführt wurde. Der mittlere Abstand der beiden Scheiben voneinander betrug 1,75 mm; der mittlere Abstand der Spitzen von der beweglichen Scheibe 3,8 mm. Auf zwei gegenüberliegenden Längsseiten des Kastens waren die beiden horizontalen Conductoren und die Drehungsaxe der Maschine luftdicht durch die Wände hindurchgeführt. Ausserdem befanden sich zum Zwecke der Erneuerung der Luft im Kasten je ein enges Messingrohr in den Breitseiten, welche Oeffnungen auch bei der Controle der Hygrometer ihre Verwendung fanden, indem der Schlauch vom Aspirator zum Regnault'schen Condensationshygrometer hindurchgeführt wurde.

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 135. p. 121. 1868.

Die Drehungsaxe der Maschine war mit einem nach den Angaben des Hrn. Rossetti¹⁾ angefertigten Laufwerk verbunden, welches seinerseits durch Gewichte, welche je nach der Umdrehungsgeschwindigkeit zwischen 8 und 32 kg schwankten, in Bewegung gesetzt wurde. Bei einer Umdrehung derjenigen Axe des Laufwerkes, welche mit der Drehungsaxe der Maschine verbunden war, fiel das Gewicht um 0,005 622 4 m, während die bewegliche Scheibe der Maschine in derselben Zeit 2,71 Umdrehungen machte. Das andere Ende derselben Axe des Laufwerkes stand mit einer Schraube ohne Ende in Zusammenhang, welche in einem bestimmten Zeitmoment durch Heben und Senken eines Zahnrades das Zählerwerk in die Bewegung der Maschine ein- oder ausschaltete.

Die Feuchtigkeitsverhältnisse werden durch zwei in den Kasten eingebrachte Klinkerfues'sche Hygrometer von ziemlich gut übereinstimmendem Gange gemessen; es besaßen dieselben statt der gewöhnlichen Metallumhüllung eine solche von Glas.

Die folgende Tabelle gibt eine Zusammenstellung der Angaben der Klinkerfues'schen Hygrometer und der des Regnault'schen Condensationshygrometers für die ganze Reihe der zur Beobachtung gelangten Feuchtigkeitszustände der Luft; dieselbe enthält die Resultate dreier verschiedener Beobachtungsreihen mit allmählich steigenden Feuchtigkeitsgraden. Eine solche Trennung der Beobachtungen war nothwendig, weil sich bei plötzlichen bedeutenden Aenderungen in den Feuchtigkeitsverhältnissen die Hygrometer nicht so gleich dem neuen Zustande anbequemten, sondern gewöhnlich hinter dem wahren Werthe zurückblieben. Die hier angegebenen Zahlen wurden erst dann aufgesucht, wenn man sicher sein konnte, dass die Hygrometer einen festen Stand angenommen.

Die mit dem Regnault'schen Hygrometer gefundenen Werthe können auf grosse Genauigkeit Anspruch machen weil zur Bestimmung des Thaupunktes ein Verfahren ange-

1) Rosetti, Nuov. Cim. (2) 12. p. 98. 1874.

	Klinker- fues	Regnault	Correct.	Klinker- fues	Regnault	Correct.	Klinker- fues	Regnault	Correct.
1.	13,0		+1,4	36,4		—0,8	54,3		—2,9
2.	10,8	14,4	+3,6	36,4	35,6	—0,8	54,7	51,4	—3,3
1.	19,3		+1,0	40,0		—1,6	63,6		—2,9
2.	17,5	20,3	+2,8	41,4	38,4	—3,0	63,9	60,7	—3,2
1.	26,5		+0,2	43,0		—2,3	70,7		—2,4
1.	25,0	26,7	+1,7	44,0	40,7	—3,3	71,9	68,3	—3,6
1.	31,5		—1,2	51,3		—2,7	77,6		—2,8
2.	32,5	30,3	—2,2	52,4	48,6	—3,8	79,3	74,8	—4,5
1.	36,6		—0,9	56,6		—2,8			
2.	36,6	35,7	—0,9	57,1	53,8	—3,3			

wandt wurde, welches die kleinste Veränderung an der Oberfläche der polirten Cylinderflächen bemerkbar machte. Die von einem feinen Spalt ausgehenden Lichtstrahlen wurden an den Metallflächen in ein Fernrohr reflectirt, welches die Bilder nicht scharf wiedergab, sondern soweit ausgezogen war, dass die beiden Lichtstreifen theilweise übereinander lagerten. Man erhielt dadurch in einem dunklen Gesichtsfelde zwei verschieden stark beleuchtete Streifen, ein intensiveres Licht aus der Mitte, von beiden Seiten ein etwas matteres. Trat nun die Feuchtigkeit an der einen Fläche auf, so wurde damit das vorige Licht, welches noch zum Auge gelangte, vernichtet, und es blieb nur ein matt beleuchteter Streifen im Gesichtsfelde zurück; doch war es durchaus nicht nothwendig, das vollständige Verschwinden des Lichtes abzuwarten, die Helligkeitsänderung des mittleren Streifens zeigte schon ganz geringe Oberflächenveränderungen an; die grösste Differenz in der Temperatur beim Erscheinen und Verschwinden der Feuchtigkeit war $0,9^{\circ}$ C.

Die Ladung der Influenzmaschine musste von aussen geschehen und wurde dieselbe mit Hülfe einer Reibungselectrisirmaschine in folgender Weise bewirkt. Conductor und Reibzeug wurden je mit einem der horizontalen Conductoren der Influenzmaschine verbunden, welche bis auf eine Entfernung von 1—1,5 cm einander genähert waren. Die Scheibe der Influenzmaschine wurde jetzt in langsame Bewegung versetzt und von der zweiten Maschine Electricität zugeführt, was anfangs ein Ueberspringen der Funken zwischen den beiden Conductoren bewirkte, dann aber diese wieder verschwinden

liess und dafür mehr und mehr Electricitätsmengen auf die bewegliche Scheibe und in die Belege schaffte, bis das Wiederauftreten der Funken zwischen den Conductoren die selbständige Thätigkeit der Influenzmaschine anzeigte.

Was nun die Bestimmung des von der Influenzmaschine erzeugten Stromes anbetrifft, so geschah dieselbe mit einem grossen Meyerstein'schen Galvanometer, dessen astatisches Nadelpaar eine Schwingungsdauer von 33,028 Secunden besass. Die innere Nadel war umgeben von einem starken Kupferringe, der die Schwingungen des Systems so dämpfte, dass das Verhältniss zweier aufeinander folgenden Elongationen 1,688 war. Die Intensität des Stromes wurde im absoluten Maass nach der Formel:

$$i = \frac{MT(1+\theta)}{C} \varphi$$

bestimmt, wo $M = m_i - m_a$, die Differenz der magnetischen Momente der beiden Nadeln, sich aus der Formel:

$$M = \frac{\pi^2 K}{t^2 (1 + \theta) T}$$

$M = 3\,193\,640$ (mm.mg.sec) ergab; für die Horizontalintensität am Orte des Galvanometers fand man $T = 1,925$; der Torsionscoëfficient war $\theta = 0,6773$; unter φ ist der Ablenkungswinkel verstanden, in Bogenmaass für den Radius Eins ausgedrückt, und C ist die Empfindlichkeit des Galvanometers und ist zu berechnen mit Hülfe der folgenden Formel:

$$C = \sqrt{\frac{2wK\sqrt{\pi^2 + \lambda_0^2}}{t} \left\{ \frac{\lambda}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} - \frac{\lambda'}{\sqrt{\pi^2 + \lambda'^2}} \right\}}.$$

Diese ergibt sich aus der Bewegungsgleichung für gedämpfte Schwingungen:

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \left(\frac{C^2}{w} + P^2 \right) \frac{d\varphi}{dt} + [(m_i - m_a) T + D] \varphi = 0,$$

wo unter K das Trägheitsmoment des schwingenden Systems, unter w der Widerstand des in sich geschlossenen Multipliers verstanden ist; mit D ist die Torsionsconstante bezeichnet, und durch $P^2 (d\varphi/dt)$ ist das Drehungsmoment aus-

gedrückt, welches etwa der Luftreibung, einer elastischen Nachwirkung sein Entstehen verdankt. Ist λ das logarithmische Decrement bei in sich geschlossenem Multiplicator und τ die zu λ gehörige Schwingungsdauer der Nadeln, so gilt die Gleichung:

$$2 \frac{\lambda}{\tau} = \frac{1}{K} \left\{ \frac{C^2}{w} + P^2 \right\}.$$

Bei geöffnetem Multiplicator ist $C = 0$ und es bestimmt sich P^2 durch die Gleichung:

$$\frac{P^2}{K} = 2 \frac{\lambda'}{\tau'},$$

wo λ' Luftdämpfung bezeichnet, und τ' zu λ' in derselben Beziehung steht, als τ zu λ . Setzt man diesen Werth für P^2/K in die frühere Gleichung ein und reducirt dann die verschiedenen Schwingungsdauern durch die Gleichungen:

$$\frac{\tau^2}{\pi^2 + \lambda^2} = \frac{\tau'^2}{\pi^2 + \lambda'^2} = \frac{t^2}{\pi^2 + \lambda_0^2}$$

sämmtlich auf die Schwingungsdauer ohne Dämpfung, so erhält man den oben angegebenen Werth für den Empfindlichkeitscoefficienten des Galvanometers.

Das Trägheitsmoment wurde durch Schwingungsdauerbeobachtungen mit Hülfe der Formel:

$$K = k \frac{t^2}{t'^2 - t^2}$$

bestimmt; das Trägheitsmoment k war durch zwei cylindrische Messingkörper von zusammen 199 966 mg Gewicht dargestellt, welche auf Spitzen in einer Entfernung von 99,854 mm von der Drehungsaxe aufgesetzt wurden. Die Grösse K war:

$$K^1) = 11397 \cdot 10^5 \text{ mg. mm}^2.$$

Der Widerstand der Multiplicatorwindungen wurde einmal mit der Dämpfungsmethode, sodann noch mit der Wheatstone'schen Combination bestimmt und es ergab sich der Werth:

$$w = 18898,35 \cdot 10^6 \text{ (absolutes Maass).}$$

1) Nach früher von Weber und Kohlrausch angestellten Beobachtungen waren die Werthe für das Trägheitsmoment $11320 \cdot 10^5$, resp. $11347 \cdot 10^5$. Die Differenzen sind durch den verschiedenen Abstand eines an der Suspension befindlichen Laufgewichtes von der Drehungsaxe bedingt.

Für die Empfindlichkeit des Galvanometers ergab sich demnach der Werth:

$$C = 69611 \cdot 10^4$$

und schliesslich zur numerischen Berechnung der Stromstärke die Formel:

$$i = 0,014725 \cdot \varphi \text{ nach magnet. Maass (mm, mg, s.)}$$

Zur Erläuterung der Beobachtungsart möge hier das Protocoll einer Beobachtungsreihe mitgetheilt werden; es ist die Reihe, welche sich auf den Feuchtigkeitsgrad 25,1 Proc. bezieht, ausgewählt.

Temperatur im Zimmer 9,1°.

Procente der relativen Feuchtigkeit 25,1 Proc.

Entfernung von Spiegel und Scala 2815 mm.

Ruhelage 749,6.

Geladene Maschine.

	Hygrometer	Therm.	Gewicht	Umdrehungen	Zeit	Umkehrpunkte	Mittel
1.	24,7%	5,8° R.	22,450 kg	65,7	22 ^m 20 ^s — 24 ^m 0 ^s	829,2 834,4	839,4
						847,0	
2.	23,3 „	5,9° „	22,450 „	65,6	27 30 — 29 10	846,2 842,0	839,5
						835,9	
			26,210 „	114,1	42 10 — 43 50	916,3 909,9	907,0
1.	24,8 „	5,8° „	26,220 „	114,4	47 5 — 48 45	900,8 894,9	907,5
						899,7	
2.	23,3 „	5,9° „	26,220 „	114,5	53 20 — 55 0	917,7 896,1	907,4
						900,5	
						916,5	
1.	24,7 „	5,9° „	30,900 „	141,3	16 45 — 18 25	938,7 943,6	949,2
						957,3	
2.	23,2 „	5,9° „	30,900 „	141,4	20 30 — 22 10	956,0 955,1	949,0
						942,5	

Temperatur im Zimmer 9,3°.

Ruhelage 749,4.

Ungeladene Maschine.

Gewicht	Zeit	Umdrehungen
9,140 kg	40 ^m 20 ^s — 42 ^m 0 ^s	65,7
9,130 „	45 20 — 47 0	64,8
12,810 „	50 20 — 52 0	114,4
12,810 „	55 20 — 57 0	114,5
17,170 „	2 20 — 4 0	141,3
17,160 „	6 20 — 8 0	141,1

Die Umdrehungsgeschwindigkeiten der beweglichen Scheibe lassen sich aus den hier beobachteten durch Multiplication mit 2,71 berechnen. Es sollte die Stromintensität für die drei Umdrehungsgeschwindigkeiten 1,778, 3,100 und 3,829 bestimmt werden; es waren also vom Zähler in 100 Secunden 65,61, resp. 114,39 und 141,29 Umdrehungen der treibenden Axe des Laufwerkes anzuzeigen. Die geringen Schwankungen der Magnetnadel um ihre neue Ruhelage wurde dadurch erreicht, dass die Maschine nicht sofort die ganze Geschwindigkeit erhielt, sondern erst dann in volle Thätigkeit gesetzt wurde, wenn die Nadel den äussersten Punkt bei einer geringeren Umdrehungsgeschwindigkeit erreicht hatte. Aus den Gewichten, die sich stets um 0,01 kg unterscheiden, wurde das für die gesuchte Umdrehungsgeschwindigkeit nothwendige Gewicht durch Interpolation berechnet und auch die Stromstärke darauf reducirt. Wie es sich später zeigen wird, ist die Stromstärke nicht direct der Umdrehungsgeschwindigkeit proportional, doch kann man wohl bei so kleinen Differenzen der Stromstärken Proportionalität zwischen diesen beiden Grössen voraussetzen. In derselben Weise wurde auch das Gewicht bestimmt, welches bei ungeladener Maschine dieselbe Umdrehungsgeschwindigkeit hervorbringen sollte.

In der folgenden Tabelle sind nun die Beobachtungen nach steigenden Procenten der relativen Feuchtigkeit angeordnet. Jeder Feuchtigkeitsgrad weist drei unter sich verschiedene, aber für alle Zeilen gleiche Umdrehungsgeschwindigkeiten der Scheibe auf. P ist das treibende Gewicht bei geladener Maschine, p das bei ungeladener Maschine für dieselbe Umdrehungsgeschwindigkeit. Die mit i/n bezeichnete Reihe gibt Beispiele zu dem von Hrn. Rossetti aufgestellten Satze, dass bei wachsender Umdrehungsgeschwindigkeit die Stromstärke schneller wächst, als die Umdrehungszahl. Auf diesen Umstand wird später noch einmal zurückgegangen, weil sich daran eine merkwürdige Eigenschaft des Coëfficienten des quadratischen Gliedes der Reihenentwicklung für die Stromstärke knüpft.

n	i	$\frac{i}{n}$	P	p	q	t
1,778	0,000 252 9	0,000 142 2	24,082	9,149	14,2%	7,0°
3,100	0,000 441 2	0,000 142 3	27,749	12,811		
3,829	0,000 553 2	0,000 144 4	32,340	17,170		
1,778	0,000 245 0	0,000 137 8	23,802	9,140	19,7 „	6,6
3,100	0,000 428 7	0,000 138 3	27,028	12,810		
3,829	0,000 539 4	0,000 140 8	31,646	17,168		
1,778	0,000 234 7	0,000 132 0	22,450	9,139	25,1 „	7,3
3,100	0,000 412 5	0,000 133 0	26,219	12,810		
3,829	0,000 521 4	0,000 136 1	30,899	17,169		
1,778	0,000 223 8	0,000 125 9	21,662	9,142	29,8 „	7,2
3,100	0,000 395 2	0,000 127 5	25,482	12,814		
3,829	0,000 502 0	0,000 131 1	30,212	17,173		
1,778	0,000 185 8	0,000 104 5	18,965	9,151	42,3 „	7,3
3,100	0,000 334 8	0,000 108 0	22,957	12,819		
3,829	0,000 435 3	0,000 113 7	27,822	17,177		
1,778	0,000 073 3	0,000 041 2	12,479	9,150	66,7 „	7,3
3,100	0,000 156 7	0,000 050 5	16,899	12,816		
3,829	0,000 236 4	0,000 061 7	22,152	17,173		
1,778	0,000 030 6	0,000 017 2	10,435	9,156	73,9 „	7,6
3,100	0,000 088 9	0,000 028 7	14,951	12,822		
3,829	0,000 162 8	0,000 042 5	20,334	17,185		

Es ist wohl nicht ohne Interesse, dieser Tabelle einige Zahlen hinzuzufügen, welche, an derselben Maschine beobachtet, aus der oben erwähnten Arbeit des Hrn. F. Kohlrausch entnommen sind. Leider ist dort kein sicherer Schluss auf die Entfernung der beiden Scheiben voneinander, sowie auf die der Spitzen von der beweglichen Scheibe zu machen; ausserdem sind nur die Grenzen der beobachteten relativen Feuchtigkeit — 0,42 und 0,58 — angegeben, weil bei der Arbeit die Abhängigkeit der Stromstärke von der Feuchtigkeit nicht untersucht wurde. Die dort verzeichneten Scalenausschläge p sind nach der ebenfalls in der Abhandlung gegebenen Formel:

$$i = 0,000\,002\,51 \cdot p$$

in Stromstärken nach absolutem Maass verwandelt. Auch hier ist n die Umdrehungszahl der Scheibe.

$n =$	2	3	6	9
$i =$	0,000 075 30	0,000 108 18	0,000 222 88	0,000 343 87.

Eine Vergleichung dieser Werthe mit Werthen, welche in der Tabelle etwa in der Mitte zwischen 42,3 und 66,7 Proc. liegen könnten, zeigt, dass die damals gefundenen Werthe bedeutend kleinere sind; wie diese Differenzen zu beseitigen sind, lässt sich nach den enthaltenen Angaben in jener Arbeit nicht feststellen.

Die Abhängigkeit des von der Influenzmaschine erzeugten Stromes von der relativen Feuchtigkeit möge dargestellt werden in der Form:

$$i = i_0 - \alpha \varrho^2 = i_0 \left(1 - \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2} \right)$$

wo i_0 diejenige Stromstärke bedeutet, welche man bei Abwesenheit jeglicher Feuchtigkeit erhalten würde und ϱ_0 umgekehrt den Feuchtigkeitsgrad bezeichnet, für welchen die Maschine aufhören würde, zu arbeiten. Um die Richtigkeit dieser Formel zu prüfen, wird die vorhergehende Tabelle in folgende drei zerlegt; eine jede derselben enthält die Stromstärken, welche sich auf dieselbe Umdrehungsgeschwindigkeit beziehen.

Umdrehungszeit $n = 1,778$.

beobachtet	i	berechnet	ϱ
			Proc.
0,000 252 9	0,000 252 90	14,2	
0,000 245 0	0,000 245 02	19,7	
0,000 234 7	0,000 234 80	25,1	
0,000 223 8	0,000 223 89	29,8	
0,000 185 8	0,000 185 81	42,3	
0,000 073 3	0,000 073 42	66,7	
0,000 030 6	0,000 030 65	73,9	

Umdrehungszeit $n = 3,100$.

beobachtet	i	berechnet	ϱ
			Proc.
0,000 441 2	0,000 441 21	14,2	
0,000 428 7	0,000 428 73	19,7	
0,000 412 5	0,000 412 52	25,1	
0,000 395 2	0,000 395 24	29,8	
0,000 384 8	0,000 384 88	42,3	
0,000 156 7	0,000 156 76	66,7	
0,000 088 9	0,000 088 96	73,9	

Umdrehungszeit $n = 3,829$.

beobachtet	i	berechnet	ϱ
			Proc.
0,000 553 2	0,000 552 94	14,2	
0,000 539 4	0,000 539 05	19,7	
0,000 521 4	0,000 521 03	25,1	
0,000 502 0	0,000 501 81	29,8	
0,000 435 3	0,000 434 68	42,3	
0,000 236 4	0,000 236 54	66,7	
0,000 162 8	0,000 161 16	73,9	

Combinirt man die Werthe für die Stromstärke zu je zwei in jeder Tabelle und berechnet α und i_0 nach den Formeln:

$$\alpha = \frac{i - i_1}{\varrho_1^2 - \varrho^2}, \quad i_0 = \frac{i\varrho_1^2 - i_1\varrho^2}{\varrho_1^2 - \varrho^2}, \quad \varrho_0^2 = \frac{i_0}{\alpha},$$

so erhält man für jede der drei Umdrehungsgeschwindigkeiten 21 Werthe für die Stromstärke bei vollkommen trockener Luft, und eine ebenso grosse Anzahl Werthe für die Coefficienten α und die Grössen ϱ_0 . Aus diesen 21 Werthepaaren jeder Tabelle sind die arithmetischen Mittel gezogen und danach die den beobachteten zur Seite gestellten Stromstärken berechnet. Die Mittelwerthe weichen, wie die folgende Zusammenstellung zeigt, nur um geringe Beträge von den einzelnen Grössen, aus denen sie sich hergeleitet haben. ab, obgleich die Zahlen für die Umdrehungsgeschwindigkeit 3,829 gewählt sind, bei welchen die grössten Differenzen zwischen beobachteter und berechneter Stromstärke auftreten. Die den einzelnen Gliedern vorgesetzten beiden römischen Zahlen geben an, aus welcher Combination das Resultat gewonnen ist.

I.	II	$\alpha = 0,739 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 12$	$\varrho_0 = 87,67$
I.	III	$\alpha = 0,742 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 19$	$\varrho_0 = 87,46$
I.	IV	$\alpha = 0,745 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 26$	$\varrho_0 = 87,28$
I.	V	$\alpha = 0,742 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 18$	$\varrho_0 = 87,49$
I.	VI	$\alpha = 0,745 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 26$	$\varrho_0 = 87,29$
I.	VII	$\alpha = 0,742 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 18$	$\varrho_0 = 87,49$
II.	III	$\alpha = 0,745 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 38$	$\varrho_0 = 87,31$
II.	IV	$\alpha = 0,748 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 48$	$\varrho_0 = 87,15$
II.	V	$\alpha = 0,742 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 668\ 26$	$\varrho_0 = 87,47$
II.	VI	$\alpha = 0,746 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 39$	$\varrho_0 = 87,28$
II.	VII	$\alpha = 0,742 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 24$	$\varrho_0 = 87,49$
III.	IV	$\alpha = 0,751 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 71$	$\varrho_0 = 87,02$
III.	V	$\alpha = 0,742 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 15$	$\varrho_0 = 87,50$
III.	VI	$\alpha = 0,746 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 570\ 16$	$\varrho_0 = 87,42$
III.	VII	$\alpha = 0,742 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 15$	$\varrho_0 = 87,50$
IV.	V	$\alpha = 0,739 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 567\ 69$	$\varrho_0 = 87,61$
IV.	VI	$\alpha = 0,747 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 24$	$\varrho_0 = 87,29$
IV.	VII	$\alpha = 0,741 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 567\ 88$	$\varrho_0 = 87,51$
V.	VI	$\alpha = 0,747 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 569\ 18$	$\varrho_0 = 87,23$
V.	VII	$\alpha = 0,742 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 568\ 16$	$\varrho_0 = 87,50$
VI.	VII	$\alpha = 0,727 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 559\ 91$	$\varrho_0 = 87,75$
Mittel		$\alpha = 0,744 \times 10^{-7}$	$i_0 = 0,000\ 567\ 96$	$\varrho_0 = 87,32$

Die Formeln, nach welchen die Werthe für die Stromstärken in den nach den Umdrehungsgeschwindigkeiten geordneten Tabellen berechnet sind, würden sich demnach in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned}
 n = 1,778 \quad i &= 0,000\,261\,424 - 0,42257 \cdot 10^{-7} \cdot \varrho^2 \\
 &= 0,000\,261\,424 \left(1 - \frac{\varrho^2}{78^2,65}\right) \\
 n = 3,100 \quad i &= 0,000\,454\,722 - 0,66973 \cdot 10^{-7} \cdot \varrho^2 \\
 &= 0,000\,454\,722 \left(1 - \frac{\varrho^2}{82^2,40}\right) \\
 n = 3,829 \quad i &= 0,000\,567\,965 - 0,74490 \cdot 10^{-7} \cdot \varrho^2 \\
 &= 0,000\,567\,965 \left(1 - \frac{\varrho^2}{87^2,32}\right).
 \end{aligned}$$

Die mit Hülfe dieser Formeln gefundenen Werthe zeigen eine so gute Uebereinstimmung mit den beobachteten Werthen, dass man die Formel:

$$i = i_0 - \alpha \varrho^2 = i_0 \left(1 - \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2}\right)$$

wenigstens bis zu Feuchtigkeitsgraden von 75% als einen genauen Ausdruck des Gesetzes betrachten kann, durch welches die Abhängigkeit der von einer Influenzmaschine gelieferten Ströme von der Feuchtigkeit bestimmt wird.

Drückt man die bisher im magnetischen Maasse gegebenen Stromstärken in mechanischem Maasse aus und dividirt durch die Umdrehungszahl, so erhält man die während einer Umdrehung der Scheibe durch den Querschnitt des Leitungsdrahtes strömenden electrostatischen Electricitätsmengen. Transformirt man danach die Grössen α , so entstehen die Formeln zur Berechnung der Electricitätsmengen, welche sich in folgender Form schreiben würden:

$$\begin{aligned}
 n = 1,778 \quad e &= 457,84 \cdot 10^5 - 7392,56 \varrho^2 \\
 &= 457,84 \cdot 10^5 \left(1 - \frac{\varrho^2}{78^2,65}\right) \\
 n = 3,100 \quad e &= 456,26 \cdot 10^5 - 6719,90 \varrho^2 \\
 &= 456,26 \cdot 10^5 \left(1 - \frac{\varrho^2}{82^2,40}\right) \\
 n = 3,829 \quad e &= 461,38 \cdot 10^5 - 6051,14 \varrho^2 \\
 &= 461,38 \cdot 10^5 \left(1 - \frac{\varrho^2}{87^2,32}\right).
 \end{aligned}$$

Durch diese Gleichungen ist auch die von Hrn. Prof. Riecke aufgestellte Vermuthung, dass der Werth von α/n mit wachsender Umdrehungsgeschwindigkeit kleiner werde, als bewiesen zu betrachten. Mit Rücksicht auf die zweite Form der Gleichungen würde sich derselbe Umstand so ausdrücken, dass bei wachsender Umdrehungsgeschwindigkeit auch zugleich die Grössen ρ_0 wachsen, d. h. die Maschine wird bei um so höheren Feuchtigkeitsgraden in Thätigkeit zu erhalten sein, je grösser die Umdrehungsgeschwindigkeit ist. Dass nicht etwa Temperaturänderungen die Verschiedenheit der Coëfficienten herbeigeführt haben, muss wohl als vollständig ausgeschlossen betrachtet werden, weil bei den ganzen Beobachtungsreihen die grösste Temperaturdifferenz 1,0° C. beträgt.

Es möge hier noch auf einen Unterschied in der Bezeichnungsweise aufmerksam gemacht werden. Während in der Abhandlung des Hrn. Prof. Riecke unter ρ die relative Feuchtigkeit verstanden wird, ist in der vorliegenden Arbeit mit derselben Grösse der Procentsatz der relativen Feuchtigkeit bezeichnet; es erleidet dadurch nur der Coëfficient α eine Aenderung, indem derselbe um ebensoviel wächst, als ρ^2 fällt. Im Princip führen beide Bezeichnungsweisen auf dasselbe hinaus, und gelten deshalb die dort aufgestellten Sätze auch für diese Bezeichnungsart umgekehrt.

Dass eine so bedeutende Differenz zwischen den Electricitätsmengen, welche die Maschine bei Abwesenheit jeglicher Feuchtigkeit liefert, in beiden Arbeiten besteht, hat vielleicht darin seinen Grund, dass bei diesen Beobachtungen die Spitzen der Electrodenkämme näher an die bewegliche Scheibe der Influenzmaschine erster Art herangebracht waren, als dort bei der Maschine zweiter Art.

Als Resultate der Untersuchung würden sich folgende Sätze aufstellen lassen:

1. Die Abhängigkeit des von einer Influenzmaschine gelieferten Stromes von der Feuchtigkeit lässt sich durch die Formel:

$$i = i_0 - \alpha \rho^2 = i_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right)$$

für jede relative Feuchtigkeit mit vollkommener Genauigkeit darstellen.

2. Die Constante $\varrho_0 = \sqrt{i_0/\alpha}$ wird bei wachsender Umdrehungsgeschwindigkeit grösser, d. h. der Strom der Influenzmaschine verschwindet bei grösserer Umdrehungsgeschwindigkeit erst bei höheren Feuchtigkeitsgraden, als bei geringerer Geschwindigkeit.

3. Die bei Abwesenheit jeglicher Feuchtigkeit durch eine Umdrehung der Scheibe gelieferte Electricitätsmenge ist von der Umdrehungsgeschwindigkeit im wesentlichen unabhängig, und zwar beträgt hierbei die durch den Querschnitt des Leitungsdrahtes gehende Electricitätsmenge $458,33 \cdot 10^5$ electrostatischer Einheiten.

Einige Beobachtungen, die zur Ermittlung der Abhängigkeit der Stromstärke von der Entfernung der Spitzen von der beweglichen Scheibe und andererseits der beiden Scheiben voneinander angestellt wurden, ergaben nur ein Abnehmen der Stromstärke bei grösserer Entfernung; ein bestimmtes Gesetz aufzustellen, war bisher unmöglich.

Göttingen, im März 1884.

**XI. Ueber den Einfluss des Extrastromes
auf die Bewegung eines Magnetes innerhalb eines
dämpfenden Multipliers;
von E. Dorn in Darmstadt.**

In meiner Abhandlung: „Die Reduction der Siemens'schen Einheit auf absolutes Maass“¹⁾, habe ich den Einfluss des Extrastromes auf die Bewegung des gedämpften Magnetes in Rechnung gezogen. Gegen die Richtigkeit der dort von mir aufgestellten Formel²⁾ sind von Hrn. H. Wild Einwendungen erhoben worden³⁾, und Hr. Wild glaubt, den

1) E. Dorn, Wied. Ann. 17. p. 773 ff. 1882.

2) l. c. p. 783 Formel (39).

3) H. Wild, Nachtrag zu der „Bestimmung des Werthes der Siemens'schen Widerstandseinheit in absolutem electromagnetischem Maasse.“ 1884. Ein Auszug aus dieser Arbeit wird demnächst in den Annalen erscheinen. Die Red.

Betrag des von der Selbstinduction herrührenden Termes auf das Doppelte erhöhen zu müssen

Ich bin daher genöthigt, auf diesen Gegenstand noch einmal zurückzukommen, und will zunächst meine eigene Ableitung der in Rede stehenden Formel mittheilen, wesentlich wie ich sie bereits vor etwa vier Jahren niedergeschrieben habe.

Da Hr. Wild eine Stütze seiner Ansicht in einer Formel von Maxwell¹⁾ zu finden meint, so will ich zeigen, dass diese Formel entweder falsch²⁾ oder praktisch unbrauchbar ist. Bezüglich der Berechnungsweise des Hrn. Wild besteht aber, wie ich ausdrücklich hervorheben will, eine solche Alternative nicht, vielmehr ist sie einfach unrichtig.

Schliesslich werde ich die von mir schon in meiner früheren Arbeit kurz angedeutete Modification des Maxwell'schen Grundgedankens³⁾ etwas ausführlicher darlegen und auch von diesem anderen Ausgangspunkte meine Endformel nochmals ableiten.

Es sei im Anschluss an die Bezeichnung bei Maxwell A das Trägheitsmoment des schwingenden Magnetes.

$B(dq/dt)$ ein vom Luftwiderstande herrührender Term.

C die Directionskraft des Magnetes (incl. Torsion etc.).

G die Galvanometerconstante,

m das Moment des Magnetes,

γ die Stromstärke,

R der Widerstand des Stromkreises bei geschlossenem Multiplicator in absolutem Maasse,

L der Coëfficient der Selbstinduction.

φ der Ablenkungswinkel,

so ist für den geöffneten Multiplicator:

$$(1) \quad A \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + B \frac{d\varphi}{dt} + C\varphi = 0,$$

für den geschlossenen:

$$(2) \quad A \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + B \frac{d\varphi}{dt} + C\varphi = Gm\gamma.$$

1) Maxwell, Electricity and Magnetism 2. p. 363. Formel (17). 1873.

2) Dies war meine Ansicht 1882. l. c. p. 783. Anm.

3) l. c. p. 782.

Die Stromstärke γ ist ohne Rücksicht auf die Selbstinduction bestimmt durch:

$$(3) \quad R\gamma + Gm \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

welche Gleichung, mit (2) combinirt, auf:

$$(4) \quad R \left[A \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + B \frac{d\varphi}{dt} + C\varphi \right] + G^2 m^2 \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

führt.

Soll andererseits die Selbstinduction in Rechnung gezogen werden, so ist:

$$(5) \quad L \frac{d\gamma}{dt} + R\gamma + Gm \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

und nach Elimination von γ aus (2) und (5) in symbolischer Bezeichnung:

$$(6) \quad \left[R + L \frac{d}{dt} \right] \left[A \frac{d^2}{dt^2} + B \frac{d}{dt} + C \right] \varphi + G^2 m^2 \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Die particulären Lösungen von (1) sind bekanntlich von der Form:

$$(7) \quad \varphi = e^{-(\nu_0 + i\omega_0)t},$$

und nach Einsetzen in (1) folgt:

$$(8) \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \frac{B}{A},$$

$$(8) \quad \omega_0^2 + \alpha_0^2 = \frac{C}{A}.$$

Bedeutet ferner T_0 und λ_0 Schwingungsdauer und logarithmisches Decrement bei geöffnetem Multiplicator, so ist:

$$(10) \quad \alpha_0 = \frac{\lambda_0}{T_0}, \quad (11) \quad \omega_0 = \frac{\pi}{T_0}.$$

Ebenso ergibt sich durch Einführung von:

$$(12) \quad \varphi = e^{-(\alpha' + i\omega')t}$$

in die Gleichung (4):

$$(13) \quad \alpha' = \frac{1}{2A} \left(B + \frac{G^2 m^2}{R} \right) = \alpha_0 + \frac{G^2 m^2}{2AR},$$

$$(14) \quad \omega'^2 + \alpha'^2 = \frac{C}{A} = \omega_0^2 + \alpha_0^2.$$

Nenne ich weiter T' und λ' diejenigen Werthe der Schwingungsdauer und des logarithmischen Decrementes, welche bei geschlossenem Multiplicator stattfinden wür-

den, wenn derselbe frei von Selbstinduction wäre, so gelten die Relationen:

$$(15) \quad \alpha' = \frac{\lambda'}{T'}, \quad (16) \quad \omega' = \frac{\pi}{T'},$$

und es folgt aus (14) und (13):

$$(17) \quad \frac{\pi^2 + \lambda'^2}{T'^2} = \frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{T_0^2},$$

$$(17') \quad \alpha' = \frac{\lambda'}{T_0} \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda'^2}},$$

$$(18) \quad G^2 m^2 = 2AR[\alpha' - \alpha_0] = \frac{2AR}{T_0} \left[\lambda' \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda'^2}} - \lambda_0 \right].$$

Diese allgemein bekannten Formeln musste ich noch einmal hersetzen, um die weiteren Entwicklungen daran anschliessen zu können.

Meinem Verfahren zur Berücksichtigung der Selbstinduction liegt der einfache Gedanke zu Grunde, λ' durch das thatsächlich beobachtete log. Decr. λ auszudrücken und diesen Werth in (18) einzuführen. Um die Gleichung (6), in welcher der Extrastrom berücksichtigt ist, zu integrieren, setze ich:

$$(19) \quad q = e^{-\eta t}$$

und erhalte für ϱ die cubische Gleichung:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho^2 - 2\alpha_0\varrho + \alpha_0^2 + \omega_0^2 - \frac{G^2 m^2}{RA} \varrho \\ + \eta [-\varrho^3 + 2\alpha_0\varrho^2 - (\alpha_0^2 + \omega_0^2)\varrho] = 0, \end{array} \right.$$

worin die Coëfficienten mit Hülfe von (8) und (9) ausgedrückt sind, und der Kürze wegen:

$$(21) \quad \eta = \frac{L}{R}$$

geschrieben ist.

Die Gleichung (20) besitzt selbstverständlich (für den Fall des von mir benutzten Multipliers habe ich mich durch Ausrechnung davon überzeugt) eine reelle positive und zwei conjugirte complexe Wurzeln, die ich mit ϱ_1 , $\alpha + i\omega$, $\alpha - i\omega$ bezeichnen will, daher ist das allgemeine Integral der Gleichung (6):

$$(22) \quad q = M e^{-(\alpha + i\omega)t} + N e^{-(\alpha - i\omega)t} + P e^{-\eta t},$$

worin die Constanten M , N , P aus dem Anfangszustande zu bestimmen sind. Es sind nun die Wurzeln von (20) zu untersuchen.

Bis auf Grössen höherer Ordnung ist zunächst:

$$(23) \quad \varrho_1 = \frac{1}{\eta}.$$

Für $\eta = 0$ verwandelt sich nämlich die Gleichung (20) in eine quadratische, d. h. eine Wurzel von (20) wird $= \infty$, bei kleinen η — und um solche handelt es sich ja nur — wird also ϱ_1 sehr gross sein, und mit alleiniger Beibehaltung der höchsten Potenzen von ϱ_1 reducirt sich (20) auf:

$$\varrho_1^2 - \eta \varrho_1^3 = 0,$$

woraus sofort (23) folgt.¹⁾

Die beiden anderen Wurzeln $\alpha \pm i\omega$ werden sich von den für abwesende Selbstinduction geltenden $\alpha' \pm i\omega'$ nur um Grössen der Ordnung η unterscheiden.

Um die Differenz zu ermitteln, denke ich mir in (20) η um einen Zuwachs $\Delta\eta$ vermehrt und erhalte für den entsprechenden Zuwachs von ϱ :

$$\Delta\varrho \left[2\varrho - 2\alpha_0 - \frac{G^2 m^2}{RA} + \eta(-3\varrho^2 + 4\alpha_0\varrho - (\alpha_0^2 + \omega_0^2)) \right] \\ + \Delta\eta [-\varrho^3 + 2\alpha_0\varrho^2 - (\alpha_0^2 + \omega_0^2)\varrho] = 0.$$

Wende ich diese Formel auf den Ausgangswerth $\eta = 0$ an, welchem ϱ' entsprechen möge (es ist $\varrho' = \alpha' \pm i\omega'$), und schreibe η an Stelle von $\Delta\eta$, so kommt:

$$\Delta\varrho = \frac{\eta \varrho' [\varrho'^2 - 2\alpha_0 \varrho' + (\alpha_0^2 + \omega_0^2)]}{2 \left[\varrho' - \alpha_0 - \frac{G^2 m^2}{2RA} \right]} = \frac{\eta \varrho'^2 \frac{G^2 m^2}{RA}}{2 \left[\varrho' - \alpha_0 - \frac{G^2 m^2}{2RA} \right]},$$

oder mit Rücksicht auf (18):

$$(24) \quad \Delta\varrho = \frac{\eta \varrho'^2 (\alpha' - \alpha_0)}{\varrho - \alpha}.$$

Hierin ist $\varrho' = \alpha' \pm i\omega'$; wird dem entsprechend $\Delta\varrho = \Delta\alpha \pm i\Delta\omega$ gesetzt, so ergibt sich endlich durch Sonderung des Reellen und Imaginären:

1) Das durch genaue Auflösung von (20) erhaltene ϱ_1 unterschied sich von $1/\eta$ bei dem Breslauer Multiplikator noch nicht um 1 Procent.

$$(25) \quad \Delta \alpha = \gamma (\alpha' - \alpha_0) 2\alpha', \quad \Delta \omega = -\gamma (\alpha' - \alpha_0) \frac{(\alpha'^2 - \omega'^2)}{\omega'}.$$

Den folgenden Betrachtungen werde der specielle Fall zu Grunde gelegt, dass der Magnet aus der abgelenkten Stellung ohne Anfangsgeschwindigkeit, und ohne dass ein Strom im Multiplicator circulirt, seine Bewegung beginnt und dann sich selbst überlassen bleibt. Es ist daher für $t = 0$ zu setzen:

$$(26) \quad \varphi = \varphi_0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \gamma = 0.$$

Die allgemeine Lösung (22) der Differentialgleichung (6) schreibe ich in reeller Form:

$$(27) \quad \varphi = e^{-\alpha t} [c \cos \omega t + s \sin \omega t] + P e^{-\rho_1 t},$$

und erhalte aus (26) unter Hinzuziehung von (2):

$$(28) \quad c + P = \varphi_0,$$

$$(29) \quad -\alpha c + \omega s - P \rho_1 = 0,$$

$$(30) \quad \begin{cases} c[\alpha^2 - \omega^2] - s 2\alpha\omega + P[\rho_1^2 - 2\alpha_0 \rho_1 + \alpha_0^2 + \omega_0^2] \\ + (\alpha_0^2 + \omega_0^2) \varphi_0 = 0. \end{cases}$$

Die Elimination von s und c aus (30) mit Hülfe von (28) und (29) gibt:

$$(31) \quad \begin{cases} P[\rho_1^2 - 2\rho_1(\alpha + \alpha_0) + \alpha^2 + \omega^2 + \alpha_0^2 + \omega_0^2] \\ + \varphi_0[\alpha_0^2 + \omega_0^2 - \alpha^2 - \omega^2] = 0. \end{cases}$$

Da nach (14) $\alpha_0^2 + \omega_0^2 - \alpha'^2 - \omega'^2 = 0$ ist, wird der Coefficient von φ_0 in (31) der Ordnung γ , während wegen $\rho_1 = 1/\gamma$ der Coefficient von P der Ordnung γ^{-2} ist. Hieraus geht hervor, dass die Constante P der dritten Ordnung in γ wird, woher die Terme mit P in allen Formeln, welche nur φ und $d\varphi/dt$ enthalten, fortgelassen werden können. In der Formel für die Stromstärke tritt wegen P ein Glied der Ordnung γ auf, wie leicht aus (2) erhellt.

Nach (28) wird $c = \varphi_0$ (richtig bis auf γ^2 incl.), nach (29) $s = (\alpha \varphi_0 / \omega)$ (richtig bis auf γ incl.), also aus (27):

$$(32) \quad \varphi = \varphi_0 e^{-\alpha t} \left[\cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right],$$

ferner:

$$(33) \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\varphi_0 e^{-\alpha t} \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega} \sin \omega t,$$

und zwar sind in den beiden letzten Gleichungen nur Glieder mit ν^2 vernachlässigt.

Aus (33) folgt die wirkliche Schwingungsdauer (Zeit zwischen zwei successiven Umkehrpunkten):

$$(34) \quad T = \frac{\pi}{\omega}, \quad \text{also } \omega = \frac{\pi}{T}$$

und nach (32) wird die Elongation für $t = T$:

$$q_1 = -q_0 e^{-\alpha T},$$

sodass das thatsächlich beobachtete logarithmische Decrement ist:

$$(35) \quad \lambda = \alpha T, \quad \text{woher } \alpha = \frac{\lambda}{T}.$$

Es sei nun daran erinnert, dass α' , ω' , T' , λ' sich auf den Fall fehlender Selbstinduction bezogen, während bei Vorhandensein derselben α , ω , T , λ gelten. Es werde gesetzt:

$$\alpha = \alpha' + \Delta\alpha, \quad \omega = \omega' + \Delta\omega, \quad \lambda = \lambda' + \Delta\lambda, \quad T = T' + \Delta T,$$

so sind $\Delta\alpha$ und $\Delta\omega$ bereits durch (25) gegeben, ferner wird nach (34) und (35):

$$\frac{\Delta T}{T'} = -\frac{\Delta\omega}{\omega'}, \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda'} = \frac{\Delta\alpha}{\alpha'} + \frac{\Delta T}{T'} = \frac{\Delta\alpha}{\alpha'} - \frac{\Delta\omega}{\omega'}$$

und mit Einführung der Werthe von $\Delta\alpha$ und $\Delta\omega$:

$$(36) \quad \Delta\lambda = \lambda' \eta (\alpha' - \alpha_0) \frac{(\alpha'^2 + \omega'^2)}{\omega'^2} = \lambda' \eta (\alpha' - \alpha_0) \frac{(\pi^2 + \lambda'^2)}{\pi^2}.$$

Um zum Schlusse zu gelangen, erübrigt nur, in der Formel (18) λ' durch $\lambda - \Delta\lambda$ zu ersetzen. Hierdurch ergibt sich zunächst:

$$(37) \quad \frac{G^2 m^2}{RA} = \frac{2}{T_0} \left[\lambda \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} - \lambda_0 - \eta (\alpha' - \alpha_0) \lambda' \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda'^2}} \right].$$

Eigentlich ist (vgl. 18):

$$\alpha' - \alpha_0 = \frac{1}{T_0} \left\{ \lambda' \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda'^2}} - \lambda_0 \right\},$$

da aber der letzte Term von (37) schon den Factor η besitzt, kann darin für λ' auch λ geschrieben werden, und nun folgt, indem noch für η , L/R zurückgesetzt wird:

$$(38) \quad G^2 m^2 = \frac{2RA}{T_0} \left[\lambda \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} - \lambda_0 \right] \left[1 - \frac{L}{R} \frac{\lambda}{T_0} \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} \right].$$

Diese Formel ist aber identisch mit (39) meiner früheren Abhandlung.¹⁾

Unter den oben angenommenen Anfangsbedingungen erschien $e^{-\alpha t}$ in dem Ausdrucke der Ablenkung q mit einem Factor P der Ordnung η^3 multiplicirt.

Im allgemeinen liefert die Einführung von (22) in (2):

$$\frac{G^m}{A} \gamma = P[\rho_1^2 - 2\alpha_0 \rho_1 + \alpha_0^2 + \omega_0^2] + \dots;$$

sehe ich also von solchen Fällen ab, wo im Augenblicke $t=0$ ein ausserordentlich starker Strom, wie er in praxi kaum vorkommen dürfte, durch den Multiplicator gesandt wird, so wird P der Ordnung $1/\rho_1^2$, d. h. η^2 .

Bei einer Untersuchung, welche nur erste Potenzen von η berücksichtigt, wird daher in dem Ausdrucke (22) für q der letzte Term fortgelassen werden können. In dq/dt und γ wird dies aber im allgemeinen nicht mehr gestattet sein, vielmehr wird ein Glied erster, resp. nullter Ordnung in η von $Pe^{-\alpha t}$ resultiren. Diese Bemerkung ist besonders für die Bestimmung der Constanten aus den Anfangsbedingungen wichtig, denn $e^{-\alpha t}$ wird im Verlauf der Bewegung sehr bald unmerklich klein.

Ich will nun auf die Maxwell'sche Behandlung des Problemcs eingehen. Maxwell setzt von vornherein²⁾:

$$q = Ce^{-\alpha t} \cos(\omega t + \beta);$$

nach den eben gemachten Auseinandersetzungen ist dies für q erlaubt, führt aber im allgemeinen in dq/dt einen Fehler der Ordnung η , in der Stromstärke γ einen endlichen Fehler herbei.³⁾ Für die von mir gewählten Anfangsbedingungen ist die Maxwell'sche Annahme statthaft, wenn darauf verzichtet wird, γ bis η incl. richtig zu erhalten.

Das logarithmische Decrement λ und auch die Schwingungsdauer T nimmt Maxwell als direct beobachtet an und hat entsprechend den Gleichungen (34):

$$\omega = \frac{\pi}{T}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{T}.$$

1) l. c. p. 783.

2) l. c. p. 361, Formel (3).

3) resp. es wird unmöglich, den Anfangsbedingungen zu genügen.

In seiner Differentialgleichung (10) (Gl. (6) dieser Abhandlung) schreibt er $d/dt = -(\alpha + i\omega)$, d. h. er führt die Partiallösung $q = e^{-(\alpha + i\omega)t}$ ein und erhält dadurch seine Gleichung (13), welche mit meiner Gleichung (20) übereinkommt, wenn in letzterer ρ durch $\alpha + i\omega$ ersetzt wird.

Durch Spaltung in den imaginären und reellen Theil zerfällt die Gleichung in zwei, welche nach R aufgelöst ergeben:

$$(39) \quad R = \frac{G^2 m^2}{2A(\alpha - \alpha_0)} + \frac{L}{2} \left\{ 3\alpha - \alpha_0 - \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\alpha - \alpha_0} \right\}^1,$$

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} R &= \frac{G^2 m^2 \alpha}{A[\alpha^2 - \omega^2 + \alpha_0^2 + \omega_0^2 - 2\alpha\alpha_0]} \\ &+ L \frac{\alpha^3 - 3\alpha\omega^2 - 2\alpha_0(\alpha^2 - \omega^2) + \alpha(\alpha_0^2 + \omega_0^2)}{\alpha^2 - \omega^2 + \alpha_0^2 + \omega_0^2 - 2\alpha\alpha_0}, \end{aligned} \right.$$

woraus durch Gleichsetzung der rechten Seiten:

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} &G^2 m^2 [\alpha^2 + \omega^2 - \alpha_0^2 - \omega_0^2] \\ &= LA[(\alpha - \alpha_0)^4 + 2(\alpha - \alpha_0)^2(\omega^2 + \omega_0^2) + (\omega^2 - \omega_0^2)^2]. \end{aligned} \right.$$

Maxwell bezeichnet consequenter Weise diese Gleichung als „testing equation“, denn da er α_0 , ω_0 , α , ω durch Beobachtung gegeben, G , m , L , A als anderweitig ermittelt annimmt, so kann ihm diese Gleichung nur dazu dienen, die Genauigkeit seiner Beobachtungen zu prüfen.

Bis soweit besteht über die Auffassung Maxwell's kein Zweifel.

Jetzt lässt er eine Näherung eintreten, indem er in (41) die rechte Seite vernachlässigt. Daraus folgt:

$$(42) \quad \alpha^2 + \omega^2 - \alpha_0^2 - \omega_0^2 = 0.$$

Hiermit geht Maxwell in die rechte Seite von (39) hinein und erhält²⁾:

$$(43) \quad R = \frac{G^2 m^2}{2A(\alpha - \alpha_0)} + 2La.$$

Da er aber den aus (42) gewonnenen Näherungswerth von α nicht durch eine besondere Bezeichnung unterscheidet, so bleibt ungewiss, ob im ersten Gliede rechts von (43) α den Näherungswerth oder den strengen Werth bedeuten soll.

1) l. c. p. 363, Formel (14).

2) l. c. p. 363, Formel (17).

Im ersteren Falle wäre die Formel (43) augenscheinlich nicht richtig, denn da der Näherungswerth von α sich von dem strengen um eine Grösse der Ordnung L unterscheidet, so wäre ein Glied der Ordnung L unberücksichtigt geblieben, welches wegen des Nenners im ersten Term von (39) rechts auftritt.

Im anderen Falle wäre die Formel zwar richtig, aber praktisch unbrauchbar. Um dieselbe anwenden zu können, müsste nämlich α nach λ/T direct aus den Beobachtungen bestimmt sein, während bekanntlich schon bei einer mässigen Dämpfung eine Ermittlung der Schwingungsdauer T bei geschlossenem Multiplikator nicht mit genügender Schärfe ausführbar ist.

Seit W. Weber umgeht man diese Schwierigkeit, indem man T durch die gut beobachtbaren Grössen λ , λ_0 , T_0 (Schwingungsdauer bei offenem Multiplikator) ausdrückt. Unter Vernachlässigung der Selbstinduction geschieht dies nach Formel (17), was aber an Stelle derselben tritt, wenn die Selbstinduction berücksichtigt werden soll, bleibt erst zu untersuchen.

Hiermit ist gezeigt, dass die Behandlung des Problems durch Maxwell nicht zu einem verwerthbaren Endresultate geführt hat.

Indessen lässt sich durch eine von mir schon früher kurz angedeutete Modification des Maxwell'schen Grundgedankens leicht zum Ziele gelangen.

Ich betrachte als gegeben die scharf messbaren Grössen λ , λ_0 , T_0 , während die Schwingungsdauer bei geschlossenem Multiplikator, T zunächst unbekannt ist und erst im Laufe der Untersuchung gefunden werden soll. Ebenso wie oben setze ich:

$$(44) \quad \alpha_0 = \frac{\lambda_0}{T_0}, \quad \omega_0 = \frac{\pi}{T_0}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{T}, \quad \omega = \frac{\pi}{T},$$

und erhalte durch dieselben Rechenoperationen die Gleichungen (39), (40), (41).

Die Gleichung (41) gewinnt aber eine ganz andere Bedeutung, wie bei Maxwell; sie ist als Bestimmungs-

gleichung für T aufzufassen¹⁾, welches nach Benutzung der Relationen (44) darin einzig unbekannt bleibt.

Es wäre nun aus (41) T zu entnehmen, mit Hülfe desselben nach (44) α und ω zu berechnen, und hiermit in (39) hineinzugehen.

Bequemer ist folgendes Näherungsverfahren.

Es sei T_1 derjenige Werth von T , welcher aus (41) unter Vernachlässigung von L folgt, und α_1, ω_1 die zugehörigen Werthe von α und ω , so ist nach (41):

$$(45) \quad \alpha_1^2 + \omega_1^2 = \alpha_0^2 + \omega_0^2.$$

Wird gesetzt:

$$(46) \quad T = T_1 + \delta T, \quad \alpha = \alpha_1 + \delta \alpha, \quad \omega = \omega_1 + \delta \omega,$$

so folgt aus (44) mit Rücksicht darauf, dass λ hier eine gegebene Grösse ist:

$$(47) \quad \begin{cases} \delta \omega = -\frac{\pi}{T_1^2} \delta T = -\frac{\omega_1}{T_1} \delta T, & \delta \alpha = -\frac{\lambda}{T_1^2} \delta T = -\frac{\alpha_1}{T_1} \delta T, \\ \delta \omega = \frac{\omega_1}{\alpha_1} \delta \alpha. \end{cases}$$

Da die rechte Seite von (41) schon den Factor L hat, so kann darin statt α und ω einfach α_1 und ω_1 geschrieben werden, links sind dafür $\alpha_1 + \delta \alpha$, resp. $\omega_1 + \delta \omega$ einzusetzen, und mit Hinzuziehung von (47) ergibt sich nach leichten Reductionen:

$$(48) \quad \delta \alpha = \frac{2LA}{G^2 m^2} \alpha_1 (\alpha_1 - \alpha_0)^2.$$

Die Formel (39), ähnlich unter Fortlassung von L^2 entwickelt, liefert:

$$(49) \quad \begin{cases} R = \frac{G^2 m^2}{2A(\alpha_1 - \alpha_0)} - \frac{G^2 m^2}{2A(\alpha_1 - \alpha_0)^2} \delta \alpha + 2L\alpha_1 \\ = \frac{G^2 m^2}{2A(\alpha_1 - \alpha_0)} - L\alpha_1 + 2L\alpha_1 = \frac{G^2 m^2}{2A(\alpha_1 - \alpha_0)} + L\alpha_1. \end{cases}$$

Nun ist aber nach (45):

$$(50) \quad \frac{\pi^2 + \lambda^2}{T_1^2} = \frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{T_0^2}, \quad T_1 = T_0 \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda^2}{\pi^2 + \lambda_0^2}},$$

also:

$$(51) \quad \alpha_1 = \frac{\lambda}{T_0} \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}},$$

1) S. meine frühere Abh. I. c. p. 782.

und endlich nach Einsetzen in (49):

$$G^2 m^2 = \frac{2 R A}{T_0} \left[\lambda \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} - \lambda_0 \right] \left[1 - \frac{L}{R T_0} \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} \right].$$

Dies ist aber wieder meine alte Formel (38).

Es könnte im ersten Augenblicke befremden, dass die hier erhaltenen Correctionsgrößen $\delta\alpha$ und $\delta\omega$ nicht mit den in (25) definirten $\Delta\alpha$ und $\Delta\omega$ identisch sind. Der scheinbare Widerspruch löst sich aber durch die Ueberlegung, dass das Näherungsverfahren in beiden Ableitungen ein ganz verschiedenes ist. Infolge dessen differiren die ersten Näherungswerthe α' , ω' einerseits und α_1 , ω_1 andererseits um Größen erster Ordnung in L , ebenso demgemäss auch die Zusatzterme zur Correction auf α und ω . Man vergleiche die Definitionen von T' und T_1 ((17) und (50)), aus denen sofort der Unterschied von $\omega' = \pi/T'$ und $\omega_1 = \pi/T_1$ hervorgeht, ferner (17) mit (51). Der innere Grund dieses Verhaltens liegt darin, dass bei der zweiten Behandlung für λ sofort der beobachtete Werth eingeführt und festgehalten wird, während bei der ersten zunächst λ' auftritt, welches ohne Selbstinduction gelten würde.

Darmstadt, den 9. April 1884.

XII. *Zwei verschiedene Formen eines selbstthätigen Disjunctors; von F. Himstedt.*

(Aus den Ber. der Naturforsch. Ges. zu Freiburg i. Br. Bd. 8, Heft 2.
mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Bei Gelegenheit einer Arbeit, mit welcher ich noch beschäftigt bin, bedurfte ich eines Disjunctors, der den folgenden Anforderungen genügte. Derselbe sollte 1) längere Zeit unverändert fortarbeiten, 2) eine genaue Zählung der Unterbrechungen per Secunde gestatten und vor allem 3) einen stets sicheren Contact bei gleichem Leitungswiderstande herstellen.

Der nächstliegende Gedanke war, einen Disjunctor von

Dove'scher Construction oder auch mit Quecksilbercontacten mittelst eines Uhrwerkes in Rotation zu versetzen. Von den mir zu Gebote stehenden Uhrwerken besass jedoch keines die verlangte Genauigkeit, nämlich eine bis auf mindestens $\frac{1}{10}\%$ gleichmässige Geschwindigkeit. Ich habe später einen Rotationsapparat mit der gewünschten Gleichmässigkeit gefunden, will aber, bevor ich von demselben rede, eine andere Anordnung eines Disjunctors beschreiben

I. Wenn man in bekannter Weise zwei electromagnetische Stimmgabeln durch denselben galvanischen Strom zu treiben sucht, wobei also dieser durch die Unterbrechungs- vorrichtung an der ersten Stimmgabel Nr. I intermittirend gemacht, die Electromagnete beider Stimmgabeln Nr. I und Nr. II in derselben Weise umfließt, so findet man bekanntlich, dass Nr. II nur dann mitschwingt, wenn ihr Eigenton von der von Nr. I um nicht mehr als höchstens ± 4 Schwingungen per Secunde abweicht. Des weiteren ist bekannt, dass trotz jener möglichen Verschiedenheit in den Eigentönen bei der erwähnten Anordnung Nr. II doch stets die gleiche Anzahl von Schwingungen macht wie Nr. I, in ihrer Bewegung aber gegen diese einen Phasenunterschied zeigt. Besitzt Nr. II den höheren Eigenton, so eilt sie voran, ist sie tiefer, so bleibt sie hinter Nr. I in der Phase zurück. Der Phasenunterschied kann bis zu einer halben Schwingung betragen.

Es ist nun wohl ohne weiteres klar, wie man diese bekannte Erscheinung verwerthen kann, um zwei Stimmgabeln als Disjunctor zu benutzen. Nr. I trägt ausser der Contact- vorrichtung, durch welche der beide Stimmgabeln treibende Strom intermittirend gemacht wird, eine zweite, von jener isolirte Contactvorrichtung, durch die der inducirende Strom unterbrochen und geschlossen wird. Nr. II erhält eine Contactvorrichtung, welche in den inducirten Stromkreis eingeschaltet ist, und je nachdem man mit Schliessungs- oder Oeffnungsinductionsströmen arbeiten will, verschiebt man ein Laufgewicht so, dass der Eigenton von Nr. II höher oder tiefer ist als der von Nr. I.

Will man quantitative Messungen machen und sich über-

zeugen, dass der inducirte Strom während des Contactes von Nr. II zu voller Ausbildung gelangt, so verschiebt man zunächst das Laufgewicht auf Nr. I so weit, dass bei weiterer Verschiebung Nr. II nicht mehr mitschwingen würde. Sind die Contacte bei beiden Stimmgabeln so gestellt, dass sie in der Ruhelage nur ganz leicht berühren, so wird, wenn bei der Bewegung Nr. II in der Phase voraneilt, Nr. I seinen Contact beginnen, wenn bei Nr. II schon die Hälfte der Contactdauer verflossen ist. Man erhält die Schliessungsinductionsströme, die, durch ein passendes Galvanometer geschickt, eine constante Ablenkung ergeben werden. Verschiebt man jetzt das Laufgewicht so, dass dadurch der Eigenton von Nr. II tiefer wird, so vergrössert man dadurch die Dauer des gleichzeitigen Contactes von Nr. I und Nr. II, der Inductionsstrom hat mithin jetzt mehr Zeit zu seiner vollen Ausbildung, und man beurtheilt an dem unverändert gebliebenen oder grösser gewordenen Galvanometeraussschlage, ob der inducirte Strom schon zur vollen Ausbildung gekommen war oder nicht. Um zu beurtheilen, ob der inducirende Strom Zeit gefunden hat, zu voller Stärke anzuwachsen, vergrössert man bei dem Contacte an Nr. I die Contactdauer mehr und mehr und beobachtet wieder jedes mal die Ablenkung des Galvanometers durch die Inductionsströme.

Alle diese Manipulationen lassen sich sehr schnell ausführen, und arbeitet der Disjuncter dann mit grosser Zuverlässigkeit unbeschränkte Zeit hindurch, solange man für rein gehaltene Quecksilbercontacte sorgt. Dass Platincontacte nicht immer gleiche Berührung mit gleichem Widerstande geben, ist, glaube ich, allgemein anerkannt; die besten Resultate habe ich mit Bürsten aus feinem Platindraht gegen Platinblech erhalten, doch waren Stromschwankungen von etwa $\frac{1}{2}\%$ der Gesamtintensität nie zu beseitigen. Für den die Stimmgabeln treibenden Strom sind solche Schwankungen ohne Belang, selbst wenn dieselben 5% , ja noch mehr betragen, habe ich nicht die leiseste Störung in dem Gange der Stimmgabel constatiren können. Als beste Contacte, die einzigen, mit denen ich mehrere Stunden hintereinander vollkommen constante Ablenkungen erhalten habe,

möchte ich Nähnadeln mit verkupfter und amalgamirter Spitze in Quecksilber empfehlen. Bei längerem Gebrauche empfiehlt sich die Anwendung der bekannten Spülcontacte (darüberfliessender Alkohol, eventuell Wasser) oder ein darüber streichender Strom von Wasserstoff oder Stickstoff. Kohlensäure schmutzt bei stärkeren Strömen, vielleicht infolge von Zersetzung. Um jede Aenderung des Quecksilberniveaus zu vermeiden, habe ich das Quecksilbergefäss mit einem sehr weiten Gefäss voll Oel communiciren lassen.

Die vorstehend beschriebene Anordnung eines Disjunctors hat nur eine Unbequemlichkeit, der Apparat ist ausserordentlich empfindlich gegen Erschütterungen. Trotzdem ich die Stimmgabeln an eine Steinplatte angeschraubt hatte, die in eine ca. 1 m dicke Wand eingegypst war, machte sich doch jede Erschütterung durch kleine Stromschwankungen bemerkbar, und wenn es sich um äusserste Genauigkeit handelte, konnte ich nur zur Nachtzeit damit beobachten.

II. Einen allen Anforderungen für quantitative Messungen genügenden Disjunctur, der mit vollkommener Sicherheit arbeitet und ausserdem sehr bequem zu handhaben ist, habe ich unter Benutzung des phonischen Rades von Paul la Cour¹⁾ erhalten. Ich kann das phonische Rad für alle die Fälle, in denen es sich bei geringer Arbeitsleistung um eine sehr gleichmässige Bewegung handelt, wegen seiner einfachen und sicheren Handhabung sehr empfehlen. Für die Construction möchte ich als besonders wichtig hervorheben, dass die Axe gar nicht wackeln darf, das Rad sehr gut centrirt sein muss, und die Zähne desselben sehr nahe an den Polen des Electromagnets vorbeigehen müssen. Man vermeidet hierdurch die starken Ströme beim Treiben, und erleichtert dies sowohl das Ingangsetzen als auch die dauernde Bewegung sehr. Ich treibe ein phonisches Rad, dessen Eisenscheibe einen Durchmesser von 10 cm, eine Dicke von 0,3 cm hat und im ganzen mit der Quecksilbercapsel ein Gewicht von 0,95 kg mit einem einzigen Bunsen von 12 cm Höhe.

1) Paul la Cour, Beibl. 2. p. 584. 1878; und Paul la Cour, das phonische Rad, deutsch v. J. Kareis, Leipzig 1880.

Ferner ist es gut, wenn das Quecksilber in der Capsel in mehrere Rinnen vertheilt ist und an Masse mindestens der ganzen übrigen Masse des Rades gleichkommt. Man hat dann nur nöthig, dem Rade eine Rotationsgeschwindigkeit zu ertheilen, die grösser ist als die durch die Schwingungszahl der Stimmgabel bedingte, und das Rad geht ganz von selbst in die gleichförmige Bewegung über. Ich bin Hrn. Paul la Cour für freundliche Uebersendung eines Rades zu Dank verpflichtet, um so mehr, als ich bei den selbst verfertigten Rädern die erwähnten Punkte nicht genügend beachtet hatte, und es mir deshalb jedes mal nur mit Mühe und nach längerem Probiren gelang, das Rad in gleichmässige Rotation zu versetzen.

Der eigentliche Disjunctor besteht aus einer an der verticalen Rotationsaxe centrirt befestigten horizontalen Scheibe, an welcher vier vertical nach unten stehende Schneiden befestigt sind, die gegen einander innerhalb enger Grenzen mittelst Schrauben verstellt werden können. Dieselben sind amalgamirt, und tauchen zwei derselben bei der Rotation dauernd je in eine Quecksilberrinne, zwei schlagen durch Quecksilberkuppen. Zu dem Zwecke sind in einem mittelst Stellschrauben horizontal gestellten Brette vier Rinnen eingedreht von 3 mm Breite, 5 mm Tiefe und den Halbmessern von 3 cm, 4 cm, 10 cm und 11 cm, die beiden ersteren sind ganz mit Quecksilber gefüllt, die beiden letzteren sind je nach Bedarf in mehr oder weniger gleiche Segmente getheilt, die ungeraden Nummern derselben mit Paraffin ausgegossen, die geraden mit Quecksilber so angefüllt, dass die Kuppen über die Ränder emporragen. Die Verbindung der einzelnen Theile in den Stromkreisen bedarf keiner weiteren Beschreibung. Dadurch, dass die Rinnen so schmal genommen werden, erreicht man, dass die durchschlagenden Schneiden nur äusserst wenig Quecksilber verspritzen. Ich hatte anfangs alle Quecksilberabtheilungen eines Ringes mit einem grossen Reservoir communiciren lassen, um gleiches Niveau zu sichern, doch hat sich diese Vorsichtsmaassregel als unnöthig erwiesen. Ich habe den Disjunctor volle vier Stunden arbeiten lassen bei einer Stromstärke von ca. 0.2 Ampère, ohne die geringste

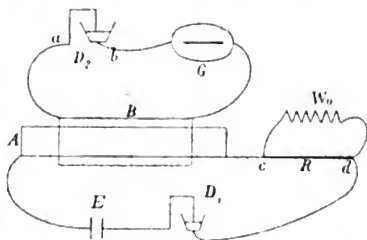
Störung zu beobachten. Dass man nicht mehr als zwei bis drei Umdrehungen per Secunde nehmen wird, leuchtet von selbst ein, will man die Zahl der Unterbrechungen vergrössern, so vergrössert man praktischer die Anzahl der Quecksilberkuppen.

Freiburg i. Br. Physik. Inst.

XIII. Ueber eine Methode zur Bestimmung des Ohm; von E. Himstedt.

(Aus den Ber. der Naturforsch. Ges. zu Freiburg i. Br. Bd. 8, Heft 2, mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

I. Die Methode ist die von Kirchhoff. Es seien gegeben zwei galvanische Spiralen A und B . A sei mit einer Stromquelle E , einem Stromunterbrecher D_1 und zwei parallel geschalteten Widerständen R und W_0 , von denen R der in absolutem Maasse zu messende ist, zu dem primären Stromkreise verbunden. B mit einem Galvanometer G und einem zweiten Stromunterbrecher D_2 bilde den inducirten Kreis. Die beiden Stromunterbrecher bilden zusammen einen Disjunctur, welcher gestattet, entweder die Schliessungs- oder die Oeffnungsinductionsströme allein auf das Galvanometer wirken zu lassen.



Wird der primäre Strom n -mal in der Secunde unterbrochen und wieder geschlossen, so gehen bei Einschaltung des Disjunctors n Inductionsströme durch das Galvanometer und üben auf die Nadel dieses, wenn ihre Schwingungsdauer gross genug ist, in ihrer Gesamtheit dieselbe Wirkung aus, wie ein constanter Strom von der Intensität:

$$i_1 = \frac{n \cdot V \cdot I_1}{w_1}.$$

Hierin bezeichnet V das Potential der Spiralen aufeinander, I_1 die Intensität des primären Stromes, w_1 den Widerstand des inducirten Stromkreises. Sei infolge dieser Ströme die Galvanometernadel um den Winkel α_1 abgelenkt und der Reductionsfactor des Galvanometers G , so haben wir die Gleichung:

$$(I) \quad i_1 = \frac{n \cdot V \cdot I_1}{w_1} = G \cdot \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Es werde jetzt der Disjunctur angehalten, der primäre Stromkreis dauernd geschlossen und der Widerstand W_0 ersetzt durch den der Leitung des zweiten Stromkreises, indem die Enden a und b an c und d angelegt werden, dann fließt durch das Galvanometer ein Strom:

$$i_2 = \frac{R \cdot I_2}{w_2},$$

wo I_2 die Intensität des Hauptstromes, w_2 gleich $w_1 + R$ ist. Ist die Galvanometerablenkung jetzt α_2 , so ist:

$$(II) \quad i_2 = \frac{R \cdot I_2}{w_2} = G \cdot \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Haben wir ein constantes Element und ist $W_0 = w_1$, so wird $I_2 = I_1$. Aus (I) und (II) ergibt sich dann:

$$(III) \quad R = n \cdot V \cdot \frac{w_2}{w_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1}.$$

Ist die Spirale A ein unendlich langes Solenoid vom Querschnitt F mit nur einer Windungslage, in welcher k Windungen auf der Längeneinheit nebeneinander liegen, und besteht B aus im ganzen b Windungen, so ist:

$$(III_a) \quad \begin{cases} V = 4 \pi k \cdot b \cdot F \\ R = 4 \pi k \cdot b \cdot n F \cdot \frac{w_2}{w_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1}. \end{cases}$$

Ueber die Bestimmung der Zahlen k und b bedarf es keiner weiteren Bemerkung.

Die Bestimmung von n kommt bei Anwendung des von mir beschriebenen, durch das phonische Rad getriebenen Disjunctors¹⁾ auf die Ermittlung der Schwingungszahl einer

1) Himstedt, Ber. d. Naturf. Ges. zu Freiburg i. Br. 8. Heft 2. 1884. u. Wied. Ann. 22. p. 276. 1884.

electro-magnetisch getriebenen Stimmgabel hinaus, also auf eine Grösse, die sich ohne Mühe mit der geforderten Genauigkeit ermitteln lässt.

Wenn, wie vorausgesetzt, das Solenoid nur eine Windungslage hat, so lässt sich F mit derselben Schärfe direct ausmessen, wie die Fläche einer Tangentenbusssole.

Das Verhältniss $\operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2$ setzt im allgemeinen die Kenntniss des Scalenabstandes voraus. Wählt man aber von vorn herein alle Grössen so, dass α_1 sehr nahe gleich α_2 , so wird mit genügender Annäherung $\operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 = s_1 : s_2$, wo s_1 und s_2 direct die Ablesungen in Scalentheilen der Fernrohrscala sind.

Als weitere Vortheile der beschriebenen Anordnung sei es mir gestattet, noch die folgenden Punkte hervorzuheben.

Die Summation der inducirten Ströme in ihrer Wirkung auf das Galvanometer ermöglicht es, mit so schwachen Strömen zu arbeiten, dass eine Erwärmung der Widerstände durch den Strom von vorn herein ausgeschlossen ist. Infolge eben derselben Einrichtung beobachtet man am Galvanometer nur die constant gewordenen Ablenkungen, und es fällt die Bestimmung der Galvanometerfunction vollständig weg. Endlich darf als Vorzug der Methode angeführt werden, dass dieselbe unabhängig ist vom Erdmagnetismus. Derselbe fällt seinem absoluten Werthe nach aus dem Endresultate heraus, und die Variationen desselben bedürfen keiner besonderen Berücksichtigung, da die einzelnen Beobachtungen in wechselnder Reihenfolge und so schnell hintereinander angestellt werden können, dass der ganze mit dem Erdmagnetismus arbeitende Theil der Beobachtungen in höchstens 5—10 Minuten beendigt sein kann.

Nachdem ich den vorstehenden Plan zu einer absoluten Widerstandsmessung schon vollständig ausgearbeitet und auch schon die ersten Versuche über die Construction eines die Durchführung der Methode ermöglichenden Disjunctors begonnen hatte, an deren Ausführung ich leider lange Zeit vollständig verhindert war, sind die Protocolle über die Sitzungen der internationalen Conferenz zur Be-

stimmung der electrischen Einheiten in Paris erschienen, und sind in diesen die Einzelheiten auch der vorliegenden Methode fast sämmtlich aufgeführt und besprochen. Insbesondere findet sich in den Annexen zu jenen Protocollen ein Auszug einer Arbeit des Hrn. Roiti¹⁾, in welcher eine Methode empfohlen wird, die der oben angegebenen in allen wesentlichen Punkten gleich ist. Hr. Roiti schlägt die Benutzung eines neutralen, in sich zurücklaufenden Solenoids vor. Ich glaube, dass die Herstellung eines solchen von genügender Gleichförmigkeit auf grosse Schwierigkeiten stossen wird, wie solches auch schon in jenen Sitzungsprotocollen sich ausgesprochen findet.

In einem Punkte habe ich gegenüber Hrn. Roiti wohl die Methode wesentlich gefördert, indem ich nämlich einen Disjunctor²⁾ angegeben habe, der mit der bei den Messungen erforderlichen Sicherheit und Genauigkeit arbeitet, und ohne den die ganze Methode unausführbar sein würde.

II. Die beschriebene Methode lässt sich bis zu einem gewissen Grade auch ohne den immerhin nicht unbedeutenden Aufwand an Mitteln, den eine absolute Widerstandsmessung erfordert, auf ihre Brauchbarkeit prüfen, im speciellen sich darthun, dass der Disjunctor, auf dessen Anwendung die ganze Methode beruht, den gestellten Anforderungen in jeder Beziehung genügt.

Löst man die Gl. (III) für V/R auf, so wird:

$$(IV) \quad \frac{V}{R} = \frac{1}{n} \cdot \frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \text{Const.}$$

Variirt man die Grössen rechter Hand, unter welchen die Stromintensität mit inbegriffen ist, zwischen möglichst weiten Grenzen und erhält gut übereinstimmende Werthe für V/R , so spricht dies für die Brauchbarkeit, da ja hierbei ganz dieselben Operationen und Beobachtungen auszuführen

1) Die Arbeit selbst ist schon am 30. April 1882 Atti di Torino erschienen. Vgl. Beibl. 6. p. 815, 1882. Hr. G. Wiedemann hatte die Freundlichkeit, mir später zu einer Einsicht in einen Separatabdruck zu verhelfen.

2) l. c. p. 276.

sind, wie bei der absoluten Widerstandsmessung selbst, mit alleiniger Ausnahme der Bestimmung des Querschnittes des unendlich langen Solenoides, eine Messung, die ich der geforderten Genauigkeit entschieden für fähig erachte.

Ich habe diese Probe wirklich durchgeführt, und zwar in folgender Weise. Zuerst wurde w_1/w_2 bestimmt, dann abwechselnd nach Gl. (II) $\operatorname{tg} \alpha_2$ und nach Gl. (I) $\operatorname{tg} \alpha_1$ beobachtet, im ganzen fünf-, resp. viermal, dann wieder w_1/w_2 bestimmt. Während der ganzen Dauer des Versuches schrieb die das phonische Rad und damit den Disjunctor treibende Stimmgabel ihre Schwingungen auf eine rotirende berusste Trommel, auf welche zu Anfang und zu Ende der Beobachtungen von einem Funkeninductorium je drei Funken übersprangen, die betreffenden Secunden markirend.

Die Intensität des Hauptstromes, resp. inducirenden Stromes wurde von etwa 0,001 Ampère bis etwa 0,1 Ampère geändert. Diese Angabe beruht auf roher Schätzung aus electromotorischer Kraft und Widerstand. s_1 ist der Ausschlag in Scalentheilen, $\operatorname{tg} \alpha_1/\operatorname{tg} \alpha_2$ ist das auf Bogen corrigirte Verhältniss¹⁾ s_1/s_2 . Die Aenderungen von w_1 und damit die von w_2 sind aus der Tabelle zu ersehen, w_1/w_2 wurde so bestimmt, dass w_1 und w_2 mit demselben w_3 verglichen wurden.

Bei n sind verhältnissmässig enge Grenzen für ein Variiren gesteckt, denn n darf nicht zu gross sein, damit die Inductionsströme zu voller Ausbildung gelangen und andererseits nicht zu klein, da sonst die Schwingungsdauer des Galvanometers unbequem gross genommen werden muss. Dieselbe betrug ca. 18 Secunden. Der Magnet war durch Toepler'sche Luftdämpfung stark gedämpft.

Um auch R ändern zu können, ohne die Vergleichbarkeit der Werthe von V/R zu gefährden, stellte ich mir einen Widerstand $R_1 = 1,0027 R$ dar und substituirte dann $R_1 + R = 2,0027 R$ für R in der Leitung.

1) Zu dieser Correction genügt ein angenäherter Werth des Scalenabstandes.

$$R = 0,98.$$

	n	w_1	$\frac{w_1}{w_2}$	s_1	$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2}$	$\frac{V}{R \cdot 10^3}$
1	8,1399	108,13	0,9910	232,10	1,0050	12235
2	8,1399	108,13	0,9910	404,35	1,0053	12239
3	8,1399	481,03	0,9980	181,55	0,9981	12237

$$R_1 + R = 2,0027 \cdot R.$$

	n	w_1	$\frac{w_1}{w_2}$	s_1	$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2}$	$\frac{V}{R \cdot 10^3}$
1	16,6365	914,85	0,9979	247,63	1,0186	12236
2	16,6365	2240,35	0,9991	379,25	1,0171	12233
3	16,6365	4532,70	0,9996	392,05	1,0169	12237

Ich hoffe, in der nächsten Zeit die Mittel zu erhalten, nach der angegebenen Methode eine Bestimmung des Ohm auszuführen.

Physik. Inst. Freiburg i. B., Februar 1884.

XIV. *Erwiderung auf die Bemerkungen des Hrn. A. von Waltenhofen zu meinen Untersuchungen über die Magnetisirungsfuction des Stahles; von Hugo Meyer.*

Hr. A. v. Waltenhofen hat kürzlich¹⁾ zu meinen Untersuchungen, die Magnetisirungsfuction des Stahles betreffend²⁾, einige Bemerkungen gemacht, die mich zu folgender Erwiderung veranlassen.

Wenn ich in meinen bezüglichlichen Arbeiten die Aufsätze des Hrn. v. Waltenhofen „vollständig ignorirte“, so geschah das nicht etwa, weil mir Hrn. v. Waltenhofen's zahlreiche und umfassende Untersuchungen über den Magnetismus des Stahles unbekannt gewesen wären, sondern vielmehr deshalb, weil sie zu meinen Untersuchungen in keinem directen Zu-

1) A. v. Waltenhofen, Wied. Ann. 20. p. 835. 1883.

2) H. Meyer, Wied. Ann. 18. p. 233 u. 19. p. 849. 1883.

sammenhang stehen. Während nämlich Hr. v. Waltenhofen mit magnetisirenden Kräften arbeitete, welche von der Mitte der zu prüfenden Stäbe nach den Enden hin abnahmen, habe ich stets im homogenen magnetischen Felde operirt. Es sind demnach die Ergebnisse der einen und der anderen Arbeiten nicht ohne weiteres vergleichbar.

Hr. v. Waltenhofen behauptet zunächst, er habe „den Satz von der wachsenden Magnetisirungsfuction“ schon vor zwanzig Jahren ausgesprochen, „und zwar in einer Form, welche nicht nur angibt, dass, sondern auch wie die Magnetisirungsfuction des Stahles wächst.“ Dieser Satz soll unter seinem Namen in Wiedemann's Galvanismus, in Müller-Pfaundler's und in Pisko's Lehrbuch übergegangen sein. Ich erlaube mir, dieses zu bestreiten. Allerdings hat Hr. v. Waltenhofen für die Abhängigkeit des magnetischen Momentes y eines Stahlstabes von der magnetisirenden Kraft x die empirische Formel:

$$(1) \quad y = kx^{\frac{1}{3}}$$

aufgestellt, worin k eine Constante bezeichnet, welche ich im Folgenden durch k_W von der Neumann'schen Magnetisirungsfuction k_N unterscheiden will. Diese Formel findet sich wieder bei Wiedemann und Müller-Pfaundler (das Lehrbuch von Pisko kenne ich nicht), aber an keiner Stelle, auch nicht in den früheren Arbeiten des Hrn. v. Waltenhofen ist aus diesem Ausdruck eine Folgerung auf die Aenderung der Magnetisirungsfuction mit der magnetisirenden Kraft gezogen worden. Erst in seinen kürzlich erschienenen „Bemerkungen“ hat Hr. v. Waltenhofen diesen Schritt gethan, dabei aber, wie sich sofort zeigen wird, die Magnetisirungsfuction in einem von dem gewöhnlichen Gebrauche abweichenden Sinne definirt.

Die Neumann'sche Magnetisirungsfuction ist das magnetische Moment eines unendlich gestreckten Cylinders oder eines Ringes¹⁾ von der Einheit des Volumens, welcher durch die überall constante, seiner Axe parallele Krafteinheit magnetisirt wird. Diese Function habe ich in meinen frü-

1) E. Riecke, Wied. Ann. 13. p. 488. 1881.

heren Aufsätzen durch k bezeichnet, ich nenne sie jetzt aus dem eben bezeichneten Grunde k_N . Hiernach ist es ein Irrthum, wenn Hr. v. Waltenhofen sagt: „Die Magnetisirungsfunktion $y/x = kx^{\frac{1}{2}}$ ist eben die von Hrn. H. Meyer mit k bezeichnete Grösse.“ Nach meiner Bezeichnung ist vielmehr:

$$(2) \quad v \cdot \gamma = \frac{y}{x} = k_W x^{\frac{1}{2}},$$

wenn wir annehmen dürfen, dass die Formel (1) auch in dem Falle ihre Gültigkeit behält, dass die magnetisirende Kraft überall constant ist. Die Function γ ist die Magnetisirungsfunktion eines dem betreffenden Stahlstabe ähnlichen Elementes von der Volumeneinheit; mit dieser Function hängt die Neumann'sche Constante zusammen durch:

$$(3) \quad \gamma = \frac{k_N}{1 + k_N P},$$

wo P eine von den Dimensionen des Stabes abhängende Constante ist; für einen unendlich gestreckten Cylinder und den Ring wird sie Null. Daraus ergibt sich dann für den Zusammenhang der Functionen k_N und k_W die Relation:

$$(4) \quad k_N = \frac{k_W x^{\frac{1}{2}}}{v - P k_W x^{\frac{1}{2}}} \quad \text{oder:} \quad (5) \quad k_W = \frac{v \gamma}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{v}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{k_N}{1 + k_N P}.$$

Da k_W eine endliche Constante sein soll, so liefert die Formel (4) für $x = 0$ auch $k_N = 0$, während nach den bisherigen Erfahrungen bei allen magnetischen Körpern k_N für eine verschwindende magnetisirende Kraft einen positiven, von Null verschiedenen Werth besitzt.

Ist ferner das v. Waltenhofen'sche Gesetz (1) allgemein gültig für Werthe der magnetisirenden Kraft, welche von Null verschieden sind, so muss, wenn man aus den bekannten Werthen von k_N , P , v oder von γ , v für beliebige Werthe von x innerhalb gewisser Grenzen, nach Formel (5) k_W berechnet, diese Grösse merklich constant sein.

Um dieses zu prüfen, habe ich zunächst aus meinen früher mitgetheilten Beobachtungen die Grösse k_W für die damals benutzten magnetisirenden Kräfte $x = 1,889$ und $x = 3,630$, welche unterhalb der oberen Grenze liegen, be-

rechnet und die Resultate für $0,01 \times k_W$ in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Stab Nr.	Stahlsorte I		Stahlsorte II		Stahlsorte III	
	$x = 1,889$	$x = 3,630$	$x = 1,889$	$x = 3,620$	$x = 1,889$	$x = 3,630$
1	294	247	241	200	283	235
2	347	290	272	227	332	276
3	406	341	312	260	384	318
4	316	266	374	310	445	375
5	277	229	282	235	248	212
6	310	257	309	258	285	240
7	158	130	113	92	166	138
8	177	144	126	103	180	152
9	183	152	133	110	192	165

Bei keinem dieser 27 Stäbe ist also k_W constant, es ist vielmehr ausnahmslos k_W kleiner für die grössere magnetisirende Kraft.

Dasselbe Resultat habe ich bei der Berechnung der von Rowland¹⁾ an Stahlringen ausgeführten Beobachtungen erhalten. Ich gebe in der nachfolgenden Tabelle für die magnetisirenden Kräfte x die Neumann'sche Constante k_N und den Quotienten $k_W/v = k_N/x^3$, wie sie aus Rowland's Beobachtungen folgen.

Bessemer Steel, Normal			Stubb's Steel Wire, Normal		
x	k_N	$\frac{k_W}{v}$	x	k_N	$\frac{k_W}{v}$
0,136	15,20	29,59	0,167	5,96	10,82
0,279	18,86	28,85	0,624	6,80	7,96
0,529	20,61	25,49	1,084	6,92	6,73
0,940	25,78	26,32	2,043	7,51	5,92
1,421	34,22	30,44	2,714	7,96	5,70
1,880	47,35	38,39	4,221	9,34	5,78
1,947	50,05	40,08	10,26	20,73	9,54
2,300	68,28	51,72	13,65	25,12	10,51
2,756	91,75	65,44	19,35	25,38	9,45
3,219	99,39	67,32	27,43	23,21	7,69
3,551	100,35	65,77	33,39	21,04	6,53
4,469	101,09	61,36	35,58	20,36	6,19
5,698	95,01	51,99	38,64	19,50	5,77
11,44	66,13	29,53			
20,69	42,25	15,39			
38,99	24,91	7,35			

1) Rowland, Phil. Mag. 46. p. 152. 1873.

Was von dem Quotienten k_W/v gilt, das gilt in erhöhtem Maasse von k_W . Wir sehen also, auch hier nimmt k_W anfangs mit wachsender magnetisirender Kraft ab, sinkt bis zu einem Minimum, steigt dann wieder an, um endlich abermals zu sinken. Die Wendepunkte hängen von der Natur des Stahles ab.

Es stehen hiernach sowohl die Beobachtungen von Rowland wie auch die von mir der Zulässigkeit der Anwendung des v. Waltenhofen'schen Gesetzes auf die Bestimmung der Magnetisirungsfuction entgegen, und es ist daher nicht gestattet, aus der Formel (1) allgemeine Schlüsse auf die Aenderung der Magnetisirungsfuction mit der magnetisirenden Kraft zu ziehen. Ich wiederhole, dass dieses auch, soviel ich sehe, weder von Wiedemann, noch von Müller-Pfaundler geschehen ist.

Ebensowenig dürfte es erlaubt sein, aus Hrn. v. Waltenhofen's Untersuchungen über die Abhängigkeit des magnetischen Momentes von Stahlstäben von der Härte, dem Querschnitt und etwaigen vorausgegangenen Magnetisirungen irgend welche Folgerungen für die Aenderung der Magnetisirungsfuction mit jenen Factoren abzuleiten, und ich halte somit auch die von Hrn. v. Waltenhofen unter 2) gegen meine Arbeiten vorgebrachten Erhebungen für erledigt. Was übrigens die älteren Untersuchungen über die Magnetisirungsfuction anlangt, so verweise ich auf die Einleitung meiner ersten Abhandlung.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass ich die Resultate meiner Untersuchungen im vollen Umfange aufrecht erhalte.

Göttingen, im März 1884.

**XV. *Ableitung des Stefan'schen Gesetzes*¹⁾,
*betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung
 von der Temperatur aus der electromagnetischen
 Lichttheorie;*
*von Ludwig Boltzmann in Graz.***

Maxwell hat aus seiner electromagnetischen Lichttheorie das Resultat abgeleitet, dass ein Strahl von Licht oder strahlender Wärme auf die Flächeneinheit bei senkrechter Incidenz einen Druck ausüben muss, welcher gleich ist der in der Volumeneinheit Aether infolge der Lichtbewegung enthaltenen Energie. Sei ein absolut leerer Raum rings von für Wärmestrahlung undurchlässigen Wänden von der absoluten Temperatur t umgeben; bezeichnen wir die in der Volumeneinheit Aether infolge der Wärmestrahlung enthaltene Energie mit $\psi(t)$, so müssen wir bedenken, dass nicht alle Wärmestrahlen senkrecht auf die gedrückte Wand auffallen. Am einfachsten ist es, da analog einer Betrachtungsweise, welche Krönig²⁾ auf die Gastheorie anwandte, den Raum als Würfel zu denken, dessen Seiten parallel drei rechtwinkligen Coordinatenaxen sind. Ein dem Mittelzustand am besten entsprechendes Resultat erhält man, wenn man annimmt, dass je ein Drittel der Wärmestrahlung parallel je einer der drei Coordinatenaxen sich fortpflanzt. Es wird dann auf jede Seitenfläche nur ein Drittel der gesamten Strahlen drückend wirken, und der Druck auf die Flächeneinheit der Wand wird nach Maxwell's Gesetz sein:

$$f(t) = \frac{1}{3} \psi(t);$$

man kann diese Formel auch durch folgende Ueberlegung finden. Maxwell's Resultat gilt, wenn der Strahl senkrecht auf die gedrückte Fläche auffällt und von derselben absor-

1) Stefan, Wien. Ber. 79. p. 391. 1879.

2) Maxwell A. Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford, Clarendon Press vol. II Artikel 792. p. 391. 1873.

3) Krönig, Grundzüge der Theorie der Gase. Berlin bei A. W. Hain. Pogg. Ann. 99. p. 315. 1856.

birt wird. Würde er nahe senkrecht auffallen und unter demselben Winkel reflectirt, so wäre der Druck der doppelte; bildete er dagegen mit der Normalen den Winkel ϑ und würde mit gleicher Intensität unter demselben Winkel reflectirt, so wäre analog wie beim Stosse eines schief auffallenden Gasmolecöles bloß die lebendige Kraft der normal zur gedrückten Fläche entfallenden Componente der Bewegung massgebend, welche gleich der mit $\cos^2 \vartheta$ multiplicirten gesammten lebendigen Kraft des Strahles ist. (Sowohl das Bewegungsmoment als auch die auftreffende Menge erscheint mit $\cos \vartheta$ multiplicirt). Bezeichnen wir daher die gesammte lebendige Kraft der Strahlen in der Volumeneinheit wieder mit $\psi(t)$, so ist die lebendige Kraft derjenigen Strahlen, deren Winkel mit der Normalen zur gedrückten Fläche zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ liegt, und welche sich in der Richtung gegen die gedrückte Fläche hin fortpflanzen, gleich $\frac{1}{3} \psi(t) \sin \vartheta d\vartheta$; genau ebenso gross ist die lebendige Kraft der Strahlen, welche sich längs derselben Geraden, aber von der gedrückten Fläche hinweg fortpflanzen. Die gesammte Energie beider Strahlengattungen zusammen ist daher $\psi(t) \sin \vartheta \cdot d\vartheta$, und sie üben nach dem oben Gesagten auf die Flächeneinheit den Druck $\psi(t) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta$ aus. Um alle überhaupt vorhandenen Strahlen zu erhalten, haben wir diesen Ausdruck von Null bis $\pi/2$ zu integrieren, was den schon früher angegebenen Werth $\frac{1}{3} \psi(t)$ liefert.

In meinem Aufsatze über eine von Bartoli entdeckte Beziehung der strahlenden Wärme zum zweiten Hauptsatz¹⁾ habe ich gezeigt, dass sich zwischen den beiden Functionen ψ und f ²⁾ aus dem zweiten Hauptsatze die Beziehung ergibt $f = t f \psi dt / t^2$, deren Differential lautet: $t df - f dt = \psi dt$, wenn also, wie aus der electromagnetischen Lichttheorie folgt, $f = \frac{1}{3} \psi$ gesetzt wird, so erhält man: $t d\psi / 3 = 4 \psi dt / 3$ und durch Integration $\psi = ct^4$, ein Gesetz, welches bekanntlich schon vor längerer Zeit von Stefan empirisch aufgestellt

1) Boltzmann. Wied. Ann. 22. p. 38. 1884.

2) $\psi(t)$ ist die dort mit $4q(t)/cJ$ bezeichnete Grösse, vgl. p. 35.

und in guter Uebereinstimmung mit den Beobachtungen gefunden wurde. Es folgt also aus der electromagnetischen Lichttheorie und dem zweiten Hauptsatze unmittelbar das Stefan'sche Gesetz der Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur, ein gewiss bemerkenswerthes Resultat, wenn auch sicher niemand den vielfach provisorischen Charakter der hier durchgeführten Rechnungen verkennen wird.

Man sieht leicht, dass sich auch umgekehrt aus dem zweiten Hauptsatze und dem Stefan'schen Strahlungsgesetze die Folgerung ergibt, dass in einem von Wärme undurchlässigen und gleich temperirten Wänden umgebenen Raum der Druck der Wärmestrahlung auf die Flächeneinheit gleich dem dritten Theile der in der Volumeneinheit enthaltenen Energie der Strahlung ist, dass also ein Strahl, welcher senkrecht auf eine ebene Fläche vom Flächeninhalte Eins auffällt, auf diese einen Druck ausübt, welcher gleich ist der in der Volumeneinheit des Strahles enthaltenen Energie, sobald er von der gedrückten Fläche absorbiert wird; wird er dagegen von dieser mit ungeschwächter Intensität reflectirt, so ist der Druck doppelt so gross, also gleich der im einfallenden und reflectirten Strahle zusammen auf die Volumeneinheit entfallenden Energie. Nach der Emissionstheorie müsste der Druck, wie mir scheint, entgegen der von Bartoli l. c. angeführten Ansicht Hirn's in allen diesen Fällen doppelt so gross sein, als es hier gefunden wurde. Es scheint mir übrigens, dass man durch ähnliche Hypothesen, wie sie Kirchhoff in seiner bekannten Abhandlung über Gleichheit des Absorptions- und Emissionsvermögens¹⁾ aufstellte, auch beweisen könnte, dass dieses Gesetz für vollkommen schwarze Körper, nicht bloß für die gesammte ausgestrahlte Wärmemenge, sondern auch für jede einzelne Strahlengattung für sich gelten muss, sodass bei allen Temperaturen die von einem schwarzen Körper ausgesandte Wärme einer gewissen Strahlengattung der gleiche Bruchtheil der gesammten aus-

1) Kirchhoff, Pogg. Ann. 109. p. 275. 1860. Sitzungsber. d. Berl. Acad. 1861.

gesandten Wärme sein müsste, wie unter anderen Lecher¹⁾ vermuthete.

Ich erwähne hier noch eine etwas einfachere Ableitungsweise der Gleichung zwischen den Functionen ψ und f aus dem Bartoli'schen Processe. Sei in einem Hohlcyylinder von absolut schwarzer, Wärme undurchlässiger Umhüllung ein eben solcher Stempel S verschiebbar, derselbe berühre anfangs die Basis B des Cylinders, welche den Flächeninhalt Eins und die Temperatur t_0 haben soll und entferne sich von derselben bis zur Distanz a (er befinde sich rechts von der Basis B). Die ganze, in Form von Strahlung zwischen B und S vorhandene Wärme $a \cdot \psi(t_0)$, sowie die ganze, zur Bewegung von S aufgewendete Wärme $a f(t_0)$ werde von B geliefert. Die Wärme denken wir uns in Arbeitsmaass gemessen. Nun werde der Raum zwischen B und S durch einen zweiten Stempel T von B abgesperrt, sodass sich sein Zustand jetzt adiabatisch ändert, und der Stempel S , welcher, sowie die Mantelfläche des Cylinders, nur verschwindend wenig Wärme enthalten soll, bewege sich noch um das Stück x weiter. Für diese Zustandsänderung ist dann $d[(a+x)\psi(t)] = -f(t)dx$. Der Raum rechts von S und die ihn begrenzende Gegenfläche G des Cylinders sollen immer die schliesslich auch links entstehende Temperatur t gehabt haben. Alle rechts vom Stempel S sowohl durch Arbeitsleistung als auch durch Volumenverkleinerung gewonnene Wärme $(a+x)[\psi(t) + f(t)]$ soll von dieser Gegenfläche G aufgenommen worden sein. Der Process ist umkehrbar; es ist also:

$$(a+x)[\psi(t) + f(t)] / t = a[\psi(t_0) + f(t_0)] / t_0 = c.$$

Wir wollen nun a und t_0 , somit auch c als constant, x und t als veränderlich betrachten, addirt man zur vorigen Gleichung beiderseits $d[(a+x)f(t)]$, so ergibt sich mit Beachtung des Differentials der letzten Gleichung das Resultat:

$$\psi(t)dt + f(t)dt = tdf(t),$$

was mit der obigen Gleichung übereinstimmt.

1) Lecher, Wien. Ber. 85. p. 441. 1882. Wied. Ann. 17. p. 477. 1882.

XVI. *Elementarer Beweis des Satzes von Avogadro; von G. Krebs.*

Der Satz, dass gleiche Volumina verschiedener Gase bei demselben Druck und derselben Temperatur gleichviel Molecüle enthalten, lässt sich aus einer Gleichung über den Stoss der Gasmolecüle gegen eine Wand ableiten, die zuerst von Krönig¹⁾ unter vereinfachenden Bedingungen aufgestellt worden ist. Clausius²⁾ hat späterhin den Satz in voller Allgemeinheit mit höherer Mathematik erwiesen. Elementare Beweise haben Zöppritz³⁾, Pfaundler⁴⁾ und Maxwell (in seiner Theorie of Heat) gegeben.

Ich erlaube mir nun, einen anderen elementaren Beweis mitzutheilen, der sich auf einen Satz stützt, welcher in den Lehrbüchern der Physik bewiesen zu werden pflegt. Wir führen diesen Satz zuerst an:

α) Enthält ein Flüssigkeitsstrahl vom Querschnitt 1 auf der Einheit der Länge n_1 Molecüle von der Masse m und der Geschwindigkeit u , so ist die in der Zeiteinheit gegen die Flächeneinheit prallende Masse gleich $n_1 mu$, und die in der beliebigen Zeit τ mit der Flächeneinheit zum Stoss kommende Masse gleich:

$$n_1 mu\tau.$$

Die Bewegungsgrösse dieser Masse ist:

$$n_1 mu^2\tau,$$

und der entsprechende Zeiteffect einer Kraft k , welche die Masse $n_1 mu\tau$ in der Zeit τ auf die Geschwindigkeit u bringen könnte und denselben Effect zu erzielen vermöchte, wie die anprallende Masse:

$$(1) \quad k\tau = n_1 mu^2\tau, \text{ woraus: } k = n_1 mu^2.$$

Denkt man sich ein Prisma von den Kanten a , b , c mit n Gasmolecülen ausgefüllt, welche in der Richtung von a

1) Krönig, Pogg. Ann. 99. p. 315. 1856.

2) Clausius, Pogg. Ann. 100. p. 353. 1857.

3) Zöppritz, Naumann's Grundriss der Thermochemie p. 28.

4) Pfaundler, Pogg. Ann. 144. p. 428. 1871.

senkrecht zur Fläche bc (A) die Geschwindigkeit u haben, so ist die dem specifischen Druck entsprechende Stosskraft:

$$k = \frac{n}{a \cdot b \cdot c} \cdot m u^2.$$

Denselben Werth hat k , wenn die Molecüle sich senkrecht gegen die Fläche ab (C) oder ac (B) mit der Geschwindigkeit u bewegen.

k ist das, was man die „Spannkraft“ des Gases nennt. Bezeichnet man nun $k \cdot a \cdot b \cdot c$ oder $k \cdot v$, wo v das Volumen des Prismas bezeichnet, mit K , so ist:

$$(2) \quad K = n m u^2.$$

K ist die Kraft, welche die ganze, in dem Volumen v befindliche Masse ebenso zu beschleunigen vermag, wie die Kraft k die in der Volumeneinheit befindliche Masse. K könnte man „Druckfunction“ nennen; durch v dividirt, erhält man den specifischen Druck und, durch c , b oder a dividirt, den Gesamtdruck auf eine der drei Flächen A , B oder C .

β) Die Molecüle einer in einem Gefäss eingeschlossenen Gasmasse verhalten sich aber nicht wie die Theilchen eines Flüssigkeitsstrahles, welche eine fortschreitende Bewegung ausführen, d. h. parallel neben- und hintereinander, mit gleicher Geschwindigkeit und ohne einander zu stossen, herlaufen. Die Molecüle einer Gasmasse haben im Gegentheil die verschiedensten Geschwindigkeitsrichtungen, sodass sie bald da, bald dort gegeneinander stossen. (Da es für den Druck eines Gases gegen eine Wand gleichgültig ist, ob ein n faches oder n einfache Molecüle gegen dieselbe prallen, so setzen wir alle Molecüle als einfach voraus.)

Krönig nimmt ohne weiteres an, dass die Molecüle eines Gases vollkommen elastisch seien, und dass dieselben einander gerade und central stiessen. Clausius und andere halten sich von dieser Annahme frei, doch aber lässt sich leicht zeigen, dass wenn auch in Wirklichkeit die Molecüle nicht vollkommen elastisch, und die Stösse nicht gerade und central wären, man doch die Krönig'sche Annahme, unbe-

schadet des Effectes machen dürfte. Gesetzt nämlich, die Molecüle erlitten durch die Stösse Deformationen, welche sich nicht von selbst, oder durch andere Stösse wiederherstellten, so würde ein Verlust an lebendiger Kraft (der fortschreitenden Bewegung) und somit ein Sinken der Temperatur eintreten. Dasselbe würde geschehen, wenn durch excentrische Stösse ein Theil der fortschreitenden Bewegung sich in rotirende verwandelte, ohne durch andere Stösse wieder in fortschreitende zurückverwandelt zu werden. Wenn umgekehrt rotirende Bewegung sich dauernd in fortschreitende verwandelte, so musste die Temperatur steigen. Nun kann aber ein Gas oder irgend ein Körper seinen Temperaturzustand nicht von selbst, d. h. ohne Wärmezufuhr von aussen ändern; folglich sind dauernde Deformationen und dauernde Verwandlungen von fortschreitender Bewegung in rotirende, oder umgekehrt, nicht anzunehmen, oder mit anderen Worten, die Molecüle verhalten sich genau wie vollkommen elastische Körper, welche einander gerade und central stossen.

γ) Wenn zwei elastische Körper von gleicher Masse einander central stossen, so vertauschen sie ihre Geschwindigkeiten. Gesetzt nun, die Bewegung eines Gasmolecüles sei senkrecht gegen einen Theil der Gefässwand gerichtet, so überträgt es seine Geschwindigkeit, wenn es nicht selbst gegen die Wand prallt, auf ein zweites, dieses möglicherweise auf ein drittes Molecül u. s. w. Jedes derselben nimmt die Geschwindigkeit des ersten als Componente in sich auf, und wenn schliesslich ein n . Molecül gegen die Wand prallt, so überträgt es (von seiner eigenen Geschwindigkeit abgesehen) den vom ersten empfangenen, senkrecht gegen die Wand gerichteten Stoss unverändert auf diese. Es ist deswegen einerlei, ob das erste Molecül selbst gegen die Wand stösst oder seine Bewegung auf andere überträgt. Wir können deshalb annehmen, jedes Molecül setze seinen Weg ungehindert von den anderen nach der Wand hin fort.

δ) Man denke sich in einem vierseitig rechteckigen prismatischen Gefässe ein Molecül von beliebiger Geschwindig-

keitsrichtung, so kann man seine Geschwindigkeit w in drei Geschwindigkeiten x_1, y_1, z_1 zerlegen; die erste soll senkrecht gegen die Wandfläche A , die zweite senkrecht gegen B , die dritte senkrecht gegen C gerichtet sein. Dann gilt:

$$(3) \quad w^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$$

Statt eines Molecüles mit der Geschwindigkeit w kann man hiernach drei solcher annehmen, welche gleichzeitig von demselben Punkt mit den Geschwindigkeiten $x \perp A$, $y \perp B$ und $z \perp C$ ausgehen.

Stellen wir uns nun alle Molecüle vor, welche sich gleichzeitig in einer und derselben Ebene $E \parallel A$ (und $\parallel A'$, wo A' die Gegenfläche von A) befinden, so ist bei der grossen Zahl gleichzeitig durch E gehender Molecüle mit grösster Wahrscheinlichkeit anzunehmen, dass zu jedem Molecül, welches nach A hingelt, ein zweites existirt, welches in entgegengesetzter (ungleichstimmig paralleler Richtung) nach A' geht. Der Umstand, dass der Druck auf alle Stellen der ganzen Gefässwand thatsächlich derselbe ist, erhebt die Wahrscheinlichkeit zur Gewissheit.

Betrachten wir zunächst bloss diejenigen Molecüle in der Ebene E , deren Geschwindigkeit die Richtung nach A hat, so gelten für dieselben die Gleichungen:

$$\begin{aligned} w^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ w^2 &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \\ w^2 &= x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Statt jedes dieser Molecüle kann man, wie schon bemerkt, drei solcher annehmen, welche bezüglich die Geschwindigkeiten $x_1, x_2, x_3 \dots \perp A$; $y_1, y_2, y_3 \dots \perp B$; $z_1, z_2, z_3 \dots \perp C$ haben.

Nun gehen durch jeden Punkt von E nach der Reihe Molecüle nach den verschiedensten Richtungen, deren Geschwindigkeitscomponenten $\perp A$ sehr verschiedene Werthe haben. Für den Druck auf irgend einen Punkt von A ist es aber gleichgültig, ob (innerhalb einer sehr kurzen Zeit)

Molecüle von verschiedenen Geschwindigkeiten $x_1, x_2 \dots$ anprallen, oder ob sie alle eine mittlere Geschwindigkeit x haben, derart dass:

$$x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots$$

Diese mittlere Geschwindigkeit ist für alle Punkte von E dieselbe, wenn auch die Componenten $\perp A$ an den einzelnen Punkten von E in der verschiedensten Ordnung aufeinander folgen. Legen wir jetzt durch das Prisma eine ganze Schaar von Ebenen, welche soweit voneinander abstehen, wie die gleichmässig durch den Raum vertheilten Molecüle, und welche den Seitenflächen A und A' des prismatischen Gefässes parallel sind, so gehen von allen Punkten Molecüle aus, welche sich senkrecht zu A (und A') mit der Geschwindigkeit x bewegen und also einen „Flüssigkeitsstrahl“ bilden.

ε) Ersetzt man den Stoss durch eine Kraft, so ist:

$$P_1 = nm x^2,$$

wo n die Anzahl der Molecüle im Prisma und P_1 eine Kraft bedeutet, welche die Molecüle in derselben Zeit auf die Geschwindigkeit x bringen kann, in welcher dieselben nach der Reihe zum Stoss gegen A gelangen.

Nun gehen aber auch von denselben Punkten des Prismas, resp. von einer Schaar zu BB' paralleler Ebenen Molecüle in der Richtung $\perp B$ (und B') aus; bezeichnen wir ihre mittlere Geschwindigkeit mit y , so gilt:

$$y^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots$$

Den Stoss dieser Molecüle kann man durch eine Kraft:

$$P_2 = nm y^2$$

ersetzen.

Ebenso kann der Stoss gegen C (und C') durch eine Kraft:

$$P_3 = nm z^2$$

ausgedrückt werden.

Nun haben die Gasmolecüle ursprünglich die verschiedensten Geschwindigkeitsrichtungen, und es ist daher mit höchster Wahrscheinlichkeit anzunehmen, dass, wenn man jede nach drei aufeinander senkrechten Richtungen zerlegt, das Mittel aus den Componenten nach einer der drei Rich-

tungen der nach den zwei anderen gleich sei. Uebrigens zeigt die Erfahrung, dass der (specifische) Druck auf jede Wand des Gefässes derselbe ist (die specifischen Drucke erhält man, wenn man P_1 , P_2 und P_3 je durch v dividirt; die specifischen Drucke sind den Kräften P_1 , P_2 und P_3 proportional). Daher ist:

$$x = y = z \text{ und } P_1 = P_2 = P_3.$$

Bezeichnen wir die resultirende Kraft aus P_1 , P_2 , P_3 mit P und die resultirende Geschwindigkeit aus x , y , z mit u , so ist:

$$(4) \quad u^2 = 3x^2, \quad P = \frac{1}{3}nm u^2, \quad p = \frac{1}{3} \frac{nm u^2}{v}.$$

§) Ein Raum von beliebiger Gestalt kann als aus einer sehr grossen Zahl dünner Prismen zusammengesetzt angesehen werden. Da die Temperatur durchgängig als gleich vorausgesetzt wird, so gilt für den specifischen Druck auf die Endflächen, also auch auf die ganze Gefässwand:

$$p = \frac{1}{3} \frac{nm u^2}{v}.$$

η) Hat man zwei Gasmassen, deren Molecüle die Massen m_1 und m_2 und die Geschwindigkeiten u_1 und u_2 besitzen, so gilt für gleiche Temperatur:

$$(5) \quad \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_2 u_2^2.$$

Haben zwei Gase gleiche Spannkraft, und bedeuten n_1 und n_2 die in der Kubikeinheit oder überhaupt in gleichen Räumen enthaltenen Anzahlen von Molecülen, so muss nach (4) sein:

$$(6) \quad \frac{1}{3} n_1 m_1 u_1^2 = \frac{1}{3} n_2 m_2 u_2^2.$$

Setzt man nun in zwei Gasmassen, welche die Kubikeinheit, oder überhaupt gleiche Räume erfüllen, gleiche Temperatur und gleiche Spannkraft voraus, so gelten (5) und (6) gleichzeitig. Dividirt man nun mit (5) in (6), so erhält man:

$$n_1 = n_2.$$

Zwei Gasmassen von gleicher Temperatur und Spannkraft enthalten in gleichen Raumtheilen gleichviel Molecüle — Satz von Avogadro.

Uebrigens kann man unseren Satz auch auf eine etwas andere Art erweisen. Man beginnt mit der Darlegung, wie in β), γ) und δ) geschehen, dass die Gasmolecüle als elastisch angesehen werden können, und dass die in einem Prisma befindlichen Gasmolecüle gewissermassen in drei senkrecht gegen die Wände gerichteten „Flüssigkeitsstrahlen“ (mit gleicher Geschwindigkeit parallel neben- und hintereinander laufend) sich bewegten. Alsdann berechnet man den Druck auf die Wände in folgender (übrigens bekannter) Weise: Haben die senkrecht gegen A , also parallel der Kante a sich bewegenden Molecüle die Geschwindigkeit x , so prallen sie in der Secunde $x/2a$ mal gegen A an, denn jedes Molecül muss, wenn es eben gegen A gestossen ist, den Weg nach A' und zurück nach A (also den Weg $2a$) machen, um zum zweiten mal mit A zum Stosse zu gelangen. Die Gegenwirkung der Wand verwandelt jeden Stoss in den entgegengesetzten, sie gibt jedem Molecül die Geschwindigkeit $2x$, indem sie die Geschwindigkeit x des Molecüls nicht blos vernichtet, sondern ihm auch eine entgegengesetzte Geschwindigkeit x mittheilt. Es wird also der Masse nm in der Secunde $x/2a$ mal die Geschwindigkeit $2x$ ertheilt, und dies ist ebenso gut, als ob die Masse $nm x/2a$ innerhalb einer Secunde auf die Geschwindigkeit $2x$ gebracht würde. Es ist deshalb der secundliche Zeiteffect der Gegenwirkung der Wand, also die Gegenwirkung selbst (welche der Wirkung, d. i. dem Druck auf A gleich ist):

$$D_A \cdot 1 = D_A = nm \frac{x}{2a} \cdot 2x = \frac{nm x^2}{a}.$$

Hieraus ergibt sich für den specifischen Druck auf A :

$$p = \frac{nm u^2}{a \cdot b \cdot c} = \frac{nm x^2}{v}$$

woraus:

$$P = nm x^2 \text{ u. s. w.}$$

Wir schliessen hieran noch einen elementaren Beweis des Satzes über das Verhältniss der fortschreitenden zur Gesamt-Bewegung der Gasmolecüle.

In Naumann's „Lehr- und Handbuch der Thermochemie“ wird p. 57 die Bemerkung gemacht: „Das Verhält-

niss zwischen der lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung der Molecüle zur gesammten in einem Gase enthaltenen lebendigen Kraft ist ¹⁾ — unter Anwendung höherer Mathematik, weshalb auf die betreffende Entwicklung hier nur verwiesen wird — ausgedrückt durch die Gleichung $K/H = \frac{3}{2}(\gamma' - \gamma)/\gamma$.“

Es ist aber keineswegs schwer, den Satz auch mit niederer Mathematik zu erweisen.

Bedeutet p die Kraft, welche die in der Kubikeinheit des Volumens enthaltenen Molecüle so beschleunigen könnte, dass diese denselben Druck auf die Wand ausübten, wie die mit der Geschwindigkeit u sich bewegenden Molecüle, und P die Kraft, welche die in einem beliebigen Volumen v enthaltenen Molecüle in gleicher Weise in Bewegung setzen könnte, so ist (s. 4):

$$pv = P = \frac{1}{2} m n u^2,$$

wo n die Zahl der im Gesamtvolumen enthaltenen Molecüle bedeutet.

Wir denken uns nun eine Gasmasse in einem Cylinder eingeschlossen, in welchem sich ein beweglicher Kolben befindet, auf dem der specifische Druck p lastet. Wird das Gas erwärmt, und dehnt sich dasselbe bei einer gewissen Temperaturerhöhung um Δv aus, so ist die geleistete äussere Arbeit:

$$p \cdot \Delta v,$$

denn die Arbeit ist gleich dem Product aus dem specifischen Druck p , dem Querschnitt a des Cylinders und dem Weg x des Kolbens; nun ist aber $a \cdot x = \Delta v$. Beginnt die Erwärmung mit dem absoluten Nullpunkt der Temperatur, wo das Volumen des Gases als gleich Null anzunehmen ist, und setzt sie sich fort bis T^0 , wo das Volumen v sein mag, so ist die geleistete äussere Arbeit:

$$pv.$$

Die specifischen Wärmen der Gase bei constantem Druck und bei constantem Volumen, c_p und c_v , bedeuten bekanntlich die Anzahlen der Calorien, welche nöthig sind, um 1 kg Gas um 1° C. (oder was einerlei ist, um 1° der absoluten Scala) zu erhitzen, dass eine mal, wenn das Gas sich bei constan-

1) R. Clausius, Pogg. Ann. 100. p. 377. 1857.

tem Druck ausdehnen, das andere mal, wenn es, in einem Gefässe eingeschlossen, sein Volumen nicht verändern kann.

Die gesammte innere und äussere Arbeit, welche bei einer Temperaturerhöhung eines Kilogrammes Gas von 0^0 bis 1^0 C. geleistet wird, ist gleich $424 c_p$ und die innere Arbeit $424 c_v$; also ist die äussere Arbeit gleich $424 (c_p - c_v)$. In Betreff der inneren Arbeit bemerken wir noch, dass sie bekanntlich einestheils in der Vergrösserung der fortschreitenden Bewegung der Molecüle, d. h. in der Erhöhung der Temperatur, und anderentheils in der Vergrösserung der rotirenden Bewegung der Molecüle und der vibrirenden der die Molecüle zusammensetzenden Atome besteht.

Nun ist:

$$(1) \quad pv = \frac{1}{2} m n u^2,$$

wo u die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung der Molecüle bedeutet.

Aus (1) folgt:

$$(2) \quad \frac{3}{2} pv = \frac{1}{2} m^* n u^2.$$

Die rechte Seite der Gleichung (2) gibt die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung der Molecüle, die Temperatur an, die linke das Anderthalbfache der durch die Erwärmung geleisteten äusseren Arbeit.

Die der Temperaturerhöhung, vom absoluten Nullpunkt bis T^0 gerechnet, entsprechende innere Arbeit beträgt, weil $pv = 424 (c_p - c_v) \cdot T$:

$$424 \cdot \frac{3}{2} (c_p - c_v) \cdot T$$

und die gesammte innere Arbeit:

$$424 \cdot c_v \cdot T.$$

Das Verhältniss zwischen der der Temperaturerhöhung entsprechenden inneren Arbeit und der gesammten inneren ist also:

$$\frac{424 \cdot \frac{3}{2} (c_p - c_v) \cdot T}{424 \cdot c_v \cdot T} = \frac{3}{2} \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) = \frac{3}{2} (1,41 - 1) = 0,615.$$

Es ist demnach die Energie der fortschreitenden Bewegung der Molecüle nur etwa $\frac{3}{5}$ von der gesammten inneren Energie; $\frac{2}{5}$ kommen auf die Energie der rotirenden Bewegung der Molecüle und der vibrirenden der die Molecüle zusammensetzenden Atome.

**XVII. Ueber eine Einrichtung zur Darstellung
der von der Pariser Conferenz zur Bestimmung
der electrischen Einheiten angenommenen
Lichteinheit; von Werner Siemens.**

(Aus den Sitzungsber. der k. Akad. d. Wiss. zu Berlin vom 15. Mai 1884.)

Die internationale Conferenz zur Bestimmung der electrischen Einheiten, welche kürzlich in Paris tagte, hat unter anderem auch beschlossen, als Lichteinheit die Menge des Lichtes anzunehmen, welche von einer Fläche von 1 qcm geschmolzenen Platins ausgeht, welches in Erstarrung begriffen ist. Sollte diese Einheit eine praktische Bedeutung erhalten, so war es nöthig, eine einfache, leicht verwendbare Einrichtung zu treffen, um vergleichende Messungen mit ihr an beliebigen Orten ausführen zu können. Es schien diese Aufgabe besonders durch den Umstand sehr erschwert, dass das Platin beim Schmelzen leicht Kohle, Silicium und andere Stoffe aufnimmt, wodurch seine Schmelztemperatur wesentlich erniedrigt wird.

Der kleine Apparat, welchen ich der Akademie hier vorlege, entspricht eigentlich der Definition der Lichteinheit, wie sie in Paris festgesetzt ist, nicht ganz, da er die Lichtmenge, die von schmelzendem, und nicht die, welche von erstarrendem Platin ausgeht, angibt. Es ist aber wahrscheinlich, dass diese Differenz bei chemisch reinem Platin sehr klein ist. Die Einrichtung basirt auf der Schmelzung eines sehr dünnen Platinbleches durch den galvanischen Strom. Das Blech ist in einen Metallkasten eingeschlossen, welcher dem vom glühenden Bleche ausgehenden Lichte nur den Austritt durch ein Loch von 0,1 qcm Querschnitt gestattet, welches demselben nahe gegenübersteht. Die Wände des Loches sind conisch und das Platinblech überragt dasselbe nach allen Seiten. Im Augenblicke des Schmelzens des Platinbleches tritt daher aus dem Loche eine Lichtmenge von 0,1 der Lichteinheit.

Durch langsame Vermehrung der Stromstärke kann man bewirken, dass der Augenblick des Schmelzens des Bleches erst eintritt, nachdem man das Gleichgewicht der Beleuchtung mit der zu messenden Lichtquelle genau festgestellt hat. Nach vorläufigen Messungen ist die Lichtmenge, welche im Augenblicke des Schmelzens vom Apparate ausgeht, nahe gleich 1,5 englischen Normalkerzen.

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXII.

*I. Ueber electrische Entladung in Gasen;
von O. Lehmann.*

(Hierzu Taf. III u. IV.)

In einem kleinen vor vier Jahren veröffentlichten Aufsatz¹⁾ habe ich die Resultate einer Reihe von Untersuchungen zusammengestellt, welche dahin abzielten, die grosse Menge electrischer Lichterscheinungen in Gasen nach charakteristischen Merkmalen zu ordnen, sowie deren Entstehungsbedingungen und Ursachen klarzustellen. Jene frühere Arbeit enthielt nun nur die Ergebnisse der Untersuchungen in erster Hinsicht, die übrigen sollten, wie ich zum Schlusse ankündigte einem später folgenden zweiten Theile vorbehalten bleiben.

Vorliegendes ist dieser zweite Theil. Den Hauptinhalt desselben habe ich bereits gelegentlich der letzten Naturforscherversammlung in Freiburg i. B. Ende September vorigen Jahres vorgetragen, inzwischen ist mir durch meine Uebersiedelung nach Aachen Gelegenheit geboten worden, durch Benutzung der Hülfsmittel des dortigen Laboratoriums die Untersuchungen wesentlich zu vervollständigen, sodass sich das Material der Arbeit beträchtlich vermehrt hat.

I. Die Versuchsmethode.

Das erstrebte Ziel, die Erkennung der Entstehungsbedingungen jeder einzelnen Entladungsart erforderte die Möglichkeit, die Versuchsumstände innerhalb der weitesten Grenzen zu variiren. Als variable Grössen kommen hierbei in Betracht:

- 1) die Intensität der Entladung,
- 2) die Dichte des Gases,

1) O. Lehmann, Wied. Ann. 11. p. 686 ff. 1880.

- 3) die Entfernung der Electroden,
- 4) die Gestalt und Zahl der Electroden,
- 5) die Form des Gefässes,
- 6) die chemische Natur des Gases und der Electroden,
- 7) die Temperatur,
- 8) die Nähe electrisirter Körper,
- 9) die Nähe magnetischer Körper und
- 10) innere Strömungen im Gase.

a. Widerstände. — Die Aenderung der Stromintensität erfordert entweder Aenderung der electromotorischen Kraft oder des Widerstandes.

Als Electricitätsquelle diene eine durch einen kleinen Gasmotor getriebene Influenzmaschine. Die electromotorische Kraft einer solchen lässt sich zwar durch Aenderung der Rotationsgeschwindigkeit oder durch Anbringen von Hilfsconductoren, welche eine Zweigleitung repräsentiren, ändern, allein nicht innerhalb der gewünschten weiten Grenzen, so dass nur noch die Aenderung des Widerstandes in Betracht kommen konnte.

Versuche mit Graphitwiderständen und sehr langen haarfeinen Platindrähten, sowie mit langen relativ gut leitenden Flüssigkeitssäulen führten zu negativen Resultaten, es wurde so nur Glimm- und Funkenentladung erhalten. Einzig brauchbar erwiesen sich schlechtleitende Flüssigkeiten, wie Alkohol, Aether, Terpentinöl u. s. w.

Zunächst war die Frage zu erledigen, in wie weit der specifische Widerstand solcher Flüssigkeiten als constant betrachtet werden kann.

Lässt man den vollen Strom einer mit Flaschen versehenen Influenzmaschine durch einen Tropfen Bleinitratlösung hindurch gehen und beobachtet die Enden der Electroden mit Hülfe eines etwa 100fach vergrößerndem Mikroskops¹⁾, so sieht man an der negativen Electrode schöne Krystallblättchen von Blei auftreten. Einschaltung einer kleinen Funkenstrecke bewirkt, dass diese Krystalle nur noch an den Ecken weiterwachsen. Weitere Vergrößerung der Funkenstrecke be-

1) Das benutzte Instrument war dasjenige, welches ich in Wied. Ann. 13. p. 506 ff. 1881 beschrieben habe.

wirkte Strömung der Flüssigkeit von den Electroden weg, sowie Auftreten von Dampfbläschen, und grösste Entladungsintensität endlich bewirkt zerreissende Entladung, d. h. Funken, welche von den Electroden ausgehen und entweder frei in der Flüssigkeit endigen, oder aber bei ganz besonders hoher Intensität die ganze Flüssigkeitsschicht durchdringen und von einer Electrode bis zur anderen reichen. Wird das relativ gut leitende Bleinitrat durch das schlechtleitende Terpentin ersetzt, so fällt das erste Stadium, die Electrolyse fort, und wir beobachten nur noch Strömung (Convection, mechanische Fortführung der Electricität) und Funkenentladung.

Ist somit eine Flüssigkeitssäule in einen Stromkreis eingefügt, so würde offenbar beim Uebergang der electrolytischen Leitung in die convective eine Aenderung des specifischen Widerstandes eintreten, falls wir bei convectiver Entladung überhaupt noch von Widerstand im gewöhnlichen Sinne reden dürfen, und ebenso beim Uebergang der convectiven Entladung in die disruptive. In letzterem Falle würde sogar die Flüssigkeitssäule gerade zu als Funkenstrecke wirken. Im Momente, wo die Zerreißung, der Funke, eintritt, wäre die Stromintensität sehr gross, dann wieder sehr gering.

Gerade diese letzten Fälle erwiesen sich nun zur Erzeugung der verschiedenen Arten von Entladung als die günstigsten. Derselbe Zweck muss sich dann aber ebenso gut durch wirkliche Funkenstrecken erreichen lassen, wenn nur dafür gesorgt wird, dass auch ausserhalb der Schlagweite noch ein Uebergang der Electricität möglich ist, d. h. wenn die Kugeln des zur Herstellung der Funkenstrecken benutzten Funkenmikrometers durch Spitzen ersetzt werden.

b. Funkenstrecken. — Eine Funkenstrecke in einen Stromkreis eingeschaltet wirkt ähnlich wie ein Sicherheitsventil. Sie gestattet eine Anstauung der Electricität bis zur Erreichung einer bestimmten Potentialdifferenz, dann aber tritt plötzlich Entladung eines grossen Theils der angehäuften Electricität ein, und die Stromintensität ist also in diesem Momente grösser, als sie gewesen wäre ohne Zwischenschaltung der Funkenstrecke. Die Potentialdifferenz, welche eine Funkenstrecke

zulässt, hängt ausser von ihrer Grösse wesentlich von der Form der Electrode ab. Kugeln gestatten eine grössere Anhäufung als Spitzen, und zwar eine um so höhere, je grösser deren Radius ist.

Um also die Entladungsintensität zu vergrössern, könnte man den Funkenmikrometer derart einrichten, dass sich auf die Spitzen Kugeln von verschiedenen Durchmesser aufstecken lassen. Der gleiche Zweck lässt sich indes wirksamer und bequemer in anderer Weise erreichen.

Dass eine Kugel eine grössere Potentialdifferenz zulässt als eine Spitze, beruht darauf, dass das Gefälle des Potentials an der Kugeloberfläche grösser ist als an der Spitze. Gelingt es also, durch ein geeignetes Mittel einen langsamen Abfall der Potentialcurve an der Spitze zu erhalten, so muss der gleiche Erfolg erzielt werden wie durch Anwendung einer Kugel. Es ist dies in der That möglich durch Unterschieben eines Stückchens Glasrohr, welches die Spitze um einige Millimeter überragt. Der hervorragende Theil der inneren Wandung dieses Röhrchens ladet sich mit der Electricität der Spitze, und zwar mit um so höherer Dichte, je näher er sich der Spitze befindet.

Es ist leicht ersichtlich, dass so ein ganz langsamer Abfall des Potentials von der Spitze bis zum Ende des Röhrchens erzielt werden muss, sodass der beabsichtigte Zweck in der That erreicht wird. Je nachdem man das Röhrchen mehr oder weniger über die Spitze verschiebt, wird seine Wirkung stärker oder schwächer.

c. Vacuumflasche. — Das Ueberströmen der Electricität aus einer Spitze auf eine gegenüber oder in der Nähe befindliche Glaswand lässt sich dazu verwerthen, eine Art Leydener Flasche ohne Belegung zu construiren, die ich kurz „Vacuumflasche“ benennen will. Dieselbe besteht aus einem gewöhnlichen (etwa 1 l fassenden) luftdicht verschlossenen und gut evacuirten Kolben, durch dessen Stöpsel eine Electrode eingeführt ist. Fasst man die Flasche mit der Hand und nähert die Electrode dem Conductor einer Electrisirmaschine, so ladet sie sich ganz wie eine gewöhnliche Leydener Flasche, berührt man dann die Electrode

mit der Hand, so erfolgt ein Schlag verbunden mit heller Lichterscheinung im Inneren, weil nunmehr die gesammte aufgespeicherte Electricität sich wieder rückwärts entladet.

Ist das äussere Ende der Electrode spitz, so erfolgt, nachdem die Flasche geladen ist, von selbst langsame Entladung durch die Spitze, welche minutenlang anhält. Stellt man also eine derartige geladene Flasche in ein vollkommen dunkles Zimmer, so beobachtet man Secunden oder gar Minuten lang das Innere mit diffusum phosphorischem Lichte gefüllt. Bei Annäherung der Hand an die Spitze wird das Leuchten intensiver, hört aber desto früher auf. Gegen Ende wird es deutlich intermittirend.

Man kann die Flasche auch in umgekehrter Weise laden, nämlich auf die äussere Glaswand von dem Conductor Funken überspringen lassen, während man gleichzeitig die Electrode ableitend mit der Hand berührt. Ist die Electrode fein zugespitzt, sodass die dem Conductor gleichnamige Electricität ausströmen kann, so ist selbst diese ableitende Berührung nicht nöthig.

d. Entladungsapparat. — Da hiernach der Einfluss der auf Glaswänden in der Nähe der Electroden angehäuften Electricität von wesentlicher Bedeutung werden kann, andererseits aber Glasgefässe zur Einschliessung des zu untersuchenden Gases nicht zu vermeiden sind, so strebte ich danach, die Distanz der Gefässwände von den Electroden sehr gross zu machen im Verhältniss zu deren Distanz, d. h. also entweder äusserst kleine Distanzen der Electroden bei mässig grossen Gefässen oder sehr grosse Gefässe bei mässigen Distanzen der Electroden zu verwenden. Meine früheren Versuche sind hauptsächlich nach dem ersten Princip (mit Hülfe des Mikroskops) ausgeführt, die neueren nach dem letzteren. Als Gefäss dienten zwei mit ihrer Basis verkittete tubulirte Luftpumpenrecipienten von 16 cm Durchmesser und zusammen 48 cm Länge. In die Tubuli waren hohle Glasstöpsel eingesetzt, an welche Hähne und Electrodenträger eingeschmolzen waren. Die Electroden selbst bestanden meist aus Messingdraht von 2 mm Durchmesser und konnten leicht ausgetauscht werden, insofern sie nicht direct im Glase befestigt

waren, sondern in die genannten Electrodenträger eingeschraubt wurden. Die beiden äusseren Enden der Electrodenhalter wurden direct mit den Funkenmikrometern verbunden, deren also stets zwei gebraucht wurden, einer für die positive und einer für die negative Electrode.

Die Wirkungsweise des Apparates ist nun die folgende:

Befindet sich wie bei Fig. 1 und 2 die Funkenstrecke an der negativen Seite, so wird sich das Gefäss ebenso wie eine Vacuumflasche im Innern positiv electrisch laden, so lange bis an der Funkenstrecke die zur Entladung nöthige Potentialdifferenz erreicht ist, dann aber wird plötzliche Entladung eintreten, und sich eine intensive Lichterscheinung bemerkbar machen, welche an Glanz die erste, falls diese überhaupt wahrzunehmen war, weit übertrifft. Die Strömung bei der Ladung ist in Fig. 1 dargestellt. Dabei bedeuten die punktirten Pfeile die electrische Verschiebung. Fig. 2 zeigt die Entladung. Dieselbe stellt eine rings um die Kathode sich schliessende Strömung dar, welche die Strömung im Hauptkreise, falls die Funkenstrecke nur sehr klein ist, kaum merklich afficirt. Entfernt man die Spitzen des Funkenmikrometers über Schlagweite, so ist auch bei der Entladung die Stromintensität nur gering. Nähert man dieselben aber bei eingeschalteter Flasche bis auf Schlagweite, so kann die Stromintensität so hoch ansteigen, dass eine directe Funkenentladung zwischen beiden Electroden stattfindet. Würde die Funkenstrecke statt auf der negativen auf der positiven Seite eingeschaltet, so würde mutatis mutandis dasselbe gelten wie im erstbeschriebenen Falle. Bei Vermeidung einer Funkenstrecke ist die Stromintensität ebenso wie bei grossen Funkenstrecken sehr gering. Um die abwechselnde Ladung und Entladung des Gefässes anschaulicher zu machen, habe ich in Fig. 3 einen analogen Fall für die gewöhnliche Leydener Flasche dargestellt, ein Schema, welches etwa der Lane'schen Maassflasche entsprechen würde.

Würden die beiden Kugeln durch Spitzen ersetzt, so hätte man auch den Fall der begleitenden langsamen Entladung und würde endlich die Capacität der Flasche nur gering, die Menge zuströmender Electricität aber sehr gross

sein, so könnte ebenso wie beim Entladungsapparat auch directe Funkenentladung zwischen den beiden Kugeln eintreten, wie sehr leicht zu übersehen ist, wenn man sich die Belegungen der Flasche verschwindend klein denkt.

Nach diesen Darlegungen leistet eine Funkenstrecke also mehr als eigentlich beabsichtigt war. Sie gestattet nicht nur Vergrößerung oder Verkleinerung der Entladungsintensität im allgemeinen, sondern bewirkt gleichzeitig eine Verschiedenheit der Intensität an Kathode und Anode derart, dass derjenigen Electrode, welche direct mit der Maschine in Verbindung steht, also die Electricität langsam einströmen lässt, eine geringere Intensität zukommt als der anderen, die durch die Funkenstrecke isolirt ist und somit die angehäuften Electricität plötzlich entladet. Das scheinbare Paradoxon, dass die Intensität an beiden Polen verschieden sein kann, beruht natürlich einfach darauf, dass die beiden Theile der Entladung nicht gleichzeitig sind und unter Intensität die in der Zeiteinheit durchfliessende Electricitätsmenge für den betreffenden Moment zu verstehen ist, nicht der Mittelwerth berechnet als Quotient der während eines längeren Zeitraumes übergeführten Electricität durch die Anzahl dieser Zeiteinheiten.

II. Terminologie.

Hinsichtlich der Benennungen der verschiedenen Arten electricischer Lichterscheinungen in Gasen zeigen sich in der vorhandenen Literatur so grosse Schwankungen, dass es zweckmässig erscheint, hier zunächst die im Folgenden gebrauchten Ausdrücke scharf zu definiren. Jede electricische Lichterscheinung in Gasen besteht im allgemeinen aus vier deutlich unterscheidbaren Abschnitten. Diese sind:

- 1) Negatives Glimmlicht, bestehend aus einem sehr dünnen der Kathode anliegenden „Lichtsaum“ dem „dunkeln Kathodenraum“ und den „Glimmlichtstrahlen“.¹⁾
- 2) Positives Glimmlicht, der Anode dicht anliegend und keinen dunkeln Raum enthaltend.

1) cf. E. Wiedemann, Wied. Ann. 20. p. 757. 1883.

3) Negatives Büschellicht, durch den „Trennungsraum“ von dem negativen Glimmlicht geschieden.

4) Positives Büschellicht, durch die „positive Intermittenzstelle“ von dem positiven Glimmlicht getrennt.
Bemerkungen.

a. Die beiden Glimmlichterscheinungen können allein auftreten und dabei durch einen dunklen Raum getrennt sein oder auch unmittelbar ineinander übergehen.

b. Büschellicht setzt gleichzeitig auftretendes Glimmlicht voraus. Die beiden Büschel können getrennt sein oder sich zu einem Lichtstreifen vereinigen.

c. Sowohl im negativen wie im positiven Büschellicht kann auf den Trennungsraum, resp. die positive Intermittenzstelle abermals ein dunkler Raum folgen. Das Büschellicht „scheidet eine Schicht ab“. Es können selbst mehrere folgen. „der Lichtstreif zerfällt in Schichten“.

d. Es empfiehlt sich, statt der ausführlichen Bezeichnungen Abkürzungen anzuwenden. Ich werde folgende gebrauchen:

Negatives Glimmlicht: $-G$

Positives Glimmlicht: $+G$

Negatives Büschellicht: $-B$

Positives Büschellicht: $+B$

Die besprochenen Benennungen beziehen sich nun auf einzelne Theile der Lichterscheinung. Es lassen sich nun aber auch die Lichterscheinungen als Ganzes in verschiedene Arten unterscheiden, und zwar in folgende vier:

1) Glimmentladung. Nur Glimmlicht. $+$ und $-B$ fehlen ganz.

2) Büschelentladung. Das positive Büschellicht vorherrschend, (von $-B$ meist getrennt oder wenigstens deutlich die Verbindungsstelle erkennen lassend).

3) Streifenentladung. Das negative Büschellicht vorherrschend (gewöhnlich mit dem positiven zu einem Lichtstreif verbunden).

4) Funkenentladung. Sämmtliche Lichtarten zu einem Streifen verschmolzen, der dunkle Kathodenraum durchbrochen.

In der eingangs citirten früheren Abhandlung habe ich diese vier Entladungsarten in etwas anderer Weise definirt. Die Aenderung wurde bedingt durch die Vermehrung des Beobachtungsmaterials, insbesondere durch die eingehendere Untersuchung der Erscheinungen in grossen Gefässen bei geringen Gasdichten.

Bei intensiven Entladungen kann der Vorgang innerhalb der Electrode wenigstens nahe der Oberfläche derselben disruptiv werden, sodass sich die betreffende Stelle zum heftigen Glühen erhitzt und zerstäubt wird. Der entstehende glühende Metaldampf bildet: „Metaldampfbüschel“.

In manchen Fällen lässt sich neben der eigentlichen electrischen Lichterscheinung eine andere beobachten, die ich früher¹⁾ als Glühen des Gases aufgefasst habe. Neueren Versuchen von Hertz zufolge scheint dieselbe eine durch chemische Vorgänge bedingte Phosphoreszenzerscheinung zu sein. In Gasgemengen, welche einer Verbrennung fähig sind, z. B. Luft und Benzoldampf, lässt sich eine die Electrode umgebende Flamme beobachten.²⁾ Derartige Vorgänge sollen als „secundäre Lichterscheinungen“ im Folgenden ausser Betracht bleiben.

III. Einfluss der Intensität.

Bereits p. 696 der früheren Abhandlung habe ich eine Andeutung darüber gegeben, in welcher Weise das Auftreten der verschiedenen Entladungsarten durch die Stromintensität bedingt ist. Das Gesetz ist ein ausserordentlich einfaches:

Glimmentladung entspricht geringer negativer und geringer positiver Intensität.

Büschelentladung geringer negativer und grosser positiver Intensität.

Streifenentladung grosser negativer und geringer positiver Intensität.

Funkenentladung grosser negativer und grosser positiver Intensität.

1) Lehmann, Wied. Ann. 11. p. 700. 1880. Taf. VI. Fig. 45a. und b.

2) cf. Lehmann, Zeitschr. f. Kryst. 1. p. 5. 1877. Taf. XX. Fig. 31c.

Insofern im Falle grosser positiver Stromintensität das Gefäss, als Vacuumflasche dienend, negativ geladen erscheint, im umgekehrten Falle positiv könnte man auch sagen: „Büschelentladung entspricht einem Ueberschuss von negativer Electricität, Streifenentladung einem solchen von positiver“.

In dieser Fassung habe ich das Gesetz gelegentlich der Naturforscherversammlung in Freiburg i. B. ausgesprochen. Da man indess vielfach an dem Worte „Ueberschuss“ Anstoss genommen hat, so habe ich hier die oben gegebene Formulirung vorgezogen. Direct als Beobachtungsergebniss ausgesprochen, würde das Gesetz folgendermassen lauten:

„Glimmentladung erfolgt bei Anwendung von Funkenstrecken, welche die Schlagweite überschreiten, oder bei Ausschluss von Funkenstrecken.

Büschelentladung beim Einschalten einer Funkenstrecke auf der positiven Seite.

Streifenentladung bei Einschalten einer Funkenstrecke auf der negativen Seite.

Funkenentladung beim Einschalten einer Leydener Flasche und solcher Funkenstrecke, dass eine merkliche Ladung der Flasche eintreten kann“.

Allerdings beziehen sich diese letzteren Angaben im Gegensatz zu der früheren Formulirung des Gesetzes auf einen speciellen Fall des Gasdruckes, nämlich auf mässige Verdünnung (wenige Millimeter Quecksilberdruck). Bei Anwendung anderer Gasdichten treten Störungen ein, die im Abschnitt IV näher besprochen werden sollen.

Um eine deutliche Anschauung von den hier zu besprechenden Lichterscheinungen zu geben, habe ich eine Anzahl derselben bei 18 cm Electrodenstanz direct nach der Natur photographirt und nach diesen Photographien lithographisch vervielfältigen lassen.

Fig. 4 zeigt Glimmentladung bei 1,8 mm Druck,

„ 5	„	Funkenentladung	„	„	„
„ 6	„	Streifenentladung	„	„	„
„ 7	„	Büschelentladung	„	„	„

Um diese Entladungsarten zu erhalten, wurde eingeschaltet:

bei Nr. 4 keine Funkenstrécke,

„ „ 5 Funkenmikrometer mit übergeschobenen Röhrchen und Flasche. Funkenstrecke beiderseits 4 mm,

Fig. 6 Funkenstrecke auf der negativen Seite 4 mm gross,

Fig. 7 „ „ „ positiven „ 4 „ „

Da zwischen Glimm- und Büschelentladung einerseits, ebenso wie zwischen Glimm- und Streifenentladung andererseits keine scharf bestimmbare Grenze existirt, wenigstens nicht hinsichtlich der Entstehungsbedingungen, so erscheint es von Interesse, auch die Uebergangsformen darzustellen. Zu diesem Zwecke sind die Figuren 8, 9, 10, 11, bei einem Druck von 1 mm aufgenommen.

Fig. 8 zeigt Streifenentladung bei $-\frac{1}{10}$ mm Funkenstrecke,

„ 9 „ Büschelentladung „ $+\frac{1}{10}$ „ „

„ 10 „ Streifenentladung „ -2 „ „

„ 11 „ Büschelentladung „ $+2$ „ „

Insofern der Unterschied zwischen Streifen- und Büschelentladung darauf beruht, dass im ersten Falle das Entladungsgefäss die Rolle einer positiven, im anderen einer negativen geladenen Vacuumflasche spielt, so muss sich eine Aenderung ergeben, falls wir die Bindung der Electricität durch ableitende Berührung des Gefässes verstärken. Um solche Aenderungen nachzuweisen, dienen die Aufnahmen Fig. 12—15, einem Druck von 6 mm entsprechend.

Fig. 12 zeigt Streifenentladung bei $-1\frac{1}{2}$ mm Funkenstrecke

„ 13 „ Büschelentladung „ $+1\frac{1}{2}$ „ „

„ 14 „ Streifenentladung mit Ableitung

„ 15 „ Büschelentladung „ „

Die Ableitung wurde bewirkt durch ein aufgelegtes Stanniolblättchen, welches durch einen in den Figuren sichtbaren Draht mit der Erde in Verbindung stand.

Ein bestimmter spezifischer Farbenunterschied des positiven oder negativen Lichtes ist nicht vorhanden. Zuweilen erscheinen beide fast gleich gefärbt, bald neigt das positive, bald das negative mehr zu rother oder blauer Nuance, sodass bei gleicher Dicke der leuchtenden Schicht der Unter-

schied offenbar hauptsächlich in der verschiedenen Intensität der Strömung zu suchen ist.

Die Art und Weise der Abhängigkeit lässt sich leicht erkennen, wenn wir durch Abänderung der Funkenstrecke allmähliche Uebergänge hervorrufen. Als Regel gilt:

„Zieht sich die Entladung auf einen engeren Querschnitt zusammen, so wird die Farbe mehr röthlich, verbreitet sie sich dagegen auf grössere Flächen, so ändert sich die Farbe in bläulich.“

Abgesehen von verstärkter Absorption der Strahlen bei grösserer Dicke der leuchtenden Schicht¹⁾ könnte man auch sagen: „Bei grosser Stromdichtigkeit ist die Farbe roth, bei geringer blau“ und auch umgekehrt:

„Ist die Farbe roth, so ist daselbst die Stromdichtigkeit gross, ist die Farbe blau, so ist die Stromdichte gering.“

Da gewöhnlich (bei gleichem Querschnitt) das negative Licht blau, das positive roth erscheint, so ist zu schliessen, dass in solchem Falle die Stromintensität an der Kathode geringer ist als an der Anode, d. h. dass sich die Einzelentladungen an der Kathode rascher folgen, als an der Anode. Dasselbe gilt von $-G$ und $-B$. Somit können $-G$ und $-B$ nicht gleichzeitige Erscheinungen sein, wodurch nicht ausgeschlossen sein mag, dass in bestimmter Periode doch eine $-G$ -Entladung mit einer $-B$ -Entladung zusammenfällt.

Selbst die beiden Theile von $-G$, nämlich der „rothe Saum“ und die „blauen Glimmlichtstrahlen“ sind hiernach in Bezug auf die Intensität und folglich auch der Zeit, resp. Dauer nach verschieden.

IV. Einfluss der Gasdichte.

Wurde unter im übrigen gleichen Bedingungen wie bei den eben besprochenen Versuchen der Druck der Luft verkleinert oder vergrössert, so ergaben sich Aenderungen der Entladung, wie sie die Figuren 16—43 zeigen. Eine ins einzelne gehende Beschreibung dieser verschiedenen Formen der Lichterscheinung erscheint hier unnöthig, da es sich

1) cf. Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik. 2. p. 299. 1883.

dabei nicht um schwierige Untersuchungen handelt, sondern um einfache Experimente, die leicht mittelst der gewöhnlichen Vorlesungsapparate wiederholt werden können. Ausserdem ist das Gesetz, welches diese Aenderungen beherrscht, so einfach, dass es sich schon ohne weiteres aus den gegebenen Figuren erkennen lässt.

Die Figuren 16—20 zeigen die Aenderungen der Streifenentladung, die Figuren 21—25 diejenigen der Büschelentladung, und zwar nach wachsenden Drucken geordnet. Ein Vergleich der Figuren einer Reihe lehrt:

„Mit abnehmender Dichte dehnen sich die Lichterscheinungen mehr und mehr aus, mit zunehmender schrumpfen sie zusammen und zeigen ein Bestreben zur Verzweigung.“

Bei sehr grosser Verdünnung wird die Büschelentladung der Streifenentladung sehr ähnlich.

Uebergangsformen zwischen Büschel- und Streifenentladung lassen sich nun aber unter normalen Verhältnissen d. h. bei mässigen Graden der Verdünnung dadurch erhalten, dass nicht allein an der positiven, sondern auch an der negativen Seite eine kleine Funkenstrecke eingeschoben wird. Somit ist zu schliessen:

„Bei grosser Verdünnung tritt an der Kathode ein Hinderniss auf, welches ähnlich wie eine Funkenstrecke daselbst wirkt, sodass Streifenentladung vorherrschend wird.“

Bei zunehmendem Druck wird, wie schon Fig. 20 zeigt, $-B$ durch ein unsichtbares Hinderniss von seinem normalen Wege abgelenkt und bei noch höheren Drucken schliesslich eine Vereinigung von $-$ und $+B$ überhaupt unmöglich, sodass sich weiter folgern lässt:

„Bei geringer Verdünnung tritt in der Nähe der Kathode ein Hinderniss auf, welches die Bildung des Lichtstreifens beeinträchtigt, sodass Büschelentladung vorherrschend wird.“

Um zu zeigen, dass diese Sätze durchaus nicht von der zufälligen Beschaffenheit der Electroden oder deren Distanz abhängen, habe ich noch die Figuren 26—30 (Streifenent-

ladung) und 31—35 (Büschelentladung) beigelegt, welche kugelförmigen Electroden entsprechen, deren Abstand kaum die Hälfte desjenigen der früher benutzten drahtförmigen ist.

Sehr schön lässt sich in diesem letzteren Falle die Einwirkung der Kathodenhindernisse auf die Glimmentladung erkennen. Die Figuren 36—43 stellen diese Veränderungen dar in der Reihenfolge, wie sie wachsender Verdünnung entsprechen. Ausgehend vom „Normalzustande“ (mässiger Verdünnung) lässt sich erkennen, wie bei abnehmendem Druck auch an der Anode ein Hinderniss auftritt, welches $+G$ nöthigt, wenigstens theilweise von der Rückseite der Electrode auszugehen und sich um dieselbe herumzuwinden. Schliesslich können beide G überhaupt nicht mehr von den Kugeln ihren Ausgang nehmen, sondern nur von Punkten in einiger Entfernung davon, während der ganze zwischen liegende Raum dunkel bleibt. Wachsender Druck bewirkt das Auftreten von B -Licht, welches zunächst eine sehr unsichere und wechselnde Stellung in der Mitte einnimmt, dann sich als röthlicher Lichtpinsel vor $-G$ festsetzt und damit zuletzt den sogenannten negativen Büschel bildet. Auf der Anode bilden sich allmählich mehrere Fleckchen G -Licht, die endlich zu der bekannten „Glimmlichthaube“ verschmelzen. Aehnlich häufen sich auch die negativen Büschel und können unter Umständen ebenfalls zu einem zusammenhängenden Lichtnebel zusammentreten, dem „negativen Glimmen.“ Sobald B -Licht auftritt, kann die Entladung, den gegebenen Definitionen zufolge (im Gegensatze zu meinen früheren Definitionen), nicht mehr Glimmentladung genannt werden. Correct genommen, würde z. B. Fig. 37 als Büschelentladung zu bezeichnen sein und Fig. 40 als Streifen, da auch hier offenbar der lange Lichtschweif, wenn auch nicht deutlich von $+G$ getrennt, als $+B$ anzusehen ist. Freilich ist diese Art von Büschel- und Streifenentladung anscheinend wesentlich verschieden von der früher beschriebenen, dagegen sehr ähnlich den mittelst des mikroskopischen Entladungsapparates¹⁾ erhaltenen Formen. In Wirklichkeit ist

1) Vgl. die frühere Abhandlung.

der Unterschied nur ein geringfügiger, wie später noch besprochen werden soll. Mit Rücksicht hierauf lässt sich also behaupten:

„Bei Verdünnung zeigt die Glimmentladung ein Streben, in Streifenentladung überzugehen, bei Verdichtung in Büschelentladung.“

Aus der oben gegebenen Darstellung der an den Electroden auftretenden Hindernisse liess sich dies schon erwarten. Was schliesslich den Funken anbelangt, so durchbricht derselbe den Kathodenraum. Für ihn sind also die Hindernisse nur insofern von Belang, als sie das zur Bildung desselben nöthige Potentialgefälle erhöhen können, in Bezug auf die Form tritt nur eine geringe Aenderung ein, indem die mittlere Strecke desselben mit zunehmender Verdünnung sich immer mehr verbreitert. Die Ausgangspunkte an den Electroden bleiben stets Punkte, die in der Regel glänzende Metaldampfbüschel aussenden. Bei hohen Verdünnungen lagert sich um diese Metaldampfbüschel auf der Kathode ein mehr oder minder ausgedehntes Stück des „rothen Saumes“, welches zuweilen die ganze Rückfläche der Electrode überzieht, an den einspringenden Stellen dicker werdend, manchmal gar die ganze Kugel einhüllend, sodass diese auf ihrer Vorderseite überhaupt nur diesen dünnen Lichtsaum zeigt.

V. Einfluss der Electrodendistanz.

Vergrösserung der Electrodendistanz bewirkt nur entsprechende Verlängerung des *B*-Lichtes, falls die Stromintensität der vergrösserten Luftstrecke entsprechend verändert wird. Interessanter sind die Erscheinungen bei Verminderung der Distanz auf Bruchtheile eines Millimeters.

Die Figuren 44—47 zeigen die Entladung in solchem Fall bei einem Druck von 10 mm. Deutlicher sind die Figuren 49—52, einem Druck von $\frac{1}{2}$ mm entsprechend. Man sieht daraus:

„+ *B*-Licht kann nicht in den Trennungsraum eintreten, + *G* nicht in den dunkeln Kathodenraum. + *G* verschmilzt bei grosser Annäherung

mit $-G$ zu einer einzigen Lichtmasse, und ebenso $+B$ mit $-B$.

Wurden statt der spitzen Electroden Platten gewählt (Zehnpfennigstücke), so traten im wesentlichen dieselben Erscheinungen ein, wie dies die Figuren 53–56 zeigen.

VI. Einfluss der Form der Electroden.

Inwieweit Abrundung oder Zuschärfung der Electroden von Einfluss sein können, ist zu ersehen aus den Figuren 57–59 (Büschelentladung) und 60–62 (Streifenentladung), einem Druck von 20 mm entsprechend, und den Figuren 63–65 (Büschelentladung) und 66–68 (Streifenentladung), bei einem Druck von 4 mm aufgenommen. Bei genauer Betrachtung erkennt man daraus leicht den Satz:

„Streifenentladung wird erschwert durch stumpfe Kathode,“

„Büschelentladung wird erschwert durch stumpfe Anode.“

Da nun Streifenentladung grosse negative, Büschelentladung grosse positive Stromintensität erfordert, so lässt sich dies auch so aussprechen:

„Abstumpfung einer Electrode wirkt wie Verminderung der Stromintensität an derselben.“

Besonders erwähnenswerth erscheinen ferner erstens: geringe Distanz bei geringerer Dichte des Gases; zweitens: grosse Distanz bei grosser Dichte des Gases (ohne Gefäss).

Den ersteren Fall erläutern die Figuren 69–74. Man sieht:

„Ist die Platte positiv, die Spitze negativ, so vermag sich $+G$ an derselben zu halten, ist dagegen die Platte negativ, die Spitze positiv, so werden $+G$ und $+B$ zurückgedrängt.“

Die positive Spitze erscheint dunkel, soweit sie sich im dunkeln Kathodenraume befindet, sie ist mit $+G$ bedeckt zwischen diesem und dem Trennungsraum, und mit $+B$ ausserhalb des letzteren bis auf gewisse Entfernung.

Im anderen Falle lassen sich folgende Sätze schon a priori erkennen:

1) „Zuschärfung der negativen Electrode erschwert die Funkenentladung mehr als Zuschärfung der positiven“, denn die negative Electricität strömt leichter aus, sodass die Potentialdifferenz nicht so leicht zu dem für Funkenbildung nöthigen Werthe ansteigen kann.

2) Zuschärfung beider Electroden erschwert aus gleichem Grunde die Funkenentladung in hohem Grade.

3) Bei Ableitung des einen von beiden Conductoren erscheint die Lichterscheinung nur am isolirten, und zwar am negativen $-G$ und $-B$ (Neg. Büschel., Neg. Glimmen.) positiven $+G$ und $+B$ (Pos. Büschel.) oder $+G$ (Pos. Glimmen).

VII. Einflüsse verschiedener Art.

1. Einfluss der Form des Gefässes.

a. Verlängertes Gefäss. — Wird das Gefäss über die Electroden hinaus verlängert, so erstreckt sich im Falle der Büschel- und Streifenentladung die Lichterscheinung auch in die Verlängerungen, da ja auch diese Theile der Vacuumflasche bilden. Es ist dies ersichtlich aus Fig. 75 (Streifenentladung).

b. Kugelförmiges Gefäss. — Bei kleinen kugelförmigen Gefässen wirkt das Eindringen der Electricität in die Glaswände störend. So zeigen die Figuren 76—79 vier kurz nacheinander in demselben Gefässe erhaltene Formen der Glimmentladung. Nach wenigen Minuten war überhaupt keine Glimmentladung mehr zu erhalten, sondern nur nach Streifenentladung. (Die Verdünnung betrug etwa $\frac{1}{2}$ mm.)

c. Capillares Gefäss. — Noch störender muss natürlich das Eindringen der Electricität dann werden, wenn sich an einer Stelle der Querschnitt der Röhre sehr stark verengt. So ist in einem Rohre, welches in der Mitte erweitert, an den Enden aber capillar ausgezogen ist, überhaupt nur Funkenentladung zu erhalten, da die Electroden eng umschliessenden Capillaren ebenso wirken, wie Glasröhrchen, welche auf die Spitzen des Funkenmikrometers aufgeschoben werden. Hat die Röhre eine Form, wie die bekannten Spectralröhren, so findet die Entladung

in den weiten Theilen ungestört statt. Die Electricität strömt aber nicht durch das Capillarrohr, sondern dient zunächst dazu, dasselbe nach Art des bei Influenzmaschinen gebräuchlichen Röhrencondensators zu laden. Erst wenn dort das Potentialgefälle gross genug geworden, geht die Entladung wirklich durch die ganze Röhre. Die Entladung im Capillarrohr erfolgt in grösseren Pausen als die in den Erweiterungen, sie entladet aber auch mehr Electricität und erscheint somit intensiver.

d. Leitendes Gefäss und freie Luft. — Ist die Gefässwand leitend (metallisch), so ist eine Ladung nach Art der Vacuumflasche unmöglich, bei geringem Durchmesser kann sie aber selbst die Rolle einer Electrode übernehmen, derart, dass die der Kathode benachbarte Wand als Anode dient, die Strömung nun durch das Metall hindurch fortschreitet, bis zu dem die Anode umschliessenden Theile, welcher dann, als Kathode dienend, die Entladung zur Anode veranlasst.

Ist der Durchmesser des Gefässes sehr gross gegen die Distanz der Electroden, so gleicht die Entladung derjenigen in freier Luft. Glimm- und Funkenentladung ändern sich dabei nur wenig, Streifen- und Büschelentladung aber nehmen die bereits in Abschnitt V erwähnten, den mikroskopischen Entladungen ähnlichen Formen an. Nennen wir diese Mikro-Büschel-, resp. Streifenentladung, die gewöhnlichen dagegen Makro-Büschel-, resp. Streifenentladung, so lässt sich demnach behaupten:

„In freier Luft oder bei verschwindendem Einfluss der Gefässwand erscheint Mikro-Büschel-, resp. Streifenentladung, in kleinen, nichtleitenden Gefässen und bei reichlicher Zufuhr von Electricität entsprechende Makroentladung.“

2. Einfluss der Electrodenzahl.

Verwendet man Electroden mit zwei oder mehr Spitzen, so geht die Entladung nur von einer der Spitzen aus, zuweilen alternirend von der einen oder anderen. Ueberzieht — G bei grösseren Verdünnungen die ganze Electrode, so erscheint

es in dem einspringenden Winkel mit doppelter Intensität, $+G$ bleibt dagegen im einspringenden Winkel aus.

Werden mehrere Electroden an verschiedenen Stellen des Gefäßes eingesetzt, so erscheint die Entladung zwischen zwei benachbarten, zuweilen alternirend zwischen verschiedenen Paaren, z. B. bei der Anordnung Fig. 80 bald rechts, bald links. Als Electroden dienten dabei seitlich eingesetzte Ringe.

3. Einfluss electricisirter Körper.

Annäherung einer geriebenen Harz- oder Siegelackstange ist bei Entladungen in luftverdünnten Räumen ohne wesentlichen Einfluss. Bei Entladungen in freier Luft tritt nach Righi Ablenkung nach electrostatischen Gesetzen ein. Wird bei Versuchen in evacuirten Gefäßen auf der Aussenseite eine kleine Belegung angebracht, die mit der einen oder anderen Electrode in Verbindung steht, so treten Modificationen der Lichterscheinungen ein, ähnlich wie die in Fig. 14 und 15 dargestellten.

„Die Ablenkung ist im allgemeinen derart wie bei Ableitung zur Erde, und zwar stärker, wenn durch die Eigenelectricisirung der Belegung die Bindung der Electricität (das Gefäß als Vacuumflasche betrachtet) begünstigt wird, schwächer im umgekehrten Falle“.

4. Einfluss magnetischer Körper.

Nach den bekannten Untersuchungen erfolgt die Ablenkung des Büschellichtes ähnlich wie diejenige eines biegsamen Stromleiters, die des $-G$ -Lichtes nach Art eines paramagnetischen Pulvers. Eigene Versuche, welche ich nach dieser Richtung unternahm, ergaben Folgendes: Wird ein Gefäß, wie das in den Fig. 81 und 82 gezeichnete, dessen Boden aus einer Kupferplatte besteht, auf die Pole eines Ruhmkorff'schen Electromagnets aufgesetzt und die Entladung bei verschiedenen Gasdichten untersucht, so erfolgt bei Drucken über 20 mm keine merkliche Ablenkung. Dann beginnt sich die $-B$ -Entladung nach einer Seite zu krümmen, wobei die Stelle, an der sich $+$ und $-B$ zusam-

mensetzen, am meisten abgelenkt erscheint. Gleichzeitig tritt eine seitliche Contraction der Lichtmasse ein, und bei grosser Verdünnung (1 mm) erscheint die *B*-Entladung als papierdünne, von zwei Bogenlinien begrenzte Lichtfläche, wie dies Fig. 81 zeigt. Werden die Pole gewechselt, sodass die Spitze negativ, die Platte positiv ist, so geht $+B$ von sämtlichen Punkten eines Halbkreises aus und bildet ein Gewölbe, dessen verticale Grenzfläche des in die Richtung der magnetischen Kraftlinien gelagerte $-G$ -Licht bildet. (Fig. 82.) Speciell gilt diese Regel für die Streifenentladung. (Fig. 83 zeigt Glimmlichtbogen für ein kugelförmiges Gefäss.) Im Falle der Glimmentladung erstreckt sich der Glimmlichtbogen nicht bis zur Platte, sondern nur auf geringe Entfernung von der Kathode, während sich das Gewölbe vom Büschellicht zu einem Streifen zusammenzieht, dessen Ebene auf der Fläche des Glimmlichtbogens senkrecht steht. (Fig. 84 zeigt diese Erscheinung für ein kugelförmiges Gefäss.) Büschelentladung verhält sich ähnlich wie Streifen, nur ist wie bei der Glimmentladung ein Bogen des *B*-Lichtes bevorzugt. Der Funke erleidet entweder keine Ablenkung oder folgt der Umgrenzung des Büschellichtgewölbes, und zwar vom Ende der Kathode ausgehend, also die innere Begrenzung des Glimmlichtbogens bildend, dagegen die äussere Grenze der Basis des Gewölbes. In kürze liesse sich hiernach das magnetische Verhalten des Lichtes in folgenden Satz zusammenfassen:

„Denken wir uns mit dem Strome positiver Electricität schwimmend, so legen wir denjenigen Weg zurück, der durch die electrodynamischen Gesetze für einen beweglichen Stromleiter vorgeschrieben ist, bis die durch die Kathode gehende magnetische Kraftlinie erreicht ist. Alsdann findet die weitere Bewegung längs dieser Kraftlinie statt.

Die Ablenkung nimmt rasch ab mit zunehmender Gasdichte und ist bei gewöhnlichem Drucke sowie bei Funkenentladung verschwindend klein.

Bei Glimm- und Funkenentladung beschränkt sich die Ausgangsstelle des Stromes an der Anode

nahezu auf einen Punkt, bei Streifen- und Büschelentladung nimmt sie eine grössere Fläche ein.“

5. Einfluss der Temperatur.

Wird das Gas etwa dadurch, dass man eine Electrode mittelst eines galvanischen Stromes zum Glühen erhitzt oder auch durch den Durchgang des Stromes selbst erwärmt, wie dies bereits Hittorf in ausführlicher Weise gezeigt hat, so verschwindet allmählich die leuchtende Entladung. Nach meiner Ansicht sind hier zweierlei Entladungsprocesse wohl zu unterscheiden, die dunkle Entladung (Zerstreuung der Electricität) und die leuchtende. Auch bei hoher Temperatur kann ein Gas in sehr intensives Leuchten gebracht werden, falls nur durch Zerstreuung nicht soviel Electricität entladen wird, dass das zur leuchtenden Entladung nöthige Potentialgefälle unerreicht bleibt, wie dies ja die Funken einer electrischen Batterie und die Erscheinung des Blitzes lehren. Dass nun bei Erhöhung der Temperatur das Leuchten bei ungeänderten Versuchsumständen aufhört, scheint mir zu beweisen, dass: „Temperaturerhöhung die Zerstreuung oder Fortführung der Electricität auf mechanischem Wege (Convection) ganz ausserordentlich begünstigt, sodass das zur leuchtenden Entladung nöthige Potentialgefälle im allgemeinen nicht mehr erreicht wird.“

6. Einfluss der chemischen Natur des Gases.

Bereits in der früheren Abhandlung sind einige Erscheinungen der Entladungen in Gasen von verschiedener chemischer Natur dargestellt und beschrieben. Da bei zusammengesetzten Gasen eine Zersetzung eintritt, sodass durch die Entladung selbst die Natur des Gases geändert wird, so habe ich weitere Untersuchungen hauptsächlich bei gesättigten Dämpfen ausgeführt, da hier eine Trennung der (gasförmigen) Zersetzungsproducte von den Dämpfen unschwer zu ermöglichen ist. Die Principien, nach denen die Versuche ausgeführt wurden, sind in einer früheren Abhandlung¹⁾ dar-

1) O. Lehmann, Zeitschr. f. Instrumentenk., März 1882, p. 76.

gelegt. In Bezug auf die Form der Entladung ergab sich wenig Neues. Die Hauptbedeutung solcher Versuche liegt in dem Nachweis, dass die zusammengesetzten Dämpfe durch die leuchtende Entladung ausserordentlich rasch zer-
setzt werden, sodass dieser Umstand nicht als ein die Entladung begleitendes Phänomen erscheint, sondern als das eigentliche Wesen derselben. Vielleicht beruht das Erforderniss eines bestimmten Potentialgefälles zur Erzeugung leuchtender Entladung auf der Nothwendigkeit einer Zerreissung der Molecüle durch electriche Kräfte, während das Leuchten selbst erzeugt wird durch den chemischen Process der Wiedervereinigung. Es würde dann Entladung und Leuchten überhaupt nicht gleichzeitig sein, sondern das Leuchten später erfolgen und die Entladung vielleicht um relativ erhebliches überdauern. Da die Versuche in dieser Richtung noch nicht abgeschlossen sind, begnüge ich mich mit der gegebenen Andeutung.

7. Einfluss der chemischen Natur der Electroden.

Auch in dieser Hinsicht habe ich bis jetzt nur wenige Versuche angestellt, die in der früheren Abhandlung bereits beschrieben sind. Als Electroden dienten: feste Metalle, Kohle, Quecksilber, Wasser, kaltes und heisses Glas.

Die erfolgten Aenderungen der Lichterscheinungen erklären sich meist durch die Verminderung der Entladungsintensität infolge des geänderten Widerstandes der Electroden.

8. Einfluss von Strömungen im Gase.

Wird senkrecht auf die Bahn der Entladung ein Luftstrom gerichtet, so erfolgt meist eine partielle Ablenkung derselben, wie dies in mehreren Specialfällen in der früheren Abhandlung beschrieben ist. Diese Ablenkungen zeigen mit den magnetischen insofern eine Aehnlichkeit, als die Funkenentladung entweder gar nicht abgelenkt wird oder der Bahn einer mit ihr alternirenden anderen Entladungsart folgt.

In Kürze lässt sich dieses Verhalten der Electricität gegen Strömungen in folgender Weise aussprechen:

„Bewegung der Luft wirkt derart, als ob die

Entladung nicht direct zwischen den Electroden erfolgte, sondern zwischen diesen und Luftschichten, die durch die Strömung fortgeführt werden.“

VIII. Faraday's Theorie.

Unter allen Theorien der electricischen Entladung in Gasen, die im Laufe der Zeit aufgestellt worden sind, ist Faraday's alte Theorie die einzige, welche mit sämmtlichen Erscheinungen in Einklang zu bringen ist, und zwar nicht unter Schwierigkeiten, sondern so leicht und einfach, dass es nur weniger Zusätze bedarf, um alle Beobachtungen zu erklären.

Faraday äussert sich wie folgt: (Nr. 1434) „Wenn das Ende eines isolirten Stabes in die Mitte eines Zimmers hineinragt, so findet zwischen ihm und den Wänden des Zimmers, quer durch das Dielectricum, die Luft, eine Vertheilung statt, und die Linien der Vertheilungskraft häufen sich auf jenes Ende in grösserer Menge als irgendwo, oder die Lufttheilchen am Ende des Stabes werden höher polarisirt als an irgend einer anderen Stelle des Stabes. Die in Querschnitten auf den Linien der Vertheilungskraft liegenden Lufttheilchen sind am wenigsten polarisirt in Schnitten gegen die Wände hin und am meisten polarisirt in denen näher am Ende der Drähte; so kann es wohl geschehen, dass ein Theilchen am Ende des Drahtes sich in einer Spannung befindet, die unmittelbar in Entladung übergeht, während die nur wenige Zoll davon entfernten in ihrer Spannung noch unter diesem Punkte sind. Gesetzt aber, der Stab sei positiv geladen, und ein ihm nahes Lufttheilchen *A* sei polarisirt, habe demnach seine negative Kraft gegen den Stab und seine positive Kraft von ihm abgekehrt. Im Augenblick, da eine Entladung stattfindet zwischen der positiven Kraft des der Luft gegenüberstehenden Stabtheilchens und der negativen Kraft des dem Stab zugewandten Lufttheilchens, wird das ganze Lufttheilchen positiv electricisirt, und wenn im nächsten Augenblick der entladene Stab, vermöge Zuleitung von der hinteren Metallfläche seinen positiven Zustand wieder annimmt, wirkt er nicht nur auf das Theilchen jenseits *A*, in-

dem er *A* wieder in den Polarisationszustand versetzt, sondern *A* selbst übt vermöge seines Polarisationszustandes eine besondere Vertheilungswirkung auf diese entfernteren Theilchen aus, und demzufolge ist die Spannung zwischen *A* und *B* so erhöht, dass auch dort eine Entladung stattfindet, so gut wie zwischen dem Metall und *A*....“ Freilich hat schon Faraday eine Beobachtung gemacht, die mit dieser Theorie anscheinend nicht wohl übereinstimmt oder wenigstens die Hypothese eines qualitativen Unterschiedes von positiver und negativer Electricität nöthig macht, während nach allen was uns sonst über electriche Ströme bekannt ist, eine Verschiedenheit lediglich dem Sinne nach stattfindet, im übrigen ein Strom positiver Electricität nach der einen Richtung durchaus gleichwerthig ist einem Strom negativer nach der entgegengesetzten. Faraday beschreibt diese Thatsache in Nr. 1501 seiner Untersuchungen.¹⁾

„Die Schlüsse, zu welchen ich gelange, sind: erstlich, dass wenn zwei gleiche in Luft befindliche kleine leitende Flächen electrifizirt sind, die eine positiv die andere negativ, die negative bei einer etwas geringeren Spannung als die positive sich gegen die Luft entladen kann; zweitens, dass, wenn die Entladung stattfindet, in jeder Zeit weit mehr von der positiven Fläche als von der negativen übergeht. Dieser letztere Schluss wird durch die optische Analyse der positiven und negativen Büschel zum Ueberfluss bewiesen, da die letztere Reihe von Entladungen sich fünf- bis sechsmal schneller als die erstere erweist.“

Diese Beobachtungen beziehen sich zunächst allerdings nur auf Büschelentladung. Für Streifenentladung wurde später von G. Wiedemann und Rühlmann²⁾ dasselbe als gültig befunden:

„... Hieraus lässt sich ableiten, dass zur Einleitung einer Entladung in der Gasschicht an der positiven Electrode ein grösseres Potential auf die auf der Flächeneinheit aufgehäufte Electricität erforderlich ist als an der negativen Electrode.“³⁾

1) Faraday, Pogg. Ann. 48. p. 277. 1839.

2) Wiedemann, Galv. 2. p. 294.

3) cf. auch Röntgen, Gött. Nachr. 1878. p. 390—404.

Auch bei Funkenentladung zeigt sich dieselbe Erscheinung, wie Masson¹⁾ gefunden hat:

„Wird der negative Pol einer funkenerzeugenden Maschine mit dem Erdboden verbunden, während der positive isolirt ist, so ist die Lichtintensität doppelt so gross wie im umgekehrten Falle. Die Electricitätsmengen, welche in beiden Fällen zur Entladung kommen, verhalten sich wie $\sqrt{2}:1$.“

Für Glimmentladung lässt sich gleiches erschliessen aus einer Beobachtung von Feddersen²⁾: Erzeugt man auf der positiven Electrode der Holtz'schen Maschine Glimmlicht und dreht die negative Electrode, so wandern die correspondirenden leuchtenden Punkte auf der positiven mit; ein Drehen der positiven Electrode ist dagegen ohne Einfluss.“ Ferner: Warren de la Rue und H. Müller³⁾: „Die Entladung einer Chlorsilberbatterie von 8040 Elementen erscheint im rotirenden Spiegel bei positiver Spitze und negativer aus einzelnen Bildern bestehend, im umgekehrten Falle als continuirliches Lichtband. Ein auf die Platte gelegtes Stück Löschpapier adhärirt stärker, wenn die Spitze negativ, als wenn sie positiv ist.“ Ferner Hittorf⁴⁾: „Das Flugrädchen hört auf zu laufen, sobald die Entladungsintensität einen genügend hohen Werth erreicht. Bei positiver Electrisirung geschieht dies erst bei 9 mm Druck, bei negativer schon bei 40 mm.“

Nach Faraday's Theorie sollte man erwarten, dass dasjenige Gefälle des Potentials (Potentialdifferenz pro Längeneinheit), welches zur Einleitung der Entladung erforderlich ist, und welches ich kurzweg Entladungsgefälle nenne, einzig abhängt von der chemischen Zusammensetzung, resp. dem physikalischen Zustand des Gases, in welchem die Entladung stattfindet.

Aus den oben angeführten Thatsachen folgt nun aber, dass dieses Gefälle in der Nähe der Kathode geringer ist als an der Anode, und da im übrigen die Theorie vollkommen mit der Erfahrung in Einklang steht, so schliesse ich, dass diese Aenderung des Entladungsgefälles in der Nähe

1) Masson, *Compt. rend.* 30. p. 627. 1850.

2) Feddersen, *Pogg. Ann. Jubelb.* p. 466. 1874.

3) Warren de la Rue u. H. Müller, *Compt. rend.* 86. p. 1072 bis 1075. 1878.

4) Hittorf, *Wied. Ann.* 7. p. 556. 1879.

der Electroden nur eine secundäre Erscheinung ist, in gewissem Sinne etwas vergleichbar der galvanischen Polarisation beim Durchgang des Stromes durch eine zersetzbare Flüssigkeit. Das folgende Kapitel soll diesen Gedanken weiter ausführen:

IX. Electrisirung der Luft durch Reibung.

Denken wir zwei plattenförmige Electroden einander gegenübergestellt und denselben immer mehr und mehr Electricität zugeführt, bis schliesslich Entladung eintritt, nehmen wir ferner an, es würden die Potentialwerthe an den verschiedenen Punkten der Axe beider Electroden und der Trennungsschicht durch eine ebene Curve über dieser Axe dargestellt, so würde diese Curve nach bekannten Sätzen in jedem Momente aus drei geradlinigen Stücken bestehen, nämlich den Parallelen ab und cd (Fig. 85) über den Electroden und der geneigten Geraden bc in der Zwischenschicht. Je höher die Potentialdifferenz ansteigt, um so grösser wird die Neigung der Linie, und im Momente der Entladung würde sie gerade dem Entladungsgefälle gleich geworden sein, falls nicht die störende secundäre Erscheinung eine Aenderung bewirkte, die zur Folge hat, dass an der Kathode das Entladungsgefälle früher, an der Anode später erreicht wird als im Normalfalle. Im Momente der Entladung muss also die Potentialcurve etwa eine Form besitzen, wie sie in Fig. 86 dargestellt ist.

Zwischen f und g , d. h. dicht an der Kathode ist die Linie parallel zu xy , welche das Entladungsgefälle repräsentirt, cf ist dagegen nahezu parallel der Axe, cd steiler, bc flacher als die normale gerade Linie bg , welche punktirt angedeutet ist. Wir können uns diese Curve zusammengesetzt aus zwei Curven denken, nämlich der Geraden uw und der zweifach nach positiver Seite ausgebogenen bg (Fig. 86). Diese letztere würde nun aber einer positiven Electrisirung der Luft entsprechen, welche an der Anode über einen etwas grösseren Raum vertheilt, an der Kathode dagegen dicht zusammengedrängt ist. Die Erzeugung dieser positiven Electrisirung kann erst unmittelbar vor eintretender Ent-

ladung stattfinden oder vielleicht richtiger: „Sobald diese Electrisirung eintritt, muss die Entladung momentan erfolgen, obschon das Gefälle auf der übrigen Strecke der Funkenbahn, wie vorausgesetzt, noch nicht den Entladungswerth erreicht hat. Jedenfalls muss nämlich die Entladung auf der Strecke *fg* eintreten, nun aber bildet die von der Entladung durchsetzte Luftstrecke gewissermassen eine Verlängerung der Kathode, es erfolgt in gleichem Schritte mit der Entladung, allerdings mit unmessbarer Geschwindigkeit, eine Aenderung der Potentialcurve derart, als ob die Kathode nunmehr (etwa mit der Schnelligkeit eines Lichtstrahls) vorgeschoben würde, sodass der ganze übrige Theil der Curve grössere Neigung annimmt, und die Entladung schliesslich die ganze Schicht zwischen den beiden Electroden durchsetzt, falls nur das Potentialniveau auf den Electroden selbst nicht merklich geringer wird, d. h. die Zufuhr der Electricität hinreichend gross ist, um die Potentialdifferenz der beiden Electroden nicht allzusehr sinken zu lassen. Ist dies nicht der Fall, dann wird freilich die Entladung schon in geringer Entfernung von der Electrode ins Stocken kommen, wir erhalten nicht wie im ersten Fall „Funken“, sondern „Glimmentladung“.

Die Untersuchung hätte hiernach sich mit der Aufgabe zu befassen, inwiefern eine spontane positive Electrisirung der Luft in der angedeuteten Weise in der Nähe der Electroden möglich ist und sich aus bekannten Thatsachen deduciren lässt.

Wird ein Tröpfchen Wasser in eine Oelschicht zwischen zwei auf dem Objectträger eines Mikroskops befestigte Electroden gebracht und diesen Electricität zugeführt, so streckt sich das Tröpfchen infolge der bekannten auftretenden Kräfte in die Länge. Werden die Electroden alternirend geladen und entladen, so kommt das Tröpfchen in entsprechende oscillirende Bewegung. Wird ein Glasgefäss, durch dessen Boden eine mit Wasser gefüllte U-förmige Röhre eingeführt ist, mit einer Mischung von Benzol und Schwefelkohlenstoff, welche gleiches specifisches Gewicht mit Wasser besitzt, gefüllt und nunmehr das Wasser des U-Rohres mit einer

Electricitätsquelle in Verbindung gesetzt, so wölbt sich der Meniscus des Wassers immer mehr und mehr, verlängert sich kegelartig, schnürt einen Tropfen ab, spitzt sich dann zu und sendet äusserst feine Tröpfchen aus. Wird eine mikroskopische Electrode mit Wasser umgeben und dieses wieder mit Oel umgossen, in welches die andere Electrode eintaucht, so erhebt sich die Wasserfläche in zahlreichen sehr scharf zugespitzten Kegeln, welche äusserst feine Tröpfchen aussenden. Wendet man warme übersättigte Lösung von Schwefel in Terpentin in gleicher Weise an, so zeigt sich nur eine Spitze (Fig. 88). Terpentin allein sowie beliebige andere Flüssigkeiten zeigen die früher schon erwähnten convectiven Strömungen. Offenbar beruhen diese letzteren Strömungen auf gleichen Gründen wie die erst beschriebenen Bewegungserscheinungen und nehmen im wesentlichen auch genau denselben Verlauf. Die der Electrode dicht anliegende Flüssigkeitsschicht wird, weil ihre sämmtlichen Theilchen gleichnamig electrisch sind, vorn an der Electrode sich abheben und von der Rückseite her ergänzen. Es entsteht so eine Strömung längs der Oberfläche der Electrode, welche ungemein intensiv werden kann und sicherlich, wie alle Reibung heterogener Körper, Entstehung von Reibungselectricität im Gefolge haben muss. Ich schliesse die Möglichkeit solcher spontaner Electrisirung der Flüssigkeiten auch aus dem Verhalten pulverförmiger Körper, welche bekanntlich beim Einleiten electrischer Ströme das Bestreben zeigen, vorherrschend nach einer Electrode zu wandern. Es deutet dies mit grosser Wahrscheinlichkeit auf eine Eigenelectrisirung dieser Pulver, hervorgerufen durch Reibung an der Flüssigkeit. Die Flüssigkeit selbst müsste dann natürlich die entgegengesetzte Electrisirung annehmen, und eine Wanderung im entgegengesetzten Sinne ist auch thatsächlich beobachtet.

Diese Erklärung als richtig betrachtet, würde nun zu erwarten sein, dass die convective Strömung an einer Electrode sich intensiver gestaltete als an der anderen. Auch dies wurde vielfach beobachtet. Einen sehr schönen hierher gehörigen Vorlesungsversuch hat de Waha¹⁾ angegeben.

1) de Waha, Wied. Ann. 3. p. 68. 1878.

Die beiden Electroden haben verticale Stellung, und die Flüssigkeit schiesst über die Anode in Form eines kleinen Springbrunnens in die Höhe, während sie sich an der Kathode trichterartig hinabsenkt.

Dass nun solche convective Entladung (Zerstreuung) und spontane Electrisirung auch in Gasen möglich sein muss, lässt sich schon aus der Thatsache schliessen, dass sich eine Flüssigkeit ganz allmählich (bei der kritischen Temperatur) in den Gaszustand überführen lässt. Es lässt sich der Nachweis indess auch in verschiedener Weise direct führen.

Ein aus Goldpapierröhren und feinen Nähnadeln gefertigtes viertheiliges Flugrad wurde in einem mit Stanniol ausgekleideten Kasten bifilar aufgehängt und die Ablenkung bei Electrisirung mittelst Spiegel und Fernrohr beobachtet. Die Zuführung der Electricität geschah durch Ableitung von einer Kugel eines Funkenmikrometers, der zwischen den einen Pol einer Influenzmaschine und die Erdleitung eingeschaltet war. Auch auf der Leitung zum Flugrad wurde ein Funkenmikrometer angebracht, dessen Kugeln aber durch Spitzen ersetzt. Das erste Funkenmikrometer wurde alsdann so regulirt, dass bei mässiger Entfernung der Spitzen des zweiten eine schwache Ablenkung eintrat. Die Spitzen des letzteren blieben dabei vollkommen dunkel. Die Ablenkung wurde stärker, als deren Entfernung vermindert wurde. Sobald aber ein Leuchten sichtbar wurde, erfolgte plötzlich so starke Ablenkung, dass die ganze Scala aus dem Gesichtsfelde verschwand. Es musste somit vor der leuchtenden eine weit schwächere convective (dunkle) Entladung stattgefunden haben. Eine hohle Glaskugel wurde auf etwa 1 mm evacuirt und zugeschmolzen und alsdann einem freistehenden kugelförmigen Conductor genähert, welcher durch eine längere (die Wand des Zimmers durchdringende) Leitung mit der einen Kugel des Funkenmikrometers verbunden war. So oft zwischen den Kugeln des letzteren ein Funke übersprang, begann die Glaskugel zu leuchten, obschon ihre Entfernung vom Conductor mehrere Decimeter betrug. Das Leuchten wurde offenbar durch den Rückschlag verursacht, dieser hat aber eine vorhergehende Scheidung der Electricität im Inneren der Glaskugel zur

Voraussetzung, und dieser Scheidungsprocess verlief durchaus ohne Lichterscheinung, selbst als die Kugel unmittelbar mit dem Conductor in Berührung gebracht wurde.

Die Möglichkeit einer dunklen, convectiven Entladung scheint mir hierdurch erwiesen, wenn eine eingehendere Untersuchung allerdings wünschenswerth erscheint.¹⁾

Dass durch Reibung an festen Körpern Gase positiv electrisch werden, haben Elster und Geitel²⁾ bewiesen. Unter gewöhnlichen Umständen tritt Electricität allerdings nur dann auf, wenn der Körper glühend ist, vermuthlich weil die condensirte Gasschicht auf der Oberfläche des Körpers im alten Zustande eine unmittelbare Reibung hindert. Bei Gasentladungen ist es aber gerade diese dicht anliegende Gasschicht, welche zuerst entfernt wird. Bemerkenswerth erscheint auch das Verhalten der Flammen. Wird ein isolirter Gasbrenner positiv electrirt, so stösst er bekanntlich die Flamme ab, er zieht sie dagegen an, wenn seine Electrisirung negativ ist.

Alle diese Thatsachen und Erwägungen scheinen mir klar darauf hinzuweisen, dass die eigentliche Ursache der spontanen positiven Electrisirung der Luft, wie sie oben als der Funkenentladung kurz vorhergehend dargestellt wurde, und somit aller Unterschiede der positiven und negativen Seite der Entladung, lediglich zu suchen ist in einer der leuchtenden Entladung kurz vorangehenden convectiven Entladung, welche mit Erhöhung der Temperatur an Intensität rasch zunimmt³⁾ und bewirkt, dass leuchtende Entladung an der Kathode schon früher eintritt als auf der ganzen Strecke des Entladungsgefälle erreicht ist. Die rasche Zunahme der convectiven Entladung mit der Temperatur dürfte ihren Grund haben in dem erleichterten Gleiten des Gases längs der Oberfläche der Electroden. Schreitet nun die einmal eingeleitete Entladung nicht durch die ganze Strecke fort, d. h. genügt die Zufuhr von Electricität nicht zur Erzeugung von Funkenentladung, so breitet

1) cf. auch die Versuche von Warburg, Pogg. Ann. **146**. p. 578. 1872. u. Narr, Wied. Ann. **8**. p. 272. 1879; **11**. p. 155. 1880; **16**. p. 558. 1882.

2) Elster u. Geitel, Wied. Ann. **16**. p. 193. 1882.

3) Vgl. Abschn. VII, 5. p. 325.

sich diese erste Entladung über eine mehr oder minder grosse Fläche der Kathode aus und bildet den „rothen Saum“. Sie überträgt die Electrisirung der Kathode auf diejenige Luftschicht, an welcher sie ein Ende nimmt. Zwischen letzterer und der Oberfläche der Kathode ist also nunmehr kein beträchtliches Gefälle mehr, dieser Raum kann somit nicht von Entladung durchsetzt werden und wird zum „dunkeln Kathodenraum“. ¹⁾ Dass der Potentialwerth innerhalb desselben wirklich nahezu constant ist, lässt sich erkennen einerseits aus den messenden Versuchen Hittorf's und E. Wiedemann's, andererseits aus dem Verhalten einer positiven Spitze, welche in denselben eindringt. Trotz positiver Electrisirung der Spitze und negativer der sie umgebenden Luft ist keine Entladung zu bemerken; es findet längs der Oberfläche der Anode ein sehr jäher Abfall (Unstetigkeit der Potentialcurve) statt, sodass zwar wohl electrostatische Wirkung in die Ferne, nicht aber leuchtende Entladung innerhalb der electrisirten Luftschicht möglich ist. Je geringer die Dichte des Gases, je grösser also die Weglänge der Molecüle, um so grösser wird auch der Raum werden, welchen die electrisirte Luft einnimmt, um so mehr wirkt diese als Hinderniss gegen die Entladung und kann selbst auf die Electroden rückwirkend die Ausgangsstelle der Entladung beträchtlich verschieben, wie dies aus dem Experimente Fig. 42 klar hervorgeht. Es ist sehr bemerkenswerth, dass in diesem letzteren Falle der rothe Saum die ganze Kugel umhüllen kann, die Glimmlichtstrahlen aber nur über einer relativ entfernten Stelle des Stieles schweben und häufig ihren Ort wechseln als ob ein Windhauch sie verdrängte.

Erst jenseits der electrisirten Luftschicht ist also wieder Entladung möglich, sie wird aber nur dann eintreten, wenn die Ladung der Kathode hinreichend gestiegen ist, um das Gefälle des Potentials daselbst bis zum Entladungswerthe zu erhöhen. Auch diese im allgemeinen von dem rothen Saum verschiedene, und zwar unmessbar wenig spätere Entladung in Form der „Glimmlichtstrahlen“ schliesst im allgemeinen in der Nähe der Kathode ab, eine Wolke elec-

1) Vgl. Abschn. VII, 1, c. p. 321.

trisirter Luft erzeugend, die sich nun convectiv als electrischer Wind langsam gegen die Anode zu fortbewegt, daselbst die Potentialcurve beträchtlich herabziehend, sodass schliesslich auch hier Entladung erfolgt, und zwar, da negative Luftwolke und Anode gewissermassen ähnlich wie eine Vacuumflasche einen Condensator bilden, mit grösserer Stromintensität, sodass das Licht gegen dasjenige der Glimmlichtstrahlen röthlich erscheint. Die Existenz dieses electrischen Windes lässt sich leicht nachweisen. Leitet man über eine electrisch glimmende Spitze einen Gasstrom (Luft, Leuchtgas, Kohlensäure) und beobachtet denselben mittelst des Schlierenapparates, so zeigt sich eine energische Ablenkung desselben. Befestigt man senkrecht über einer mit Lycopodium bestreuten Metallplatte eine isolirte Spitze und erzeugt zwischen derselben und der Platte durch ein geeignetes Gebläse einen horizontalen Luftstrom, so erscheint die beim Berühren der Spitze mit dem Knopf einer Leydener Flasche auf der Platte erzeugte Kundt'sche Staubfigur in der Mitte in der Richtung des Luftstromes beträchtlich abgelenkt, also nicht mehr kreisrund, sondern herzförmig verzerrt. Endlich beweisen auch die Versuche von Nahrwold¹⁾ und Mascart²⁾ sehr evident, dass die Luft im Stande ist, Electricität aufzubewahren und mechanisch fortzuführen. Die von einer gewissen Quantität Luft fortgeführte Quantität von Electricität ist eine relativ sehr bedeutende, denn obgleich eine feine Spitze im Stande ist, den ganzen Strom einer Influenzmaschine zu entladen, ist die Geschwindigkeit des electrischen Windes der erwähnten Schlierenbeobachtungen zufolge eine sehr mässige, etwa derjenigen ausströmenden Leuchtgasen vergleichbar. Wird die electrisirte Luft auf ihrem Wege zur Anode aufgehalten, so muss in dem positiven Glimmlicht ein etwa den Kraftlinien entsprechender Schatten entstehen, wie ihn Fig. 2 der früheren Abhandlung zeigt. Ist der Körper selbst electrisch, so erscheint den Beobachtungen Righi's³⁾ zufolge der Schatten entsprechend ver-

1) Nahrwold, Wied. Ann. 5. p. 460, 783. 1878.

2) Mascart, Beibl. 7. p. 132. 1883.

3) Righi, Beibl. 5. p. 901. 1881.

zerzt. Ist die Zufuhr der Electricität genügend gross, so wird die Entladung nach der Bildung der Glimmstrahlen kein Ende nehmen, sondern nach äusserst kurzer Zeit hinter oder innerhalb der electrischen Luftschicht abermals beginnen, es entsteht das „negative Büschellicht.“ Da dasselbe an seiner Wurzel von negativer electrisirter Luft umgeben ist, welche eine seitliche Ausbreitung hindert, erscheint es hier zusammengedrückt und dehnt sich erst bei weiterem Fortschreiten aus, nimmt also die Form eines Lichtpinsels an, der durch den „Trennungsraum“ von den Glimmlichtstrahlen getrennt ist. In sehr verdünnten Gasen kann dieser Trennungsraum verschwindend klein, die Basis des Lichtpinsels aber beträchtlich gross werden, sodass $-B$ als rothe Umsäumung von $-G$ erscheint, scheinbar allmählich in letzteres übergehend. Da indess beide bei gleichem Querschnitt verschiedene Farbe besitzen, lässt sich darauf schliessen, dass sie nicht gleichzeitig sind, sondern $-B$ als der grösseren Stromintensität entsprechend in grösseren Intervallen auftritt. Aehnlich wie an der Kathode negative Luft als Hinderniss wirken kann, so an der Anode die durch das Glimmlicht erzeugte positive Luft. Dieselbe trennt als „positive Intermittenzstelle“ „positives Glimmlicht“ und „positives Büschellicht.“ Ist ein Ueberschuss von negativer electrisirter Luft vorhanden, welche die Kathode rings umschliesst und somit die Ausgangsfläche der Entladung auf den vorderen Theil der Kathode einschränkt, so entsteht „(Mikro-)Büschelentladung.“ Ist umgekehrt die positive electrische Luft vorherrschend, und lagert sich diese rings um die Kathode, so dehnt sich die Glimmhülle dem geänderten Verlauf des Potentialgefälles entsprechend über einen grossen Theil der Kathodenoberfläche aus, während das positive Büschellicht, weil in gleichartig electrisirter Luft fortschreitend, zu einem Lichtstreifen zusammengedrückt wird und sich auf weit grössere Entfernung erstreckt, es entsteht „(Mikro-)Streifenentladung.“ Wird ferner (in beiden Fällen) die Wirkung der electrisirten Luft noch unterstützt durch diejenige der gleichartig geladenen Gefässwand, wie dies je nach den eingangs dargelegten Erfahrungen that-

sächlich der Fall ist, so entsteht dadurch eine beträchtliche Abweichung der Richtung der Entladung von dem scheinbaren Verlauf der Kraftlinien, die Bildung von „(Makro-) Büschel-, resp. Streifenentladung“ bedingend. Die scheinbare Anomalie verschwindet sofort, wenn wir statt des scheinbaren Verlaufes der Kraftlinie, (nur der Electrisirung der Electroden entsprechend) den wahren, durch Anhäufung von Electricität in Luft und Wänden bedingten in Betracht ziehen. Die Ablenkung der Entladung durch Strömungen im Gase und durch magnetische Kräfte, beruht auf Ablenkung der positiv electrisirten Luft, welche im letzteren Falle den electrodynamischen Gesetzen folgt bis zur magnetischen Kraftlinie durch die Kathode, da hier die Distanz von der Kathode die geringste ist. Die Ablenkung der negativ electrisirten Luft kommt nicht in Betracht, da bei den Verdünnungen bei welchen Ablenkung durch magnetische Kräfte möglich ist, gewöhnlich nur Streifenentladung auftritt. Gelingt es Büschelentladung zu erhalten, so beobachtet man eine analoge (paramagnetische) Ablenkung des positiven Glimmlichtes. Es erscheint unnöthig, ins einzelne genau alle früher beschriebenen Formen zu erklären, da es ein Leichtes ist, sich aus den gegebenen Abbildungen in umgekehrter Weise die Anordnung der Electrisirung, welche die betreffenden Formen bewirkte, zu ermitteln. Dass sich bei den Versuchen von Hertz über Ablenkung der Magnetnadel durch die Entladung scheinbar eine Verschiedenheit zwischen Strombahn und Leuchten ergab, beruht darauf, dass die Magnetnadel die Strömung von einer Electrode zur Wand hin und von dieser zur anderen Electrode überhaupt nicht anzuzeigen vermag, insofern sich diese beiden Strömungen in ihrer Wirkung auf die Nadel theilweise aufheben und dieselbe so ablenken, wie es thatsächlich die Beobachtung ergab. Da bei hohen Verdünnungen der dunkle Kathodenraum, welcher ähnlich wie eine Funkenstrecke ein Hinderniss gegen die Entladung bildet, wie schon Hittorff¹⁾ richtig erkannt hat, eine beträchtliche Ausdehnung erfährt, wird natürlich Streifenentladung, welche einer Funkenstrecke an der Kathode

1) Hittorff, Wied. Ann. 10. p. 705. 1883.

entspricht, begünstigt. In sehr stark verdünnten Gasen erfolgt also stets zuerst Ladung der Wände von Seiten der Anode und Entladung durch die Kathode. Das zwischen beiden Vorgängen liegende Zeitintervall ist so klein, dass eine Messung der Potentialschwankungen mit Hilfe der bekannten Apparate ebenso unmöglich erscheint als die Messung der akustischen Druckschwankungen in einer Orgelpfeife mittelst eines gewöhnlichen Manometers (ohne Kundt'sches Ventil.) Da die Entladung an der Kathode beginnt und von hieraus den Kraftlinien folgend, also strahlenartig gegen die Wände zu fortschreitet, müssen die letzteren Schattenerscheinungen zwischenliegender Körper zeigen, falls sie durch den Entladungsprocess zum Leuchten gebracht werden. Dass letzteres wirklich stattfindet, ist bekannt. Ich schliesse hieraus, dass das Auftreten von grünem Fluorescenzlicht anzeigt, dass an der betreffenden Stelle eine alternirende Ladung und Entladung der Glaswand stattfindet.¹⁾ Die leuchtende Entladung in der Oberflächenschicht des Glases lässt, abgesehen von der Natur des letzteren, aus seiner Helligkeit einen Schluss ziehen auf die Intensität der Strömung. Der Umstand, dass dieselbe gewöhnlich nur bei starken Verdünnungen beobachtet wird, beweist also, dass gerade hier die Ladung und Entladung der Wände von sehr grossem Belang ist.

Die von Goldstein beobachtete Deflexion der Kathodenstrahlen lässt sich erklären, wenn man das Fortschreiten der Entladung in der Gasschicht in Betracht zieht. Durch die Entladung wird gewissermassen die auf der Oberfläche der Electrode angehäuften Electricität im Raume den Kraftlinien entsprechend, wie eine electricische Fläche fortgeschoben. Dabei ist wohl zu berücksichtigen, dass sich während des Fortschreitens der Verlauf der Kraftlinien genau in gleichem Schritte ändert. Zwei isolirte Glimmstrahlenbündel würden ein System von Kraftlinien erzeugen, welches nothwendigerweise ein Auseinanderweichen bedingt,

1) Vielleicht lässt sich nach den Principien der electromagnetischen Lichttheorie allgemein Fluorescenz und Phosphorescenz auf moleculare Ladung und Entladung zurückführen.

falls überhaupt die Glimmstrahlen durchaus gleichzeitig vorschreiten. Nach den Beobachtungen über Glimmlichtstrahlen bei Electroden mit einspringendem Winkel scheint dies im allgemeinen nicht der Fall, sondern die Entladung geht zunächst von einem Punkte aus und verbreitet sich erst von hier aus auf die übrigen Theile der Kathodenfläche. Durch diese Annahme würde sich erklären, dass in einspringenden Winkeln die Entladung heller erscheint, indem hier mehrere zeitlich verschiedene Lichterscheinungen zusammentreffen.

Merkwürdig erscheint die häufig zu beobachtende Schichtenabsonderung an $+$ und $-B$ -Licht. Im Grunde ist dieselbe nichts anderes als eine Wiederholung der Bildung des Trennungsraumes. Es kann der Fall eintreten, dass z. B. infolge allzureichlicher Anhäufung electricisirter Luft die Zufuhr der Electricität nicht ausreichend ist, um das B -Licht zur Anode fortzusetzen; sodass also Stillstand des leuchtenden Entladungsprocesses und Bildung einer electricischen Luftwolke stattfindet, bis die Entladung von neuem beginnt, die electricische Luftwolke überspringend, sodass in letzterer nur convective Ausgleichung der Electricität stattfinden kann.

Es erklärt sich hierdurch, dass die Schichten im Stande sind, electricische Schatten zu werfen, wie Spottiswoode beobachtet, und auch, dass sie leichter auftreten, resp. allmählich stationär werden, wenn die Form des Gefäßes (Röhre) ein Eindringen der Electricität in die Glaswand ermöglicht. Im Grunde genommen ist die Schichtenbildung auf dem Gebiete electricischer Entladungen dasselbe, wie die Erzeugung von Saitenschwingungen durch Streichen mittelst des Violinbogens auf akustischem Gebiete (die Entladung hält ein: die Saite ist gespannt — die Entladung beginnt wieder: die Saite schnell zurück).

Die auffallende stärkere Erwärmung des positiven Poles beim Davy'schen Lichtbogen, d. h. bei vorwiegend convectiver Entladung¹⁾ hat Edlund durch eine entgegenwirkende Kraft erklärt. Diese Kraft fällt zusammen mit der-

1) Vgl. Abschn. VII, 5. p. 325.

jenigen hypothetischen electromotorischen Kraft, welche das Auftreten der positiven Reibungselectricität an Anode und Kathode bewirkt. (Nach Hoorweg¹⁾ würde Reibungselectricität überhaupt mit Thermoelectricität zu identificiren sein.) Die höhere Erhitzung der Kathode bei vorwiegend leuchtender Entladung hat Hittorf erklärt durch die heisse Schicht von Glimmlicht, welche deren Oberfläche bedeckt.

Die Bildung der Metaldampfbüschel (und theilweise wohl auch die Zerstäubung der Kathode) beruht auf localer Erhöhung der Stromintensität durch Zusammenfliessen der Strömungslinien gegen einen Punkt. Aehnlich wie beim plötzlichen Oeffnen einer Schleusse muss daselbst beim Eintritt der Entladung ein jähes Gefälle des Potentials, also oberflächliche disruptive Entladung eintreten.

Das bekannte Nachleuchten mancher Röhren mag vielleicht auf langsamer Entladung der in die Glaswände eingedrungenen Electricität beruhen. Wurde eine evacuirte Röhre ohne Electrode, oder ein anders gestaltetes evacuirtes Glasgefäss der influencirenden Einwirkung eines sich alternirend ladenden und wieder entladenden Conductors ausgesetzt, so trat innerhalb einer bestimmten Wirkungssphäre das bereits erwähnte Leuchten in Folge des Rückschlages ein. Der Radius dieser Wirkungssphäre erwies sich nicht merklich abhängig von der Form und Grösse des Gefässes, sondern wesentlich nur von der Dichte des darin enthaltenen Gases. Merkwürdigerweise kam nun ein soeben neu verfertigtes Rohr nicht zum Leuchten, selbst wenn es dem Conductor ausserordentlich nahe gebracht wurde. Erst nach einiger Zeit und besonders, wenn ein Funke auf die äussere Wand übergeschlagen war, trat das Leuchten plötzlich ein und hörte erst wieder auf, wenn das Rohr aus der Wirkungssphäre entfernt wurde. War nun aber einmal in einem solchen Rohr das Leuchten eingetreten, so trat es stets wieder ein, wie oft und in welcher Lage man auch das Rohr dem Conductor nähern mochte, sobald dasselbe in die Wirkungssphäre eingeführt wurde. Weder langes Liegen, noch Erhitzen, noch auch Oeffnen und abermaliges Evacuiren

¹⁾ Hoorweg, Wied. Ann. 11. p. 568. 1881.

konnten ihm die einmal erlangte Fähigkeit zum Leuchten wieder nehmen. Wurde eine solche Röhre oder Kugel in ein isolirendes Gefäss mit Petroleum gefülltes gebracht, so änderte sich der Radius der Wirkungssphäre kaum merklich. Er wurde sichtlich verkleinert, wenn die Röhre auf ihrer Aussen-seite benetzt oder mit Glycerin bestrichen wurde, das Leuchten hörte fast ganz auf, wenn man sie zum grössten Theil mit Stanniol beklebte oder vollständig in ein Gefäss mit Wasser eintauchte. In letzterem Falle leuchtete nur die Stelle, an welcher die Kugel an dem isolirenden Stiel (Sie-gellackstange) befestigt war. Capillarröhren leuchten weit intensiver, als solche von grösserem Durchmesser und das Licht ist allenthalben gleich intensiv, wenn auch das Rohr sehr lang ist und weit aus der Wirkungssphäre, herausragt. Annähern leitender, mit der Erde in Verbindung stehender Körper lässt das Leuchten schon ausserhalb der Wirkungssphäre eintreten. Nähert man eine solche Röhre den Conductoren der Influenzmaschine, während zwischen denselben Funken überspringen, so tritt das Leuchten, wie zu erwarten, mit grösserer Intensität auf, wenn das Rohr der Axe parallel, als wenn es dazu senkrecht steht. In der senkrechten Lage ist es um so intensiver, je näher es dem einen Conductor, in der Mitte ist die Helligkeit nahezu verschwindend. Wird dasselbe in paralleler Lage so nahe gestellt, dass die Funken an demselben entlang gleiten, alsdann entfernt und in ein dunkles Zimmer gebracht, so leuchtet es ähnlich, wie eine geladene Vacuumflasche, längere Zeit nach. Das Licht wird intensiver, wenn beide Enden berührt werden, schliesslich wird diese Nachentladung immer stärker intermittirend und hört endlich ganz auf. Ist ein Rohr mit einer Spitze versehen, so schlägt gewöhnlich bei allzugrosser Annäherung von dem Conductor ein Funke auf diese Spitze über und durchschlägt dieselbe. Bei intensiver Ladung und starker Evacuirung ist das grüne Fluorescenzlicht, welches Ladung und Entladung der Wände andeutet, sehr schön zu beobachten. Es hat immer diejenige Lage, die dem Rückschlag entspricht. An der Ausgangsstelle der Kathodenstrahlen, welchen dieses Fluorescenzlicht entspricht, ist häufig das

rothgelbe Natriumlicht zu sehen, andeutend, dass auch hier wie sonst längs der Oberfläche der Kathode eine starke Erhitzung stattfindet.

Als besonders lehrreiche Beispiele zu der Theorie der Entladungen möchte ich die zahlreichen Experimente von William Spottiswoode und Fletcher Moulton¹⁾ erwähnen. Dieselben eingehend hier zu besprechen, erscheint nicht angemessen.

Das Hauptresultat vorliegender Arbeit liesse sich etwa in folgenden Worten zusammenfassen:

„Es gibt zwei Arten von Entladung in Gasen, die *convective* und die *leuchtende*. Bei höherer Temperatur z. B. beim electrischen Bogenlicht ist die erstere die vorherrschende.

Sämmtliche Erscheinungen der leuchtenden electrischen Entladung in Gasen erklären sich nach Faraday's Theorie, wenn man jederzeit berücksichtigt, in welcher Weise sich der Verlauf der Kraftlinien und das Gefälle des Potentials ändern, theils durch das Fortschreiten der Entladung selbst, theils durch Electrisirung einzelner Luftschichten und der Wände des Gefässes. Der scheinbare qualitative Unterschied zwischen positiver und negativer Electricität beruht lediglich auf der secundären Wirkung der an der Oberfläche der Electroden auftretenden Reibungs-(Thermo-)Electricität der Luft, welche leichtere Entladung an der Kathode und damit alle die beobachteten Verschiedenheiten der positiven und negativen Seite verursacht, welche sich äussern in verschiedener Färbung und Gestaltung der Lichterscheinung, sowie auch durch Aenderung der Schlagweite mit der Form der Electroden, durch verschiedenes Verhalten gegen magnetische Kräfte und die eigenthümlichen Formen der Lichtenberg'schen Figuren.

Die leuchtende Entladung ist in allen Fällen *intermittirend*.“

Leider steht der letztere Satz nicht im Einklang mit neueren Theorien, welche annehmen, dass auch *continuirliche* leuchtende Gasentladung möglich sei. Bei der ausserordentlichen Schnelligkeit, mit welcher sich der Process der leuch-

1) W. Spottiswoode und Fletcher Moulton, *Phil. Trans.* 1. p. 165. 1879; 2. p. 561. 1880.

tenden Entladung vollzieht, die wohl derjenigen der Fortpflanzung des Lichtes vergleichbar ist, lässt sich indess wohl denken, dass die Einzelentladungen so schnell sich folgen können, dass unsere Beobachtungen nicht ausreichen, dieselben zu trennen; vielleicht auch vollzieht sich der Entladungsprocess in einem Gase, wenn er überhaupt eintritt, rascher als die Strömung im Metall, sodass die Schwankungen der Stromintensität, die in der Nähe der Electroden noch bemerkbar wären, in einiger Entfernung davon unmerklich werden.¹⁾

Aachen, den 3. April 1884.

II. Beiträge zu den Untersuchungen über Entstehung thermoelectrischer Ströme in einem aus derselben Substanz bestehenden, conti- nuirlichen Leiter; von Rudolph Overbeck.

(Hierzu Taf. V Fig. 1–10.)

I. Einleitung.

Aus allen Beobachtungen über thermoelectrische Erscheinungen, welche sich den Entdeckungen Seebeck's anschlossen, ging hervor, dass zur Erzeugung eines Thermostromes stets die Gegenwart zweier in ihrer physikalischen Beschaffenheit irgendwie verschiedener Leiter erforderlich sei.

Diesem Resultate widersprachen keineswegs die ebenso von Seebeck zuerst beobachteten Ströme in Ringen aus Wismuth oder Antimon, die in einem Guss aus derselben Metallmasse verfertigt waren²⁾, denn diese erhalten beim Guss vermöge ihrer krystallinischen Structur an Spannung und Härte so verschiedene Theile, dass die Erwärmung an irgend einer Stelle einen Strom liefern kann.

1) Wenn ich in vorliegender Abhandlung manche Punkte mit ausserordentlicher Kürze behandelt und auch die vorhandene Literatur nur in geringem Maasse berücksichtigt habe, so geschah dies deshalb, weil ich beabsichtige, später dasselbe Thema nochmals ausführlicher zu bearbeiten, indess erst dann, wenn durch weitere Untersuchungen die Zuverlässigkeit der erhaltenen Resultate in jeder Weise völlig erwiesen ist.

2) Seebeck, *Abb. d. Berl. Acad.* aus den Jahren 1822 u. 23. p. 336.

Dass in der That die Verschiedenheit in der Härte genügt, um in einem aus derselben Substanz bestehenden Leiter, der keineswegs einen so ausgeprägt krystallinischen Charakter besitzt, wie das bei Wismuth und Antimon der Fall ist, wies Magnus¹⁾ nach, dessen Untersuchungen den Ausgangspunkt der vorliegenden Versuche bildeten.

Indessen schien noch eine Thatsache der oben ausgesprochenen Behauptung zu widersprechen, dass nämlich zwei in ihrer physikalischen Beschaffenheit irgendwie verschiedene Leiter zur Erzeugung eines Thermostromes nöthig seien.

M. Becquerel zeigte in seiner Schrift²⁾ dass ein Strom entstehe, wenn man in einen sonst ganz homogenen Platindraht einen Knoten schürzt und seitlich von diesem Knoten den Draht erhitzt.

Hier schien in der That die Ursache des Stromes, welcher sich von der erhitzten Stelle durch den Knoten hindurch fortpflanzt, in irgend einem andern Grunde zu liegen.

Allein Gaugain³⁾ wies darauf hin, dass zur Erzeugung eines Thermostromes in diesem Falle die Berührung zweier Punkte auf der Oberfläche des Platindrahtes nöthig sei, und diese vermöge der verschiedenen Spannung etc. durch die Wärme stets Ströme zu erzeugen im Stande seien.

Auf solche Ursachen sind auch die Ströme zurückzuführen, welche Henrici⁴⁾ und Magnus⁵⁾ beobachteten, wenn sie zwei sonst homogene Metalldrähte, welche auf verschiedene Temperaturen gebracht waren, miteinander in Berührung brachten. Dasselbe gilt von den von Seebeck⁶⁾ beobachteten Strömen in zwei sich berührenden Drähten, welche verschieden warm waren, oder in Stromkreisen, von denen sich gar ein Theil in flüssigem Zustande befand.

Zwar ist die Meinung aufgestellt worden, dass die verschiedene Fortpflanzung der Wärme in den Drähten die

1) Magnus, Pogg. Ann. 83. p. 467. 1851.

2) Becquerel, Traité expér. de l'électr. et du magn. 2. p. 37. 1834.

3) Gaugain, Compt. rend. 36. p. 615. 1853.

4) Henrici, Pogg. Ann. 80. p. 107. 1850.

5) Magnus, Pogg. Ann. 83. p. 489. 1851.

6) Seebeck, l. c. p. 330.

Ströme bedinge, doch ist LeRoux ¹⁾ der Ansicht, dass in diesen und ähnlichen Fällen die Ursache des Stromes in der durch die Temperaturverschiedenheit in den Drähten erzeugten, verschiedenen molecularen Structur zu suchen sei, und G. Wiedemann ²⁾ bemerkt hierzu: „dass übrigens auch in diesem Falle (nämlich bei Berührung zweier ungleich warmer Drähte) der blosser Uebergang der Wärme vom heisseren zum kälteren Metall die Entstehung des Stromes nicht bedingt, wird einmal durch die verschiedene Richtung des Stromes bei verschiedenen Metallen, dann durch die Abwesenheit jedes Stromes beim Zusammenbringen von heissem und kaltem Quecksilber (nach Matteucci, Magnus u. a.) nachgewiesen.“

Jedenfalls sind diese Erscheinungen von complicirter Natur, da die Berührung zweier räumlich getrennter Punkte zur Erzeugung solcher Thermoströme erforderlich ist, und Gaugain in der erwähnten Abhandlung den Einfluss der Oberflächenschichten, die sogar gasartig sein können, nachgewiesen hat. Diesem Umstande ist es auch zuzuschreiben, dass in den Versuchen von Magnus öfters ein Umschlagen der Stromesrichtung eintrat, namentlich wenn er zwei Drähte mit grosser Temperaturdifferenz mit einander in Berührung brachte.

In anderen Versuchen von Magnus findet eine solche äusserliche Berührung nicht statt, und es kommt wesentlich bei ihnen nur auf die Verschiedenheit der in unmittelbarer Nähe an einander befindlichen Elemente eines einzigen Drahtstückes an.

Er zog Drähte von einer allen gemeinsamen Stärke auf 0,45 Linien = 1 mm ab, erweichte einen Theil derselben, und erhielt, wenn dann die Stelle, wo der hartgebliebene Theil an den durch Ausglühen erweichten anstiess, auf 100° erwärmt wurde, einen thermoelectrischen Strom, der je nach der Natur des verwendeten Metalles eine bestimmte Richtung besass.

Auf diese Weise erhielt er unter anderen die Werthe folgender Tabelle.

1) Le Roux, Ann. de chim. et de phys. (4) 10. p. 205. 1867.

2) G. Wiedemann, Die Lehre v. d. Electr. 3. Aufl. 2. p. 454. 1883.

Metall	Richtung des Stromes	Ablenkung d. Magnetnadel
Messing . . .	} vom weichen zum harten Theil	55°
Stahl . . .		45°
Kupfer . . .		18°
Neusilber . .	} vom harten zum weichen Theil	34°
Eisen . . .		4°

Hier muss namentlich die Verschiedenheit in der Stellung von Stahl und Eisen auffallen, deren Verhalten unter sonst gleichen Bedingungen das geradezu entgegengesetzte ist, und es bildete einen Theil der nachfolgenden Untersuchungen, den Grund und die Bedingungen dieser Verschiedenheit aufzusuchen.

Es soll daher das thermoelectrische Verhalten dieser zwei Metalle, Stahl und Eisen, im Vergleich zu dem einiger anderen Metalle untersucht werden, wenn in einem continuirlichen Leiter in bestimmter Weise ein Härteunterschied erzeugt und die Berührungsstelle von hart und weich auf 100°, in einigen Fällen auch höher erwärmt wird.

Sodann sollen die thermoelectrischen Erscheinungen untersucht werden, welche entstehen, wenn in einem continuirlichen Leiter (auch hier namentlich Eisen und Stahl) eine Strecke einem Zuge durch angehängte Gewichte unterworfen wird, unter Erwärmung dieser Berührungsstelle vom gedehnten und nicht gedehnten Theile auf 100°.

II. Prüfung der von Magnus angegebenen Versuche.

a. Einrichtung der Untersuchungen.

Die Beobachtungen wurden mittels eines Spiegelgalvanometers mit astatischem Nadelpaar und Fernrohr mit Scala ausgeführt.

Die Zuleitungsdrähte von den möglichst weit entfernten Apparaten bestanden aus starken Kupferdrähten, ausserdem wurde es am besten befunden, die vier Windungsdrähte, welche die Umwicklung des Galvanometers bildeten, zusammen durchlaufen zu lassen.

In der Nähe des Fernrohr aufstellungspunktes befand sich ein Commutator, in dem andererseits jene Zuleitungsdrähte befestigt waren, und von hier aus liefen zwei kurze, dicke Kupferdrähte in einen hölzernen Kasten, in welchem die Verbindungen zwischen den zu untersuchenden Drähten und den Kupferdrähten theils durch Klemmschrauben, theils durch Quecksilber bewerkstelligt wurden.

Der Holzkasten diente dazu, diese Verbindungsstellen vor Luftzügen und sonstigen Temperatureinflüssen zu bewahren. Durch den eingeschalteten Commutator konnten einerseits die Beobachtungen unabhängig von der augenblicklichen Ruhelage des astatischen Systems — denn diese änderte sich im Laufe des Tages durch mancherlei Einflüsse, wie Schwankung der richtenden erdmagnetischen Kraft, Aenderung in der Spannung des Aufhängedrahtes durch Temperaturwechsel etc. — und dann die manchmal geringen Ströme durch Verdoppelung des Ausschlages erkennbarer gemacht werden.

Die zu untersuchenden Drähte wurden auf 0,5 mm abgezogen, da stärkere Drähte, auch solche von 1 mm Durchmesser viele ungleich harte Stellen bei folgender Prüfung zeigten. Die Drähte wurden, ohne dass etwas durch Ausglühen an den Verhältnissen von hart und weich geändert war, so wie sie aus dem Zieheisen kamen, in den Stromkreis eingeschaltet, von 10 zu 10 cm nach und nach auf 100° erwärmt und die dabei durch unregelmässige Vertheilung von hart und weich erzeugten Ströme durch die Ausschläge des Galvanometers beobachtet. Die 1 mm und darüber im Durchmesser haltenden Drähte ergaben viel weiter gehende Schwankungen als die von nur 0,5 mm im Durchmesser.

Ganz frei von solchen Unregelmässigkeiten konnte fast kein Draht erhalten werden, mochte er nun vor dem Ziehen, wenn es etwa Eisendraht war, in der Flamme eines Bunsen'schen Brenners möglichst gleichmässig bis zum Hellrothglühen erhitzt werden oder in einer Alkoholflamme oder direct im verglimmenden Holzkohlenfeuer oder in einer eiseren Röhre, die ihrerseits im Holzkohlenfeuer in einer Strecke von 20 cm zum Hellrothglühen gebracht war, wobei der aus-

zuglühende Draht mehrmals langsam in der Röhre hin und her gezogen wurde. Selbst galvanisches Ausglühen hatte nicht immer den gewünschten Erfolg.

Jedenfalls aber waren solche Störungen, wenn die nöthige Sorgfalt auf gleichmässigen Zug und darauf folgendes Erweichen der einen Hälfte der Drähte verwandt worden war, nicht gross genug, um das Resultat wesentlich zu beeinflussen.

Nachdem die zu untersuchenden Drähte bis auf 0,5 mm im Durchmesser abgezogen waren, wurden 1 m lange Stücke von der Mitte aus nach einem Ende zu in mindestens einer Strecke von 20—25 cm erweicht mittels einer Bunsen'schen Flamme oder einer Alkohollampe. Es genügte stets, nur ca. 20 cm zu erweichen, da der Erwärmungsapparat, der gleich beschrieben werden soll, ungefähr nur 5 cm von der Mitte aus nach beiden Seiten hin erwärmte, und es blieb auch in der That das Resultat ungeändert, wenn zur Prüfung dieser Annahme der Draht nachträglich in seiner vollen Hälfte, also in einer Erstreckung von 50 cm erweicht wurde.

War dann der Draht in den Stromkreis eingefügt, so wurde die Berührungsstelle zwischen dem erweichten Theil und dem hartgebliebenen mittels eines dem Magnus'schen Apparat nachgebildeten Kochgefässes erwärmt.

Dasselbe bestand aus einem ca. 13 cm hohen, cylindrischen Kupfergefäss von ca. 6 cm Durchmesser, durch welches 3 cm über dem Boden eine mit einer Glasröhre ausgekleidete Kupferröhre gesteckt war. In das Kupfergefäss wurde Wasser gebracht und dieses während der Dauer eines Versuches im Kochen gehalten, sodass die Temperatur innerhalb der Glasröhre 100° war oder wenigstens constant blieb, wenn nur jeder Luftzug durch Einfügung von Wattpfropfen in die Enden der Glasröhre vermieden wurde.

In den nachfolgenden Versuchen sind die Stromintensitäten so gering, dass unbedenklich die Ausschläge des Galvanometers direct miteinander verglichen werden können.

b. Einfluss der Härte und der Erweichung.

Die Grösse der Härte in den einzelnen Fällen anzugeben, dürfte wohl unmöglich sein, doch zeigte sich, dass schon ein

geringer Härteunterschied genügte, um hinreichend starke Ströme zu erzielen.

So gaben z. B. drei Eisendrähte, deren Stärke vor dem Ziehen 1,1 mm, 0,8 mm, 0,7 mm gewesen waren, nachdem sie möglichst gleichmässig stark ausgeglüht auf 0,5 mm abgezogen und dann wiederum nach Möglichkeit in der Mitte gleichmässig stark ausgeglüht waren, bei Erwärmung der Berührungsstelle von hart und weich, resp. Ausschläge von 15,5, 16, 15 Scalentheilen, also von annähernd derselben Grösse.

Es ist deshalb im Folgenden nicht besonders beachtet worden, die Drähte von einer allen gemeinsamen Stärke auf 0,5 mm abziehen, doch haben sie meist das Doppelte der Stärke gehabt, in welcher sie nachher zu den Versuchen verwendet wurden.

Auch der Process des Erweichens kann in den zu untersuchenden Drähten sehr schwer stets in demselben Maasse und in derselben Grösse vor sich gehen. So gaben z. B. zwei Messingdrähte, die von demselben Stück genommen wurden, bei Erwärmung der Berührungsstelle von hart und weich Ströme, welche Ausschläge von 90,5 und 86,5 Scalentheilen erzeugten, und zwar verliefen sie in der von Magnus für Messingdrähte angegebenen Richtung von weich zu hart.

Während die zu dem vorigen Versuch benutzten Messingdrähte vor dem Abziehen auf 0,5 mm eine Stärke von nur 0,7 mm gehabt hatten, gaben drei Drähte, die von 1,15 mm auf 0,5 mm abgezogen waren, nahezu dieselben Resultate, Ausschläge von 101, 96, 79,5 Scalentheilen, ein Beweis, dass einmal durch ein wiederholtes Durchgehen durch das Ziehen die Härte nicht wesentlich gesteigert wird, und dann, dass es hauptsächlich auf den Grad der Erweichung in der Mitte des Drahtes ankommt.

Denn als die Verhältnisse näher untersucht wurden, welche nach einem starken und einem schwachen Ausglühen behufs Erzeugung eines Härteunterschiedes eintraten, ergab sich das überraschende Resultat, dass bei Eisendrähten genau sowie in Stahldrähten die Richtung des entstehenden thermo-

electrischen Stromes von der Stärke abhängig ist, bis zu welcher die Erweichung der Stahl- und Eisendrähte getrieben wurde.

Bei den ausser Stahl- und Eisendrähten noch untersuchten Kupfer-, Messing- und Neusilberdrähten wurde nach starkem Ausglühen behufs Erzeugung eines Härteunterschiedes nur eine Steigerung der Wirkung beobachtet, welche bei schwachem Ausglühen eintrat.

Neusilber lieferte in allen Fällen dieselbe Stromrichtung, wie sie Magnus angegeben, nämlich vom harten zum weichen Theil, also umgekehrt wie bei Messingdraht, und zwar entstand bei vier sonst nach Möglichkeit gleich behandelten Drähten je nach der Stärke des Erweichens ein Ausschlag von 7, 26,5, 27, 28, 29 Scalentheilen, die letzteren also ebenfalls von ziemlich übereinstimmender Grösse.

Im übrigen konnte ein Einfluss der durch das Ausglühen erzeugten Oxydschicht in ihrem thermoelectromotorischen Verhalten gegen das darunter befindliche blanke Metall nicht bemerkt werden, indem sich etwa ein Kreisstrom von der Oxydschicht zum blanken Metall bilden würde, dessen Verzweigung eine Ablenkung der Nadel hervorbringen könnte.

Die Steigerung in der Intensität durch stärkeres Ausglühen ist, wenn eine gewisse, sehr bald erreichte Grenze überschritten ist, eine sehr geringe, wie sich dies auch bei weiteren Beobachtungen bestätigte.

Auch in Kupferdraht entstand unter allen Umständen ein Strom von derselben Richtung, welche Magnus angegeben, also vom weichen zum harten Theil, und brachte z. B. ein Draht, der sehr schwach in der Mitte ausgeglüht war, einen Ausschlag von 3,25 Scalentheilen hervor, der sich nach stärkerem Ausglühen bis zu 18 Scalentheilen steigerte, während sehr starkes Ausglühen einen Ausschlag von 22 Scalentheilen zur Folge hatte.

Auch hier erwies es sich als unwesentlich, ob die Drähte in ihrer ganzen Länge geputzt oder ungeputzt zum Versuche verwendet wurden.

c. Verhalten der Stahl- und Eisendrähte.

Während also in Neusilber- und Kupferdrähten eine Steigerung der Intensität des Stromes bei Erhaltung der Richtung desselben zu beobachten war, wenn die Erweichung eine grössere wurde, war es, wie bereits erwähnt, bei Eisen- und Stahldrähten für die Stromesrichtung von wesentlichem Einflusse, ob die eine Hälfte der Drähte schwach oder stark ausgeglüht wurde, und es war bei gleicher Behandlung in Eisen- und Stahldrähten auch das thermoelectrische Verhalten stets das gleiche. Es wurden, um hierin sicher zu gehen, die verschiedensten Eisen- und Stahlsorten, die gerade zu erlangen waren, untersucht, weil Magnus die Vermuthung ausspricht, dass es auch Stahlsorten gebe, bei denen der Strom vom harten zum weichen Metall geht (während er das Umgekehrte fand), und hinzufügt: „es wäre auch möglich, dass Eisensorten vorkommen, bei welchen der Strom vom weichen zum harten Metalle geht. Bei den von mir untersuchten war die Richtung immer von hart zu weich, allein die Ablenkungen der Nadel waren meist viel bedeutender, als die eine angeführte (von 4°), und erstreckten sich bis zu 25°.“¹⁾

Bei allen untersuchten Eisen- und Stahlsorten gelang es stets, den Unterschied in der Stromesrichtung bei mässig stark und stark erweichten Drähten festzustellen, also scheint sich die von Magnus angeführte Verschiedenheit des Verhaltens von Eisen und Stahl auf eine solche verschiedene Behandlung zurückführen zu lassen. So zeigte z. B. eine Reihe Stahldrähte, die übrigens gleich im harten Zustande und ca. 0,5 mm stark gekauft wurden, da es nur sehr schlecht gelingen wollte, Stahldraht zu ziehen, Ausschläge von 6, 13, 9,5 Scalentheilen bei einer Stromesrichtung von hart zu weich durch die erwärmte Berührungsstelle, je nachdem sie vorher behufs Erzeugung eines Härteunterschiedes in einer Hälfte sehr schwach (ca. 150°), etwas stärker (200—300°) und ziemlich stark (ca. 500°) erhitzt worden waren; dagegen Ausschläge von 13,25 und 15 Scalentheilen bei einer Stromesrichtung von weich zu hart durch die erwärmte Berührungsstelle, wenn die

1) Magnus, l. c. p. 487.

Erweichung der einen Hälfte durch eine Erhitzung bis zum Rothglühen oder Hellrothglühen erzielt worden war. Dieselbe Abhängigkeit der Grösse des Ausschlages und der Richtung des Stromes von dem Grade der Erhitzung, durch welche die eine Hälfte eines Eisen- oder Stahldrahtes erweicht wurde, zeigte auch ein einzelner Stahldraht von 0,7 mm Durchmesser, wenn die Erweichung der einen Hälfte durch ein successive stärkeres Erhitzen vorgenommen wurde, und jedesmal die Berührungsstelle des hart gebliebenen mit dem nach und nach mehr erweichten Theile in dem Kochgefäss auf 100° erwärmt wurde.

Auf diese Weise ergaben sich folgende Resultate: wenn die eine Hälfte durch schwaches Glühen erweicht worden war (ca. 300°) 17,75 Scalentheile durch einen Strom von hart zu weich; dieselbe Hälfte durch stärkeres Glühen erweicht (ca. 500°) 8,5 Scalentheile in der Richtung des Stromes von weich zu hart; nach nochmaligem stärkeren Erweichen (600 bis 700°) 75,75 Scalentheile in derselben Stromesrichtung, die nämliche Hälfte sehr stark geglüht (hellrothe Glühhitze) 102,5 Scalentheile bei Erhaltung der vorigen Richtung.

Eine bestimmte Temperatur im allgemeinen festzustellen, bei welcher die Umkehrung der Stromesrichtung erfolgen würde, war unmöglich, es zeigte sich bei den verschiedenen Exemplaren eine grosse Verschiedenheit in ihrem Verhalten; bei einigen Exemplaren eines Claviersaitendrahtes war die Hitze, die eine kleine Flamme einer Alkohollampe erzeugen kann, gerade hinreichend, um einen nach schwächerem Glühen in der Richtung von hart zu weich beobachteten Strom zum Verschwinden zu bringen.

Wenn die eine Hälfte eines Stahldrahtes schwach geglüht worden war, und bei Erwärmung der Berührungsstelle von weich und hart auf 100° ein Strom beobachtet wurde, der in der Richtung „von hart zu weich“ 35 Scalentheile Ablenkung hervorbrachte, ergab sich, nachdem die andere Hälfte, die sonst hart blieb, stark erweicht worden war, bei Erhaltung der vorigen Richtung eine bedeutende Erhöhung des Ausschlages, d. h. es entstand bei Erwärmung der Berührungsstelle des durch schwaches Glühen erweichten Theiles

und des durch starkes Glühen erweichten Theiles ein Strom, dessen Richtung vom stark geglühten zum schwach geglühten Theile durch jene Berührungsstelle ging, und der einen Ausschlag von 106,25 Scalentheilen erzeugte.

Auch in den folgenden Versuchen mit Eisendrähten bestätigte sich das Gesetz, dass nach starkem Ausglühen behufs Erzeugung eines Härteunterschiedes der entgegengesetzte Strom zu beobachten war, als nach schwachem Ausglühen, wenngleich sich die Drähte individuell in der Grösse des zu beobachtenden Ausschlages etc. unterschieden; es lag auch in Drähten derselben Eisensorte für das Entstehen des einen oder des andern Stromes das Hauptmoment in der Stärke, bis zu der das Ausglühen der einen Hälfte getrieben wurde. So gaben z. B. drei Eisendrähte, die möglichst gleichmässig stark in ihrer einen Hälfte behufs Erzeugung eines Härteunterschiedes ausgeglüht waren, Ausschläge von 13,5, 12,5, 11,0 Scalentheilen durch einen Strom, dessen Richtung von weich zu hart durch die erwärmte Berührungsstelle war; dagegen ähnliche Drähte, zur Hälfte schwach geglüht, Ausschläge von zwanzig und mehr Scalentheilen bei einer Stromesrichtung von hart zu weich. In den meisten Fällen war der Wechsel in der Stromrichtung bei Eisendrähten durch ein stärkeres Ausglühen leicht zu erreichen, sodass bei Erwärmung der Berührungsstelle des hart gebliebenen Theiles und des durch stärkeres Ausglühen erweichten Theiles der Strom in der Richtung von weich zu hart zu beobachten war, während vorher bei Erwärmung der Berührungsstelle des harten und des schwächer erweichten Theiles der Strom die Richtung von hart zu weich besass; doch kamen Proben von Eisendraht vor, in denen nur ein anhaltendes starkes Ausglühen der einen Hälfte, bei Erwärmung der Berührungsstelle des harten und des in dieser Weise erweichten Stückes einen Wechsel in der Richtung des vorher schon beobachteten Stromes eintreten liess.

Dass ein solcher Wechsel eintritt, auch wenn die Erweichung der einen Hälfte beliebige Male in immer stärkerer Weise wiederholt und jedesmal die Stromesrichtung und Stärke beim Erwärmen der Berührungsstelle von hart und

weich beobachtet wird, zeigt z. B. das Verhalten eines Eisendrahtes, wie es aus folgender Tabelle zu ersehen ist, wobei die erste Columnne die Stärke der Erhitzung angibt, die zur Erweichung der einen Hälfte des Drahtes zur Anwendung kam.

Grad der Erhitzung	Stromrichtung	Ausschlag
Der Draht lief eben an	hart zu weich	8,5
ca. 400° . . .	hart zu weich	40
500° . . .	hart zu weich	4
700° . . .	weich zu hart	13
900° . . .	weich zu hart	16,5

Wenn die eine Hälfte eines Eisendrahtes schwach geglüht und danach ein Ausschlag von 81 Scalentheilen durch einen Strom in der Richtung von hart zu weich beobachtet wurde, erhöhte ein starkes Erweichen der andern Hälfte diesen Ausschlag auf 96 Scalentheile, analog wie das bei Stahldraht der Fall gewesen.

Auch bei Eisendrähnen ist es schwierig, wenn nicht unmöglich, allgemein eine Temperaturgrenze anzugeben, bei welcher die Drähte einen Wechsel in der Stromrichtung eintreten lassen, namentlich da nach einer öfter wiederholten schwächern Erhitzung ein erheblich stärkeres Ausglühen nöthig ist, um dann noch einen Richtungswechsel der zu beobachtenden Ströme eintreten zu lassen.

d. Einfluss anderer Arten, die Drähte zu härten, als mittels des Drahtzieheisens.

Die Art der Härtung war übrigens ziemlich gleichgültig, vorausgesetzt, dass die Drähte erst in ihrer ganzen Länge gleichmässig durch Hämmern oder Ausrecken gehärtet wurden und dann erst die Erweichung einer Hälfte durch schwaches oder starkes Glühen vorgenommen wurde.

Dagegen zeigten die Eisen- und Stahldrähte ein anderes Verhalten, wenn sie erst durchgängig erweicht und dann in einer Hälfte gehärtet wurden, sei es durch Ausrecken oder durch Ablöschen oder durch Hämmern etc.

Letztere zwei Methoden der Härtung waren allerdings nichts weniger als geeignet, zu strengen Resultaten zu führen,

da durch sie eine wirklich gleichmässige Erhärtung nur sehr schwer zu erreichen war, also nicht bestimmt angegeben werden konnte, wodurch der dann beobachtete Strom in seiner Richtung bestimmt war.

Während auf diese Weise durch Ablöschen zur Hälfte gehärtete Drähte bald Ströme in der Richtung von hart zu weich und bald solche von weich zu hart beobachten liessen, zeigten Stahl- und Eisendrähte, wenn die Mitte eines solchen stark geglühten Drahtes zwischen Holzbacken eingeklemmt und dann die eine Hälfte durch Ausrecken gehärtet wurde, stets Ströme, deren Richtung von hart zu weich war, den obigen Ergebnissen bei Verwendung stark geglühter Eisen- und Stahldrähte entgegengesetzt.

Schwach geglühte Drähte zeigten nach einer gleichen Behandlung fast gar keinen Strom.

Wenn Adie¹⁾, Franz²⁾, Gaugain³⁾, Magnus etc. bei Berührung zweier ungleich warmer und ungleich harter Eisen- oder Stahldrähte grosse Unregelmässigkeiten fanden, die zum Theil zu sehr künstlichen Erklärungen Anlass gaben, so konnten in diesen Fällen die Oberflächenschichten in der That einen grossen Einfluss ausüben, was jedoch in den vorliegenden Versuchen vermieden ist.

Solche merkwürdige Verschiedenheiten im thermoelectrischen Verhalten bewiesen übrigens nur Eisen- und Stahldrähte, während Messing-, Kupfer- und Neusilberdraht davon frei waren.

Wenn z. B. ein stark geglühter Kupferdraht zur Hälfte gehämmert wurde, entstand bei Erwärmung der Berührungsstelle des gehämmerten und weichen Theiles ein Strom von weich zu hart, der elf Scalentheile Ausschlag erzeugte, also entsprach die Richtung genau den oben für Kupfer mitgetheilten Resultaten.

Ebenso gaben stark geglühte und schwach geglühte Messingdrähte, deren eine Hälfte durch Hämmern oder durch

1) Adie, Phil. Mag. (4) 3. p. 185. 1852.

2) Franz, Pogg. Ann. 85. p. 388. 1852.

3) Gaugain, Ann. de chim. et de phys. (3) 69. p. 91. 1862.

Ausrecken gehärtet war, stets Ströme, deren Richtung mit den früher angegebenen von weich zu hart übereinstimmte.

e. Erhöhung der Beobachtungstemperatur.

Bei diesem wesentlichen Einfluss der Glühhitze beim Ausglühen von Eisen- und Stahldrähten war es interessant, auch die Temperatur an der Berührungsstelle des harten und weichen Theiles eines Drahtes zu erhöhen und dabei das Verhalten der Drähte zu beobachten.

Zu diesem Zwecke wurde in das (hart gelöthete) Kupfergefäß eine Mischung von gleichen Theilen Zinn und Blei gethan, die auf beliebige Temperaturen gebracht werden konnte. Die Erhitzung wurde meist auf 200—250° getrieben und dann beim langsamen Erkalten der Masse von 10 zu 10°, wie dies ein eingefügtes Thermometer anzeigte, die Ausschläge des Galvanometers beobachtet.

Auch hier ist annähernd die Temperatur in der Glasröhre, welche die zu untersuchenden Drähte aufnahm, dieselbe gewesen, wie die der Umgebung, wenigstens hat sie sich ebenso regelmässig abgekühlt, wie die umgebende Metallmasse.

Es ergab sich, wie zu erwarten war, dass mit steigender Temperatur bei Erhaltung der Stromrichtung die Grösse des Ausschlages wuchs, was sogar bis auf einige Schwankungen ganz regelmässig vor sich ging.

So stieg z. B. in einem Neusilberdraht der Ausschlag von 27 Scalentheilen bei 100° auf 112 Scalentheile bei 250°, während die Richtung des Stromes nach wie vor von hart zu weich war; in einem Messingdraht wuchs der Ausschlag von 100 Scalentheilen bei 100° auf 260 Scalentheile bei 200°.

Wie in diesen Fällen, so blieb auch in Stahl- und Eisendrähten die Richtung des schon vorhandenen Stromes erhalten, vorausgesetzt dass die Erwärmung bei der Beobachtung nicht die Erwärmung überschritt, welche zur Erzeugung des Härteunterschiedes gedient hatte.

In einem schwachgeglühten Eisendraht stieg bei einer

Stromrichtung von hart zu weich der Ausschlag von 20 Scalentheilen auf 45, wenn die Temperaturen 100 und 200° zur Beobachtung angewandt wurden; ein stark geglühter Stahldraht zeigte bei diesen Temperaturen Ausschläge von resp. 30 und 50 Scalentheilen.

III. Einfluss der Dehnung und Verhalten der Drähte während derselben.

a. Die Versuche von W. Thomson etc.

Die Versuche wurden mit Anwendung höherer Beobachtungstemperaturen angestellt, um eine Erklärung der Widersprüche in den Resultaten von W. Thomson und Le Roux zu gewinnen, deren Versuche sich, wie Le Roux meint, nur darin wesentlich unterscheiden, dass er höhere Beobachtungstemperaturen anwandte, als Thomson, und weil er selbst den Grund der Verschiedenheit ihrer Resultate in diesem Umstande sieht.

W. Thomson hat in seinen Versuchen¹⁾ den Process des Drahtziehens, durch welchen Magnus die Härtung seiner Drähte erzielte, in zwei Momente zu zerlegen gesucht, indem er einmal durch angehängte Gewichte den Draht ohne seitliche Pressung in seiner Längsrichtung zu härten suchte und dann eine seitliche Quetschung mittelst einer hydraulischen Presse vornahm unter Ausschluss jedes Längszuges.

Es führten ihn seine Versuche auf die Unterscheidung in der Anwendung einer temporären Dehnung, nach welcher der Draht seine ursprüngliche Länge wieder erreichen wird, und einer permanenten Dehnung, nach welcher eine dauernde Verlängerung in dem Drahte sich zeigen muss.

Seine Resultate, welche er bei Verwendung eines einzigen Versuchsdrahtes erhielt, sind zum Theil nicht mit denen von Le Roux²⁾, der zwei Versuchsdrähte, einen gespannten und einen ungespannten Draht desselben Materiales verwendete, im Einklang, und zwar gehen bei wachsender Spannung die Ströme durch die erwärmte Berührungsstelle:

1) W. Thomson, Phil. Trans. 3. p. 711. 1856.

2) Le Roux, Ann. de chim. et de phys. (4) 10. p. 226. 1867.

bei W. Thomson	bei Le Roux
vom gestreckten zum nicht gestreckten Kupferdraht,	vom Kupfer zum gedehnten Kupfer,
vom nicht gespannten zum gespannten Eisendraht,	vom gedehnten Eisen zum Eisen,
vom gespannten Platindraht zum freien	vom gedehnten Platin zum Platin

Le Roux glaubt den Unterschied durch die verschiedenen hohen Temperaturen bedingt, denn Thomson wandte nur eine Erwärmung auf 100° an, und Le Roux erhitzte bis auf $200-210^{\circ}$, während v. Tunzelmann¹⁾ den Unterschied durch die verschiedenen hohen Spannungen in den Drähten zu erklären sucht; denn Thomson habe mit nur mässigen Spannungen gearbeitet und Le Roux mit hohen.

Aber es scheint nach den Worten von Thomson und Le Roux diese Erklärung nicht gültig sein zu können, da Thomson ausdrücklich betont, gerade so wie Le Roux, dass er diesen Stromverlauf beobachtet habe bis zum Zerreißen der Drähte, also bis zur Anwendung des grösstmöglichen Zuges.²⁾

E. Cohn³⁾ hat den Unterschied beschrieben, der beim Dehnen von harten und geglühten Eisen- und Stahldrähten eintrat, wobei er sich einer der Le Roux'schen Einrichtung nachgebildeten Beobachtungsmethode bediente.

Er fand, dass harte Eisen- und Stahldrähte dasselbe thermoelectrische Verhalten bei der Dehnung zeigten, welches Le Roux angegeben, und weiche Drähte Ströme in der von Thomson beobachteten Richtung lieferten.

Aber auch hier muss es zweifelhaft erscheinen, ob nach den Worten von Thomson und Le Roux eine solche Verschiedenheit des verwandten Materials angenommen werden darf, da die Vermuthung nahe liegt, dass Le Roux nicht mit harten, sondern ebenfalls mit ausgeglühten Drähten arbeitete. Denn, obwohl er dies nicht ausdrücklich angibt,

1) v. Tunzelmann, Phil. Mag. (5) 5. p. 339. 1878.

2) Thomson, l. c. p. 713. Le Roux, l. c. p. 226.

3) Cohn, Wied. Ann. 6. p. 385. 1879.

bemerkt er doch, dass, abgesehen von der andern Anordnung der Versuche, ein Unterschied in den Beobachtungen von Le Roux und Thomson nur insofern bestehe, dass er (Le Roux) auf $200-210^{\circ}$ erhitzte, und Thomson nur auf 100° .

Die Temperaturerhöhung bringt indessen nach E. Cohn keine Aenderung der Stromrichtung hervor, als er statt Wasserdampf Anilindampf von 170° in Anwendung brachte.¹⁾

Wenn E. Cohn auch für Eisen- und Stahldrähte eine Erklärung der verschiedenen Angaben von Thomson und Le Roux zu finden glaubte, so konnte er doch nicht auf demselben Wege den Widerspruch in den Resultaten für das thermoelectrische Verhalten des Kupfers heben, seine Versuche waren mit denen von Thomson (und übrigens auch mit denen von v. Tunzelmann) übereinstimmend.

b. Wiederholung dieser Versuche mit Kupfer- und Messingdraht.

Bei Wiederholung dieser Versuche gelang es sofort, in Kupferdrähten dieselben Erscheinungen zu beobachten, wie sie von Thomson angegeben und mehrmals bestätigt sind, dass also beim Belasten eines Drahtes ein Strom entstand, der vom gedehnten zum ungedehnten Theile durch die erwärmte Berührungsstelle floss, und der sich beim Entlasten nicht nur verminderte, sondern in der That schliesslich seine Richtung umkehrte, sodass jetzt die Stromrichtung mit der von Magnus für den Fall durch Ziehen gehärteter und durch Glühen zum Theil erweichter Drähte angegebenen und oben bestätigten Richtung übereinstimmte.

Die Einrichtung der Versuche war folgende. (Fig. 1.)

Um eine Metallröhre d , welche mit einem Stück Flanell als Nichtleiter umgeben war, wurden die zu untersuchenden

1) Dieser Beobachtung analog sind die Erscheinungen, welche oben mitgetheilt wurden, wenn die Erwärmung an der Berührungsstelle von hart und weich in einem durch Ziehen gehärteten und zum Theil durch Glühen erweichten Drahte erhöht wurde, und sich dadurch stets nur eine Erhöhung der Intensität des schon vorhandenen Stromes bei Erhaltung der Richtung desselben zeigte.

Drähte umgeschlungen und festgebunden, wobei möglichst wenige Windungen benutzt wurden, um die dem Zuge ausgesetzten Stellen zusammen zu halten.

Es wurde diese Einrichtung mit Benutzung nur eines Drahtes gewählt, um alle Störungen zu vermeiden, welche bei Verwendung zweier Drähte desselben Materiales, eines gespannten und eines ungespannten, eintreten können.

Der Draht wurde ferner um den obern Querstab eines Holrahmens *H*, der durch Gewichte *P* beschwert werden konnte, geschlungen und befestigt, sodass ungefähr 10 bis 15 mm des Drahtes dem Zuge ausgesetzt waren. Die Enden wurden in den Holzkasten *h* eingeführt, der, wie früher, dazu diente, an den Verbindungsstellen des Drahtes mit den Zuleitungsdrähten zum Galvanometer *g* eine möglichst gleichmässige Temperatur zu bewahren.

Durch die Metallröhre wurde dann aus einem Kochgefäss continuirlich Wasserdampf geleitet, sodass sich die Stellen, wo der durch die Gewichte gedehnte Theil mit den ungedehnten zusammenstiess, auf einer Temperatur von ca. 100° befanden, ohne jedoch selbst mit dem Wasserdampf in Berührung zu kommen.

Die Belastung geschah mittels Metallplatten, deren jede ca. 183 g wog, und von denen je vier vor jeder Beobachtung aufgelegt, resp. weggenommen wurden. Es ist allerdings nicht zu leugnen, dass eine Belastung mittels eines durch Wasser zu füllenden Kessels, wie dies G. Wiedemann that, ruhiger und gleichmässiger geschehen kann, um dem störenden Einfluss der mechanischen Erschütterungen zu entgehen, aber es wurden weitgehenden Unregelmässigkeiten durch möglichst sorgfältiges Auflegen der Platten vermieden.

Auf diese Weise ergab sich für einen gar nicht oder einen nur sehr schwach geglühten Kupferdraht von ca. 0,65 mm Durchmesser folgende Beobachtungsreihe.

Belastung	Ausschlag	Belastung	Ausschlag
0 Platten = 0 g	0 Scalenth.	20 Platten = 3660 g	-1,25 Scith.
4 „ = 732 „	0 „	24 „ = 4392 „	-1,5 „
8 „ = 1464 „	0 „	28 „ = 5124 „	-2 „
12 „ = 2196 „	-0,25 „	32 „ = 5856 „	-2,75 „
16 „ = 2928 „	-0,75 „	36 „ = 6588 „	-3,5 „

Wurden die Platten wieder entfernt, so war folgendes Verhalten zu beobachten.

Belastung	Ausschlag	Belastung	Ausschlag
36 Platten = 6588 g	-3,5 Scsth.	16 Platten = 2928 g	-1 Scsth.
32 „ = 5856 „	-3 „	12 „ = 2196 „	-0,75 „
28 „ = 5124 „	-2,5 „	8 „ = 1464 „	-0,5 „
24 „ = 4392 „	-2 „	4 „ = 732 „	-0,25 „
20 „ = 3660 „	-1,5 „	0 „ = 0 „	0 „

Hier ist ein Strom willkürlich der bequemern Unterscheidung wegen als positiv angenommen, der vom nicht gedehnten zum gedehnten, und als negativ, der vom gedehnten zum nicht gedehnten Theile durch die erwärmte Berührungsstelle fliesst.

Also würde in diesem Falle ein Strom entstanden sein, der vom harten zum weichen Theile floss, sich bei vermehrter Belastung steigerte, bei Wegnahme der Belastung abnahm, um bei völliger Entlastung zu verschwinden, sodass nur der Einfluss der temporären Dehnung zur Geltung kam.

Eine Wiederholung des Versuches mit Anwendung derselben Plattenanzahl brachte fast genau dasselbe Resultat hervor.

Wenn ein etwas stärker geglähter Kupferdraht von demselben Durchmesser verwandt wurde, war folgendes Verhalten zu beobachten:

0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
0	-0,25	-0,5	-0,75	-1	-1,25	-1,5	-1,75	-1,75	-2	-2,25

Die obere Zeile gibt die Anzahl der als Gewichte verwandten Platten (à 183 g), die untere Zeile den dabei beobachteten Ausschlag an.

Der Entlastung entsprechend, entstand folgende Beobachtungsreihe:

40	36	32	28	24	20	16	12	8	4	0
-2,25	-1,5	-1	-0,5	0	+0,5	+0,75	+1	+1,25	+1	+1,75

Graphisch unter Zugrundelegung der beobachteten Sca-
lentheile als Ordinaten und der Grösse der Belastung als

Abscissen, ergibt sich etwa das Bild der Fig. 2, wobei die einzelnen beobachteten Punkte durch Curven miteinander verbunden sind, und die beigesetzten Pfeilspitzen die Reihenfolge der Beobachtungen anzeigen.

Hier würde, Thomsons Beobachtungen entsprechend, zuerst bei wachsender Spannung ein Strom entstanden sein, der vom gedehnten Theile durch die erwärmte Berührungsstelle zum nicht gedehnten Theile ging, bei vermehrter Belastung zunahm, sich bei Wegnahme der Belastung verminderte, noch vor völliger Entlastung den Nullpunkt erreichte und in einen vom nicht gedehnten zum gedehnten Theile gerichteten Strom übergang, sodass schliesslich bei völliger Entlastung ein Strom entstand, dessen Richtung mit der von Magnus angegebenen, „von weich zu hart“, übereinstimmte.

Eine Wiederholung der Versuche lieferte fast genau dieselben Resultate, d. h. der Strom vom nicht gedehnten zum gedehnten Theile nahm bei steigender Belastung ab, ging durch Null hindurch in den Strom vom gedehnten zum nicht gedehnten Theile über, kehrte bei Entlastung um, ging wieder durch Null hindurch und erreichte bei völliger Entlastung seine frühere Intensität und Richtung wieder, und zwar waren die Grössen der Ausschläge für dieselben Gewichte bei Belastung und Entlastung ziemlich die gleichen.

Dasselbe Verhalten zeigte starkgeglühter Kupferdraht von demselben Durchmesser, und es war trotz der durch das starke Ausglühen erzeugten grossen Weichheit des benutzten Drahtes und der deshalb durch die Gewichte hervorgebrachten ziemlich bedeutenden Dehnung kein merklicher Unterschied gegen die Resultate des schwächer geglühten und lange nicht so stark gedehnten Drahtes zu bemerken.

Ein eigenthümliches Verhalten bewiesen Messingdrähte. War ein Messingdraht gar nicht oder nur schwach geglüht, so entstand auch bei ziemlich erheblicher Belastung, die bis zum Zerreißen des Drahtes gesteigert wurde, kein Strom, waren die Drähte aber stärker oder sehr stark geglüht, so war so lange kein Strom zu bemerken, als keine permanente Dehnung eingetreten; war diese vorhanden, so bewirkte sie

einen Strom, der vom nicht gedehnten zum permanent gedehnten Theile gerichtet war und für steigende Belastung und steigende Dehnung zunahm, dann jedoch bei Abnahme der Gewichte bis zur völligen Entlastung nur eine sehr geringe Aenderung zeigte, sodass die Stromrichtung immer mit der von Magnus für Messingdraht angegebenen, „von weich zu hart“, übereinstimmte.

Eine neue Belastung und Entlastung änderte nichts an diesen Verhältnissen.

c. Wiederholung der Versuche mit Stahl- und Eisendraht.

Viel complicirter war das Verhalten von Eisen- und Stahldrähten.

Da es sich herausstellte, dass die Erscheinungen namentlich dann scharf hervortraten, wenn diese Drähte bis zu der Grenze belastet wurden, wo sie bei geringer Mehrbelastung zerrissen, so wurden nur ca. 0,35 mm starke Drähte verwendet, um jene Grenze möglichst in allen Fällen zu erreichen.

Wie nach den oben mitgetheilten Versuchen mit Eisen- und Stahldrähten erwartet werden konnte, war auch in diesen Fällen das Verhalten von Eisendraht und Stahldraht unter gleichen Bedingungen im wesentlichen dasselbe, auch zeigte sich abermals ein bedeutender Unterschied bei Verwendung von schwachgeglühten und starkgeglühten Eisen- und Stahldrähten, doch war das Verhalten z. B. eines stark geglühten Eisendrahtes nach erfolgter permanenter Dehnung und durch dieselbe erfolgten Härtung nicht in Uebereinstimmung mit den oben mitgetheilten Resultaten, wenn ein Theil eines Eisendrahtes hart blieb, während der andere durch starkes Ausglühen erweicht wurde, sondern denselben entgegengesetzt, sodass also hier sich derselbe Strom zeigte, wie derjenige, welcher in einem starkgeglühten Eisendraht entstand, dessen eine Hälfte nach erfolgtem Einklemmen in der Mitte durch Ausrecken gehärtet war.

Bei Verwendung eines schwachgeglühten Stahldrahtes konnte für eine bis 5856 g ansteigende Belastung folgendes Verhalten beobachtet werden, wenn wiederum die obere Zeile

die Anzahl der als Gewichte verwandten Platten (à 183 g) und die untere Zeile den dabei beobachteten Ausschlag angibt:

0	4	8	12	16	20	24	28	32
0	-0,5	-1	-1,5	-1,5	-2	-2,5	-3	-3,25

Es entsteht also für steigende Belastung ein sich verstärkender Strom in der Richtung vom gedehnten Theile zum ungedehnten durch die erwärmte Berührungsstelle.

Der Entlastung entsprechend, ergibt sich folgende Beobachtungsreihe:

32	28	24	20	16	12	8	4	0
-3,25	-2,5	-1	0	+1	+1,75	+2	+2	+1,25

Der vorhandene Strom in der Richtung vom gedehnten zum ungedehnten Theile nimmt für Verringerung der Belastung schnell ab, geht durch Null hindurch in den vom ungedehnten zum gedehnten Theil gerichteten Strom über, erreicht ein Maximum und nimmt wiederum etwas ab.

Eine Wiederholung mit demselben Draht und innerhalb derselben Gewichtsgrenzen gab zu folgenden Beobachtungsreihen Anlass:

0	4	8	12	16	20	24	28	32
+1,25	+0,25	0	0	-0,25	-0,75	-1,25	-1,75	-2,75

Für die Entlastung:

32	28	24	20	16	12	8	4	0
-2,75	-1,75	-1,25	+0,25	+1	+1,75	+2,25	+2,25	+1,25

Graphisch, unter Zugrundelegung derselben Bedingungen, wie zuvor, entstehen etwa die Figuren 3 und 4.

Auch hier geben die beigesetzten Pfeilspitzen die Reihenfolge der Beobachtungen an.

Dasselbe Verhalten zeigte übrigens auch ungeglühter Stahldraht, nur dass in ihm die Effecte noch geringere waren; jedenfalls entsprach dies den Beobachtungen von E. Cohn.

Ganz analoges Verhalten bewies schwachgeglühter Eisendraht, nur dass der Verlauf der Beobachtungen auch bei häufigeren Wiederholungen etwas regelmässiger war, wie das aus dem Folgenden hervorgeht.

Der Belastung entspricht:

0	4	8	12	16	20	24	28	32
0	-0,75	-1,25	-1,75	-2,25	-3,25	-3,75	-4,25	-4,75

der Entlastung:

32	28	24	20	16	12	8	4	0
-4,75	-4	-2,5	-1,25	±0	+0,75	+1,25	+2	+2,5

die Wiederholung ergab für die Belastung:

0	4	8	12	16	20	24	28	32
+2,5	+1,75	+1,25	+0,5	-0,25	-1,25	-2,25	-3,25	-4,75

für die Entlastung:

32	28	24	20	16	12	8	4	0
-4,75	-3,25	-2,25	-0,75	+0,25	+1	+1,75	+2,25	+2,5

Jede Erneuerung der Belastung und der Entlastung bringt eine Wiederholung des in den zwei letzten Beobachtungsreihen niedergelegten Verhaltens.

Graphisch stellen sich diese Resultate wie in Fig. 5 und 6 dar.

Fast dieselben Verhältnisse ergeben sich bei Untersuchung des Einflusses, den eine Dehnung auf ungeglühte, harte Eisendrähte ausübt, die ebenfalls mit den von E. Cohn angegebenen übereinstimmen, der bei graphischer Darstellung seiner Beobachtungen auch ähnliche Zeichnungen erhält, nur dass er den Nullpunkt dahin verlegt, wo, der mitgetheilten Wiederholung entsprechend, die aufsteigende Curve, d. h. diejenige, welche den Werthen der Belastung entspricht, und die absteigende Curve, d. h. diejenige für die Werthe der Entlastung, sich wieder treffen, was sich daraus erklärt,

dass er den Einfluss unberücksichtigt lässt, den eine vorhergehende starke Belastung auf den Draht ausübt.¹⁾

Wenn die Eisen- und Stahldrähte, die einer Dehnung durch angehängte Gewichte unterworfen wurden, bis zur Rothglühhitze und darüber erhitzt worden waren, gestalteten sich die thermoelectrischen Erscheinungen ganz anders und viel complicirter, nur ist ausdrücklich zu bemerken, dass auch hier das Verhalten von Stahl und Eisen dasselbe war, wenngleich Stahldraht mancherlei Unregelmässigkeiten zeigte im Vergleich zu Eisendraht.

Die Beobachtungen bei Belastung und Entlastung eines starkgeglühten Stahldrahtes waren folgende.

Für die Belastung:

0	4	8	12	16	20	24	28	32
0	-0,25	-0,75	+0,25	+0,25	+0,75	+0,25	+0,25	-0,25

für die Entlastung:

32	28	24	20	16	12	8	4	0
-0,25	+1,5	+2,75	+3,25	+3,5	+3,25	+2	+1,5	-1,25

Die Wiederholung innerhalb derselben Gewichtsgrenzen zeigte folgendes Verhalten an.

Für die Belastung:

0	4	8	12	16	20	24	28	32
-1,25	-1,25	-0,5	+1,5	+2,5	+3,25	+3,25	+2,75	+2,25

für die Entlastung:

32	28	24	20	16	12	8	4	0
+2,25	+3,5	+4,25	+4,75	+4,5	+4	+3	+1,25	-1

Es entsteht also bei der ersten Belastung ein Strom, dessen Richtung zweifelhaft ist, bei Wegnahme der Belastung

1) l. c. p. 395.

zuerst ein solcher, der vom ungedehnten zum gedehnten Theile fliesst, bei weiterer Entlastung abnimmt, um schliesslich in einen vom gedehnten zum ungedehnten Theile gerichteten Strom überzugehen.

Wenn die Belastung erneuert wird, entsteht zuerst ein Strom, dessen Richtung zunächst vom gedehnten zum ungedehnten Theile bleibt, dessen Stärke aber abnimmt, und der bald in den entgegengesetzt gerichteten Strom übergeht, hier ein Maximum erreicht und bei weiterer Belastung wiederum etwas an Stärke abnimmt. Bei Entlastung bleibt zunächst die Richtung des Stromes erhalten, seine Stärke erfährt aber eine erhebliche Steigerung, nimmt dann sehr rasch ab und geht bei völliger Entlastung in den entgegengesetzt gerichteten Strom über.

Eine weitere Wiederholung ergab keine Neuerungen.

Unter Zugrundelegung derselben Bedingungen würden diese Beobachtungen sich graphisch ungefähr folgendermassen darstellen wie in Fig. 7 und 8.

Wenn ein stark geglühter Eisendraht verwendet wurde, war der Verlauf der Beobachtungen ein ganz analoger; es entstanden z. B. folgende Beobachtungsreihen.

Für die Belastung:

0	4	8	12	16	20	24	28	32
0	-0,5	-1	-1,5	-1,5	-1,75	-2	-3,25	-5,5

für die Entlastung:

32	28	24	20	16	12	8	4	0
-5,5	-4,5	-2,75	-1,75	-1,25	-2,75	-4,25	-5,5	-6

Durch Wiederholung der Belastung und Entlastung innerhalb derselben Gewichtsgrenzen, ergab sich für die Belastung:

0	4	8	12	16	20	24	28	32
-6	-7,25	-9	-9	-8	-6	-5	-5	-6

für die Entlastung:

32	28	24	20	16	12	8	4	0
-6	-4,25	-3,25	-2,25	-1,5	-2,5	-4,25	-5,75	-6

Graphisch stellen sich diese Beobachtungen wie in Fig. 9 und 10 dar.

So lange die angehängten Gewichte bei der ersten Belastung eine dauernde Dehnung nicht erzeugt haben, ist auch der vorhandene Strom von keiner Bedeutung, er war in anderen Beobachtungen in seiner Richtung nicht fest bestimmt; sobald jedoch eine solche Einwirkung eingetreten, entsteht ein für Mehrbelastung sich verstärkender Strom in der Richtung vom gedehnten zum ungedehnten Theile.

Bei der Entlastung erreicht der Strom in dieser Richtung ein Minimum seiner Stärke, um dann für weitere Entlastung sich wieder zu verstärken; wobei er bis zum Wegnehmen aller Gewichte in seiner Richtung „von hart zu weich“ verbleibt.

Bei der Wiederholung erreicht zuerst der Strom ein Maximum immer bei Erhaltung der Richtung „von hart zu weich“, nimmt dann ab, geht durch ein Minimum, um sich wiederum zu verstärken, bei der Entlastung nimmt er denselben Verlauf, wie bei der ersten Entlastung.

Die Beobachtungen mit Eisendrähten gaben übrigens auch bei den Wiederholungen viel genauere und untereinander mehr übereinstimmende Resultate, als dies bei den Stahldrähten der Fall war, wie überhaupt eine anfänglich in fast allen Stahldrähten vorhandene thermoelectromotorische Kraft sehr störend wirken konnte; auch ist kaum bei Stahldrähten jene Grenze erreicht worden, über welche nur eine geringe Mehrbelastung möglich ist.¹⁾

Diese Beobachtungen mit „weichen“ Stahl- und Eisendrähten stimmen ebenso mit den von E. Cohn mit je zwei

1) Dieser anfängliche Ausschlag ist in der Weise in Rechnung gezogen worden, dass er je nach der Richtung des ihn erzeugenden Stromes von der Grösse der beobachteten Werthe abgezogen oder zu ihr hinzugezählt wurde.

Drähten gemachten überein und es gilt für die graphische Darstellung und Bestimmung des Nullpunktes bei ihm und den vorliegenden Versuchen das oben Bemerkte.

IV. Schluss.

Eisen- und Stahldrähte verhalten sich unter gleichen Bedingungen der Vertheilung von weich und hart in einem Drahte gleichmässig; es scheint aber für die Richtung des entstehenden Stromes wesentlich zu sein, ob der weiche Theil eines Drahtes aus dem harten Zustande des ganzen durch Ausglühen oder der harte Theil aus dem weichen Zustande des ganzen erzeugt wurde.

Ausserdem gelang es fast stets, den entschiedenen Einfluss von schwachem und starkem Erweichen in Eisen- und Stahldrähten festzustellen.

Eine gleiche Verschiedenheit zeigten die Kupfer-, Messing- und Neusilberdrähte nicht, hier war der bei Erwärmung einer Berührungsstelle von hart und weich an einem Draht zu beobachtende Strom stets von gleicher Richtung bei demselben Material, in welcher Weise auch in den einzelnen Drähten der Unterschied von weich und hart hervorgebracht worden war.

Solche Versuche, wie die oben mitgetheilten, wurden in sehr grosser Anzahl vorgenommen und lieferten unter gleichen Bedingungen stets fast ganz übereinstimmende Resultate.

Was schliesslich jenen mehrerwähnten Widerspruch in den Beobachtungen von Thomson und Le Roux anlangt, so lässt sich schwer eine Entscheidung treffen, denn wenn man ihn auch für Eisendrähte heben könnte, dadurch, dass man annimmt, Le Roux habe schwach geglühte und Thomson stark geglühte Eisendrähte verwandt, so bliebe dieselbe Schwierigkeit noch bestehen für die Resultate mit Kupferdraht.

Ebenso ist übrigens die Angabe von Le Roux für Messingdraht, wonach bei wachsender Spannung der Strom vom gedehnten zum ungedehnten Metalle fliessen soll, den oben mitgetheilten Beobachtungen entgegengesetzt, in denen weder eine verschieden hohe Spannung, noch eine verschieden

starke Erweichung im Messingdraht die Richtung von weich zu hart beeinflusste.

Es sind die Beobachtungsmethoden so verschiedene, dass bei Verwendung von zwei Drähten und Berührung der Oberflächen derselben andere Resultate entstehen können, als bei Verwendung eines einzigen Drahtes.

Doch kann ohne Weiteres durch diese verschiedene Anordnung der Versuche jener Widerspruch nicht erklärt werden, da z. B. die Versuche von E. Cohn, in denen stets zwei Drähte verwandt wurden, mit den vorliegenden übereinstimmen.

III. *Ueber die Aenderungen, welche der Molecularzustand des Eisens durch Glühen und Ablöschen erleidet; von Carl Fromme.*

Vor einigen Jahren habe ich gelegentlich der Veröffentlichung von magnetischen Versuchen¹⁾ eine kurze Mittheilung über die Dichteänderung des Stahles durch Härten und durch Anlassen gemacht und später der ausführlicheren Wiedergabe der letzteren Versuche in diesen Annalen²⁾ eine Beobachtungsreihe hinzugefügt, welche die Ermittlung der Dichtevertheilung im Inneren eines gehärteten Stahlstabes bezweckte. Inzwischen ist die allgemeine Gültigkeit eines der früheren Resultate durch Beobachtungen von H. Meyer³⁾ in Frage gestellt worden. Dieselben ergeben nämlich für eine von drei untersuchten Stahlsorten („gezogenen weichen blanken Stahl“) eine Dichtevermehrung durchs Härten, während die beiden anderen Sorten („bester blanker englischer Gussstahl“ und „polirter englischer Stubbstahl“) die von mir immer allein beobachtete Verminderung zeigten.⁴⁾

1) C. Fromme, Gött. Nachr. 1876. p. 157—168.

2) C. Fromme, Wied. Ann. 8. p. 352—356. 1879. Phil. Mag. (5) 8. p. 421. 1879.

3) H. Meyer, Wied. Ann. 18. p. 233. 1883.

4) Noch liegt eine ältere Beobachtung von Rinmann (in dessen

Ich habe deshalb neue Versuche über diese Erscheinung der Dichteänderung beim Härten (Ablöschen) angestellt und versucht, der oder den Ursachen derselben dadurch näher zu treten, dass ich die Beobachtungen über die verschiedenen Modificationen des Eisens, vom reinem, kohlefreien, galvanoplastischen Eisen bis zu dem (kohlenstoffreichsten) Roheisen erstreckte.

Es war ferner die Frage nach der Vertheilung der Dichte in einem gehärteten Stahlstab durch die einzige, früher von mir mitgetheilte Versuchsreihe noch keineswegs gelöst, im Gegentheil war das Resultat derselben ein so merkwürdiges und unerwartetes, dass weitere Versuche dringend zu wünschen waren. Da mir hierauf bezügliche Untersuchungen in der Zwischenzeit nicht bekannt geworden sind, so gebe ich im Folgenden einen kleinen Beitrag zur Lösung der Frage.

1. Ueber die durch Ablöschen erzielte Dichteänderung des Eisens.

Es wurde folgendes Material geprüft:

a) Eisendraht von 1,4 mm Dicke.

b) Eisendraht von 0,5 mm Dicke, aus dem Drahte a) durch Ziehen gewonnen.

c) Eisendraht von 0,3 mm Dicke.

d) Stahldraht von 0,7 mm Dicke.

e) Stahldraht von 0,4 mm Dicke. d) und e) entstammten der gleichen Fabrik in Birmingham und waren als „Patent Steel Music Wiré“ bezeichnet.

f) Stahlstab cylindrisch, Dicke = 5,5 mm, Länge = 30 mm.

g) Galvanoplastisches Eisen in kleinen Stückchen, aus Eisenvitriollösung niedergeschlagen. Dicke etwa = 0,1 mm.

h) Galvanoplastisches Eisen, aus Eisenchlorürlösung niedergeschlagen. Aus einem grossen Blech wurden drei Bleche, geschnitten und jedes einzeln geprüft. Mittlere Dicke des ganzen Bleches = 0,14 mm.

„Geschichte des Eisens“, deutsche Uebersetzung von Karsten) vor, nach welcher auch steyrischer Grebestahl durch die Härtung eine Dichtezunahme von 7,782 auf 7,822 erfährt.

i) Gusseisen in cylindrischer Form, 18 mm lang und 7 mm dick,

k) Gusseisen in Form einer Platte (20:10:5 mm).

l) Schmiedeeisen in Form eines Cylinders von 25 mm Länge und 5,6 mm Dicke.

m) Weisses Roheisen in kleinen Stückchen, sowie sie durch den Hammer aus einem grösseren Stück herausgespalten wurden.

Zur Bestimmung der Dichte diente zumeist ein Geissler'sches Pyknometer, nur bei h) und k) wurde die hydrostatische Wage benutzt. Geglüht wurde in der Flamme des Bunsen'schen Brenners oder in der Gebläseflamme.

Zum Zwecke langsamer Abkühlung liess man in der hellen Flamme und über derselben erkalten, während rasche Abkühlung durch Eintauchen des glühenden Körpers in Wasser von 10 bis 15° erzielt wurde. Die Oxydschicht wurde vor jeder Messung entfernt. Die Untersuchung der Drähte geschah in der Weise, dass der Höhe des Pyknometergefässes angepasste Stücke von etwa 4 cm Länge abgeschnitten und in grösserer Zahl (bis zu 30 bei den dünnsten Drähten) zugleich geprüft wurden.

Jedes Material wurde zuerst geglüht, langsam gekühlt und sodann seine Dichte δ_l gemessen; darauf geglüht, rasch abgekühlt (abgelöscht) und wieder seine Dichte δ_r bestimmt. So wechselten, meistens öfter, Messungen von δ_l und δ_r miteinander ab. Tab. 1 enthält eine Zusammenstellung sämtlicher Beobachtungen.

Tabelle 1.

Bezeichnung des Materials	Langsam gekühlt δ_l	Rasch gekühlt δ_r	$\delta_r - \delta_l$		$\delta_r - \delta_l$ Mittel
a	7,4772	7,4642	-0,0005.	+0,0115	} +0,007
	4522	4572	+0,0084.	+0,0076	
	4495	4554	+0,0068.		
	4384	4367	+0,0068.		
b	7,2830	7,2585	-0,0015.	-0,0017	} -0,011
	2370	1937	-0,0109.	-0,0143	
	2064	1977	-0,0280.		
	1925	1587	-0,0107.		

(Fortsetzung von Tabelle 1).

Bezeichnung des Materials	Langsam gekühlt δ_l	Rasch gekühlt δ_r	$\delta_r - \delta_l$		$\delta_r - \delta_l$ Mittel
<i>c</i>	7,7585 7319 7022	7,7549 7449 7237	+0,0097. +0,0180. +0,0279.	+0,0321	+0,022
<i>c</i> (Andere Drähte)	7,7571 7422 7240	7,7794 7879 7534	+0,0298. +0,0414. +0,0548.	+0,0466	+0,043
<i>d</i>	7,7954 7754	7,7240 6874	-0,0614. -0,0697.		-0,066
<i>e</i>	7,7742 7602	7,7119 6834	-0,0553. -0,0626.		-0,059
<i>f</i>	7,7970	7,7210	-0,0760.		-0,076
<i>g</i>	7,5682	7,5689	+0,0007.		+0,001
<i>h₁</i>	— 7,6574 6669 6714	7,6334 6334 6656 6892	-0,0240. -0,0287. -0,0174. -0,0035.	+0,0060	-0,013
<i>h₂</i>	— 7,7028 6960 7020	7,6927 6912 7044 6888	-0,0107. -0,0081. +0,0018. +0,0054.	-0,0054	-0,003
<i>h₃</i>	— 7,7110 6987 6989	7,7047 6867 7072 6978	-0,0153. -0,0156. +0,0032. +0,0109.	+0,0036	-0,003
<i>i</i>	7,0412 0152 6,9989	7,0137 0052 6,9919	-0,0145. -0,0058. -0,0018.	-0,0004	-0,006
<i>k</i>	7,1465 1402 1345 1266 1097 1024 0986 0915	7,1384 1319 1297 1004 1029 1042 0887 0906	-0,0049. -0,0051. -0,0054. -0,0037. -0,0008. -0,0116. -0,0117. -0,0081.	-0,0031 +0,0011 +0,0037 -0,0022 -0,0063 -0,0019	-0,005
<i>l</i>	7,6564 6444	7,6530 6344	+0,0026. -0,0007.		+0,001
<i>m</i>	7,6320 5913	7,5539 5209	-0,0578. -0,0541.		-0,056
<i>n</i> (Andere Stückchen)	7,5754 5510	7,5097 4805	-0,0535. -0,0559.		-0,055

Was beim Betrachten vorstehender Tabelle zuerst in die Augen fällt, das ist die bei allen Eisensorten mit alleiniger Ausnahme des galvanoplastischen Eisens stattfindende, theilweise sehr bedeutende Abnahme des specifischen Gewichtes infolge wiederholten Ausglühens.

Die Ausnahme, welche allein das reine Eisen bildet¹⁾, lässt die Ursache der Erscheinung erkennen; sie liegt offenbar in dem Kohlegehalt des Materiales, welcher durch das Glühen eine Aenderung erfahren wird. Dabei könnte sich sowohl der Gesamtgehalt als das Verhältniss zwischen freier und gebundener Kohle ändern. Bemerken will ich noch, dass alle Stücke niemals länger als nöthig glühend erhalten wurden. Ein kleinster Werth der Dichte ist dann auch nach oft wiederholtem Glühen nicht erreicht worden. Diese fortschreitende Verminderung der Dichte machte es nöthig, die Beobachtungen zuerst in passender Weise zu combiniren, ehe man die gestellte Frage nach dem Unterschiede der Dichte bei rascher und bei langsamer Abkühlung beantworten konnte. Ich habe jede Messung mit der vorhergehenden und der folgenden combinirt und so die in der vierten Reihe der Tabelle 1 enthaltenen Zahlen bekommen. An der Bildung dieser Differenzwerthe haben jedoch die mittleren Glieder der Reihen von δ_i und δ_r mehr Antheil, als die Endglieder. Ich habe trotzdem das einfache arithmetische Mittel aus allen Differenzwerthen, auf drei Decimalen abgerundet, genommen, weil es auf die Kenntniss des genauen Zahlenwerthes von $\delta_r - \delta_i$ gar nicht ankommt.

Vergleichen wir nun die in der letzten Spalte enthaltenen Mittelwerthe miteinander, so finden wir eine Zunahme des specifischen Gewichtes durch Ablöschen nur bei den Eisendrähten a) und c), bei dem galvanoplastischen Eisen g) und bei dem Schmiedeeisen l). Von dem galvanoplastischen Eisen g) liegt jedoch nur je eine Messung vor, und der eine sich ergebende Differenzwerth liegt innerhalb der Grenzen

1) Bei dem Blech h_1 nahm im Gegentheil das specifische Gewicht mit wiederholtem Glühen zu: es war anfänglich bedeutend kleiner, als das der beiden anderen Bleche, näherte sich diesem bei öfterem Glühen aber immer mehr an.

der Beobachtungsfehler. Für das Schmiedeeisen l) sind zwar zwei Differenzwerthe erhalten, aber dieselben sind von geringer Grösse und von verschiedenem Vorzeichen. Deshalb können wir schliessen, dass bei dem galvanoplastischen Eisen g) und bei dem Schmiedeeisen l) die Dichte von der Geschwindigkeit, mit welcher das glühende Material sich abkühlt, merklich unabhängig ist.

Dagegen ist für die Eisendrähte a) und c) eine Zunahme des specifischen Gewichtes nach dem Ablöschen mit Sicherheit nachgewiesen, und bei den Drähten c) ist sie sogar recht bedeutend.

Alle anderen untersuchten Materialien, nämlich die Eisendrähte b), die Stahldrähte d) und e), der Stahlstab f), das galvanoplastische Eisen h), das Gusseisen (graue Roheisen) i) und k), sowie endlich das weisse Roheisen m) erlitten sämmtlich durch Ablöschen eine Abnahme ihres specifischen Gewichtes. Am grössten ist dieselbe beim Stahl und bei dem weissen Roheisen, geringer bei dem Eisendraht c) und am kleinsten bei dem Gusseisen und dem galvanoplastischen Eisen. Während aber bei den untersuchten Stahlsorten, dem Eisendraht und dem grauen und weissen Roheisen die Abnahme der Dichte ausser allem Zweifel steht, sind die für das galvanoplastische Eisen h) gefundenen Mittelwerthe mit Vorsicht aufzunehmen, da von im ganzen funfzehn Werthen für $\delta_r - \delta_i$ neun Werthe negatives, sechs positives Vorzeichen besitzen. Darum halte ich es nicht für unwahrscheinlich, dass aus einer grösseren Zahl von Messungen — dieselbe war wegen zunehmender Abnutzung der Bleche nicht möglich — ein der Null nahe kommender Mittelwerth für $\delta_r - \delta_i$ resultiren wird; ich betrachte also das Vorhandensein eines Dichteunterschiedes nach langsamer und rascher Abkühlung beim galvanoplastischen Eisen als nicht erwiesen. Bekanntlich classificirt man die verschiedenen Varietäten des Eisens nach ihrem Gehalt an Kohle, welche entweder im freien oder im gebundenen Zustand vorhanden sein kann; denn der Kohlegehalt bestimmt, wenn auch nicht ausschliesslich, so doch vorzugsweise die Eigenschaften einer Eisensorte. Deshalb zweifelte ich nicht daran, dass auch das Vorzeichen und die

Grösse der Dichteänderung beim Ablöschen im allgemeinen vom Kohlegehalt abhängen werde. Die Beobachtungen widersprechen nun dieser Annahme zwar nicht, aber sie lassen doch auch für das Gesetz der Abhängigkeit noch einen weiten Spielraum. Aus den mit Gusseisen und weissem Roheisen angestellten Messungen geht jedoch hervor, dass weniger der Gesamtkohlenstoffgehalt als die Menge der chemisch gebundenen Kohle für die Dichtigkeitsänderung bestimmend ist. Denn diese war bei dem weissen Roheisen mit grossem Gehalt an gebundener Kohle zehnmal so gross, wie bei dem grauen Roheisen, in welchem die Kohle grösstentheils frei als Graphit enthalten ist.

Während nun bei dem weissen Roheisen und bei Stahl — Körpern von grösserem Gehalt an gebundener Kohle — die Dichte infolge Ablöschens sich verminderte, nahm sie bei zweien von den untersuchten drei Eisendrahtsorten — Körpern, welche jedenfalls nur kleine Mengen gebundener Kohle enthielten — zu. Die dritte Drahtsorte, aus der einen der beiden ersteren durch Ziehen gewonnen, verhielt sich entgegengesetzt, was vielleicht auf einen infolge des Drahtzuges eintretenden Uebergang freier Kohle in gebundene zurückgeführt werden kann. Hiernach würden kleinere Mengen chemisch gebundener Kohle im Eisen eine Zunahme, grössere Mengen eine Abnahme seiner Dichte hervorrufen, sobald es glühend in kaltes Wasser eingetaucht wird.

Dieser Annahme scheinen auch die beiden Beobachtungen, welche allein — soweit mir bekannt geworden — eine Zunahme der Dichte von Stahl nach dem Ablöschen ergeben haben, nicht zu widersprechen. Denn nach einer in Scheerer's Metallurgie gegebenen Zusammenstellung besitzt Steyrischer Stahl, mit welchem Rinmann experimentirte, nur geringen Kohlegehalt, und die Bezeichnung der von H. Meyer untersuchten Stahlsorte als eines „weichen“ Stahles lässt ebenfalls auf einen kleinen Gehalt an Kohle schliessen.

Ob indess die geäusserte Ansicht, welche ich mehr vermuthungsweise ausgesprochen haben möchte, richtig ist, darüber müssen ausgedehntere, mit Analysen der Eisensorten verbundene Untersuchungen entscheiden.

Mousson hat in seinem Lehrbuch der Physik die Dichteänderung durch Ablöschen rein mechanisch zu erklären gesucht, indem er annimmt, dass durch die zuerst erfolgende Erkaltung der äussersten Schichten des Körpers das noch heisse Innere gehindert werde, sich der Abnahme der Temperatur entsprechend zusammenzuziehen. Hierdurch aber würden die äussersten Schichten in einen Zustand gewaltsamer Pressung, das Innere in einen Zustand gewaltsamer Spannung kommen. Daraus würde dann nach Mousson dreierlei folgen: erstens eine grössere Dichte (und Härte) der Oberflächenschichten, zweitens eine geringere Dichte (und Härte) des Inneren und drittens eine Zunahme des Volumens.

Sehen wir von den beiden ersten Folgerungen zunächst noch ab und beschäftigen uns nur mit der dritten.

Dieselbe widerspricht den mit den Eisendrähten a) und c) erhaltenen Resultaten sowie den Beobachtungen von Rinmann und von Meyer. Eine solche, ausschliesslich mechanische Auffassung des Vorganges beim Ablöschen ist also sicher nicht statthaft. Indessen, da die Mousson'sche Erklärung von chemischen Vorgängen während des Ablöschens ganz absieht, solche aber bei kohlenstoffhaltigem Eisen nachweislich eintreten, so war es denkbar, dass die obige Erklärung wenigstens auf reines Eisen anwendbar sein würde, und in der That zeigte ja auch dieses im Durchschnitt eine Volumenzunahme beim Ablöschen. Eine entscheidende Bedeutung darf man aber, wie gezeigt, dem erhaltenen Mittelwerth nicht beilegen. Ich habe ferner auch Platin geprüft, ohne dass es mir gelungen wäre, eine Volumenänderung sicher nachzuweisen.

Deshalb glaube ich, dass eine Volumenänderung als Folge des Ablöschens bei gut die Wärme leitenden Körpern, wie die Metalle sind, überhaupt nur dann eintreten kann, wenn zugleich chemische Processe stattfinden. Dagegen will ich die Möglichkeit einer solchen bei Körpern von geringem Wärmeleitungsvermögen, wie Glas, gern zugeben.

2. Ueber die Vertheilung der Dichte und der Härte im abgelöschten Stahl.

Versuche über die Vertheilung der Dichte und der Härte habe ich nur mit der Stahlsorte f) angestellt. Ehe ich mich zu der Beschreibung derselben wende, seien jedoch einige mit den anderen Eisensorten gemachte Erfahrungen mitgetheilt.

Bekanntlich lässt sich zwischen Schmiedeeisen und Stahl keine scharfe, allein durch den Kohlenstoffgehalt bestimmte Grenze ziehen. Denn die für den Stahl charakteristische Eigenschaft der Härtbarkeit wird sowohl durch die Menge des Kohlenstoffes als auch durch die Anwesenheit von Spuren anderer Metalle geweckt, sodass auch noch Eisen von geringem Kohlegehalt (etwa 0,5 Proc.), wenn es durch andere Metalle verunreinigt ist, gehärtet werden, also wie Stahl sich verhalten kann. Erst bei noch geringerem Kohlegehalt als 0,5 Proc. qualificirt sich das Eisen unter allen Umständen als Schmiedeeisen, d. h. es erlangt dann durch Ablöschen in kaltem Wasser nur eine sehr wenig grössere Härte als zuvor, und diese Zunahme ist dann desto kleiner, je ärmer es an Kohlenstoff und an fremden Bestandtheilen ist. Das ist die gebräuchliche Ansicht, und in diesem Sinne spricht sich auch Karsten in seinem Handbuch der Eisenhüttenkunde aus, indem er sagt: „Für alle Stabeisenarten ist es charakteristisch, dass sie, in glühendem Zustande plötzlich in kaltem Wasser abgelöscht, keine bedeutend grössere Härte erlangen.“

Damit stimmen auch meine Erfahrungen überein: Die Eisendrahtsorten b) und c) erwiesen sich nach dem Ablöschen zwar nicht bedeutend, aber doch entschieden härter, als nach langsamer Abkühlung, indem sie der Biegung einen grösseren Widerstand entgegensetzten. Die Härtung hat also mit der gleichzeitigen Aenderung der Dichte nichts zu thun, denn während die Dichte von b) abnahm, nahm die von c) zu. Bei der Eisendrahtsorte a) bin ich — wegen der grösseren Dicke derselben — zu keinem sicheren Resultat gelangt. Das galvanoplastische Eisen war entschieden nicht härter durchs Ablöschen geworden. Das Gusseisen endlich

sowie das an sich spröde weisse Roheisen habe ich mit der Feile geprüft, aber ohne sicheres Resultat.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass Platin und Kupfer abgelöscht nicht härter erschienen, als langsam gekühlt. Es scheint also, dass auch die Eigenschaft der Härbarkeit bei Metallen an den Eintritt einer chemischen Aenderung geknüpft ist. Beim Eisen ist es vorzugsweise der Kohlenstoff, welcher, wenn er in gewisser, weder zu kleiner noch zu grosser Menge im Eisen enthalten ist, beim Ablöschen chemisch verändert und dadurch die Ursache der Härtung wird.

Aus einem cylindrischen Stahlstabe von 0,55 cm Durchmesser wurden fünf Stäbchen geschnitten. Vier derselben hatten die gleiche Länge von etwa 3 cm. Sie wurden abgelöscht, und zwar a) und b) in Wasser von 45°, c) und d) in Wasser von 15°. Das fünfte Stäbchen e) hatte eine Länge von nur 2,3 cm. Es wurde geglüht und langsam bis auf Zimmertemperatur abgekühlt. Nachdem die Dichten der Stäbchen bestimmt waren, wurden sie in Salpetersäure, der etwas Salzsäure zugesetzt war, etwas abgeätzt und dann wieder ihre Dichte gemessen, darauf etwas weiter abgeätzt etc. Die Abätzung ging durchweg sehr regelmässig vor sich, die Stäbchen blieben cylindrisch und von glatter Oberfläche. Zwei der abgelöschten Stäbchen besaßen Risse, jedoch von sehr geringer Ausdehnung in die Tiefe.

Zu den Dichtemessungen diente die hydrostatische Wage, nur bei den zehn ersten Beobachtungen mit Stäbchen (b) wurde das früher erwähnte Pyknometer benutzt. Tabelle 2 (s. p. 381) enthält die Resultate der Dichtemessungen, sowie die absoluten Gewichte der Stäbchen.

Bei dem Stäbchen (a) blieb also die Dichte während des Abätzens nahezu constant. Sie war fast immer etwas (höchstens um 0,007) kleiner als im Anfang, nur dreimal erreichte sie den Anfangswerth, d. h. die mittlere Dichte des noch nicht geätzten, eben abgelöschten Stäbchens, im Mittel war sie um 0,004 kleiner als dieser. Bei dem Stäbchen (b) nahm die Dichte anfänglich schnell ab und wieder zu und sank dann allmählich mit kleinen Oscillationen auf einen constanten Werth, welcher grösser als der Anfangswerth war.

Tabelle 2.

Nr. der Beob.	a		b		c		d		e	
	m	δ	m	δ	m	δ	m	δ	m	δ
1.	6,635	7,735	6,480	7,714	6,328	7,715	6,338	7,727	4,931	7,795
2.	624	734	462	703	245	704	248	718	856	790
3.	610	731	452	754	204	706	122	718	777	789
4.	596	733	402	754	142	706	005	713	670	794
5.	576	729	360	760	051	704	5,892	716	577	793
6.	538	731	321	758	5,946	698	784	716	508	792
7.	495	731	282	759	803	702	625	723	437	798
8.	474	731	229	757	332	700	531	718	343	791
9.	424	730	188	753	181	704	377	716	270	793
10.	349	732	154	758	4,868	696	278	715	177	789
11.	296	733	115	745	594	708	145	714	103	788
12.	241	731	072	747	297	705	026	704	3,999	791
13.	080	728	016	745	060	701	4,909	708	861	790
14.	018	735	5,974	743	3,778	697	772	704	771	787
15.	5,754	730	916	747	535	698	607	710	656	783
16.	587	735	857	739	202	710	391	710	590	786
17.	129	725	813	733	2,898	693	201	714	507	781
18.	4,630	728	756	735	—	—	3,973	705	395	789
19.	177	731	696	736	—	—	759	705	318	792
20.	3,645	735	649	739	—	—	559	700	216	795
21.	038	734	590	737	—	—	388	720	116	792
22.	2,747	733	527	736	—	—	237	715	2,987	794
23.	—	—	484	737	—	—	049	715	880	780
24.	—	—	435	736	—	—	2,882	708	—	—
25.	—	—	378	740	—	—	737	705	—	—
26.	—	—	321	737	—	—	—	—	—	—
27.	—	—	247	736	—	—	—	—	—	—
28.	—	—	176	735	—	—	—	—	—	—
29.	—	—	083	736	—	—	—	—	—	—
30.	—	—	4,998	734	—	—	—	—	—	—
31.	—	—	660	735	—	—	—	—	—	—

Bei den beiden anderen, in kälterem Wasser abgelöschten Stäbchen (c) und (d) nahm die Dichte abwechselnd ab und wieder zu, und zwar vollzogen sich die Aenderungen der Dichte bei beiden etwa in der gleichen Weise, indem ein Maximum oder Minimum der Dichte ungefähr bei der gleichen Dicke der Stäbchen eintrat. Die Dichte blieb bei beiden unter den resp. Anfangswerthen, im Mittel war sie um 0,015, resp. um 0,013 kleiner als diese.

Von diesen vier Beobachtungsreihen führt die zweite zu sehr merkwürdigen Resultaten. Wenn man nämlich die Dichten der beiden Schichten berechnet, welche zwischen der ersten und der zweiten, sowie zwischen der zweiten und der

dritten Messung abgeätzt wurden, so findet man die Werthe sechszehn und zwei. Die Dicke jeder der beiden Schichten würde etwa 0,002 mm betragen.

Wenn nun auch wegen der Kleinheit der abgeätzten Massen diese Zahlen mit relativ bedeutenden Fehlern behaftet sein mögen, so bleibt doch, wenn man nicht grobe Beobachtungsfehler annehmen will, die ich nicht für wahrscheinlich halte, die Thatsache bestehen, dass zwischen einer sehr dichten Oberflächenschicht und dem nahezu gleichmässig dichten Kern eine Schicht von ausserordentlich geringer Dichte gelegen habe. Von diesen eigenthümlichen Verhältnissen der Oberfläche abgesehen, ist die Vertheilung der Dichte eine recht regelmässige: Sie nimmt bis zu einem merklich constanten Werthe ab. Somit hätten wir eine dichtere Hülle, welche einen weniger dichten Kern umschliesst.

Die erste Beobachtungsreihe, welche sich ebenfalls auf ein in warmem Wasser abgelöschtes Stäbchen bezieht, zeigt ausserordentlich geringe Unterschiede der Dichte. Der grösste zwischen zwei Beobachtungen beträgt sieben Einheiten der dritten Decimale, was vollkommen auf Rechnung von jederzeit vorhandener Inhomogenität gesetzt werden kann. Daraus jedoch, dass die Dichte später im Durchschnitt kleiner war, als bei der Anfangsbeobachtung, darf geschlossen werden, dass dieses Stäbchen eine von aussen nach innen — mit Schwankungen — abnehmende Dichte besessen habe.

Der gleiche Schluss ergibt sich aus den Messungen mit den beiden in kaltem Wasser abgelöschten Stäbchen (c) und (d). Bei diesen ist jedoch der Unterschied zwischen der Dichte der äusseren Schichten und der des Inneren viel grösser, als bei dem Stäbchen (a), aber auch die unregelmässigen Schwankungen sind bei ihnen viel bedeutender.

Ich habe nun die Dichtigkeiten der Schichten berechnet, welche zwischen zwei Beobachtungen abgeätzt wurden, die ein relatives Maximum oder Minimum der Dichte ergaben. Die Tabelle 3_a enthält die Resultate dieser Rechnung für das Stäbchen (d), sowie ausserdem noch die mittlere Dichte der bis zu der betreffenden Beobachtung im ganzen abge-

ätzten Schichten und die mittlere Dichte des noch übrigen Theiles des Stabes.

Tabelle 3_a.

Nr. der Beobachtung	δ_1 Dichte der zwischen zwei Beobachtungen abgeätzten Schicht	δ_2 Dichte d. zwischen der ersten u. einer der folgenden Beobachtungen abgeätzten Schicht	δ_3 Dichte des noch nicht abgeätzten Theiles des Stabes
1.	—	—	—
4.	7,98	7,98	7,71
7.	7,58	7,76	7,72
13.	7,88	7,82	7,70
17.	7,65	7,75	7,71
20.	7,79	7,76	7,70
21.	7,31	7,74	7,72
26.	7,76	7,74	7,71

Die Werthe von δ_1 zeigen, wie in den Stäbchen, Schichten von grösserer und kleinerer Dichte miteinander abwechseln, die von δ_2 , mit denen von δ_3 zusammengehalten, dass die Dichte von aussen nach innen abnimmt, indem stets die Dichte des abgeätzten Theiles die des noch übrig bleibenden übertrifft.

Das langsam gekühlte Stäbchen (e) wurde nun hauptsächlich deshalb untersucht, um zu prüfen, ob das bei den Stäbchen (c) und (d) gefundene Abwechseln dichter und weniger dichter Schichten eine Folge des Ablöschens sei.

Die Tabelle 3_b bezieht sich auf das Stäbchen (e), und die δ_1 δ_2 δ_3 haben dieselbe Bedeutung, wie in Tabelle 3_a.

Tabelle 3_b.

Nr. d. Beob.	δ_1	δ_2	δ_3
1.	—	—	—
3.	7,93	7,93	7,79
7.	7,70	7,77	7,80
11.	7,89	7,82	7,79
17.	7,75	7,79	7,78
20.	7,64	7,76	7,79
23.	7,92	7,79	7,78

Bei dem langsam gekühlten Stäbchen finden also ganz ähnliche Schwankungen der Dichte statt, wie bei den in

kaltem Wasser abgelöschten, woraus folgt, dass sie nicht durch das Ablöschen erzeugt werden, sondern als von Haus aus vorhandene Inhomogeneitäten des Stabes aufzufassen sind.

Eine Vergleichung der δ_2 mit δ_3 ergibt, dass die Dichte des abgeätzten Theiles des Stabes nur zweimal entschieden grösser ist, als die des noch nicht abgeätzten. Eine Abnahme der Dichte von der Oberfläche nach der Axe hin findet also bei dem langsam gekühlten Stabe nicht statt.

„In ihrer Gesammtheit bestätigen demnach die vorliegenden Versuche die gebräuchliche Ansicht, dass sich als Folge des Ablöschens eines glühenden Stahlstabes eine derartige Vertheilung der Dichte herstellt, bei welcher dieselbe in der Richtung von aussen nach innen abnimmt.“

Ich habe bis jetzt nur von der Vertheilung der Dichte in einem abgelöschten Stahlstab gesprochen. Nach der gebräuchlichen Ansicht, welche auch von Mousson vertreten wird, soll aber nicht nur die Dichte, sondern auch die Härte in der Richtung von aussen nach innen kleiner werden, es soll eine härtere Schale einen weicheren Kern umschliessen.

Es wurden nun die Stäbchen während des Abätzens zugleich auch mit einer guten Feile auf ihre Härte geprüft. Dabei erwiesen sich die vier abgelöschten Stäbchen sämmtlich durch ihr ganzes Innere — es wurde bis zu einer übrig bleibenden Dicke von 1,5 mm abgeätzt — so hart, dass niemals ein Angriff durch die Feile möglich war. Der langsam gekühlte Stab dagegen war durchweg sehr weich.

Wenn also auch immerhin die Möglichkeit zugestanden werden muss, dass die Härte des abgelöschten Stabes im Inneren etwas kleiner war, als in den obersten Schichten, so trifft doch die Annahme eines von harter Schale umschlossenen weichen Kernes nicht zu, und sie wird sich wohl überhaupt nicht bestätigen bei allen Stahlstäben, deren Dicke unterhalb der hier benutzten von nahe 6 mm liegt.

„Solche Stäbe sind also, sie mögen in warmem oder in kaltem Wasser abgelöscht worden sein, als homogen in Bezug auf Härte zu betrachten.“

Ob dies Resultat auch für noch dickere Stäbe Gültigkeit besitzt, resp. von welcher Dicke des Stabes an das Innere trotz des Ablöschens weich bleibt, ist durch weitere Versuche zu entscheiden.

Halten wir jetzt mit dem obigen Resultat das der Dichtemessungen zusammen, so erkennen wir, dass beim abgelöschten Stahl Dichte und Härte durchaus nicht parallel gehen, dass vielmehr einer grösseren Dichte eine kleinere Härte entsprechen kann, und umgekehrt. Denn nach Tab. 3_a besitzen von sieben Schichten des abgelöschten Stäbchens (d) vier eine beträchtlich geringere Dichte als die mittlere des langsam gekühlten weichen Stäbchens (e) und sind dennoch vollkommen hart. Zu demselben Resultate führt auch die Bemerkung, dass die oberste Schicht des Stäbchens (e) nach Tab. 3_b eine berechnete Dichte von 7,93 besass und trotz dieser hohen Dichtigkeit vollkommen weich war.

Von den drei Consequenzen einer ausschliesslich mechanischen Auffassung des Vorganges der Stahlhärtung durch Ablöschen wurde die die Dichtigkeitsvertheilung betreffende als richtig befunden, die andere, welche die Härtevertheilung betraf, konnte zum einen Theil nicht mit absoluter Genauigkeit geprüft werden, zum anderen Theil erwies sie sich als falsch, wobei jedoch nicht ausgeschlossen ist, dass sie sich bei anderen, nämlich dickeren Stahlstäben, als richtig herausstellt. Der dritten Consequenz, welche den Eintritt einer Volumenzunahme infolge des Ablöschens aussagt, entspricht zwar das Verhalten der meisten Stahlsorten, andere aber widersprechen ihr in auffälliger Weise. Die genannte mechanische Auffassung nimmt endlich einen Parallelismus der Dichte und der Härte an, indem sie ein Anwachsen der Härte durch eine Zunahme der Dichte erklärt. Wir haben jedoch gesehen, dass Dichte und Härte keineswegs gleichzeitig zu- oder abnehmen.

Somit gelangen wir zu dem Schluss, dass bei dem Ablöschen eines Stahlstabes neben dem mechanischen, rein physikalischen Vorgange der plötzlichen Contraction noch ein

anderer, chemischer Art, eintreten muss. Dieser besteht in einer Bindung vorher freien Kohlenstoffes durch das Eisen.

Zu dem gleichen Resultat ist schon vor mehreren Jahren Barus¹⁾ auf Grund anderer Versuche und Betrachtungen gelangt. Derselbe stellt die Bindung des Kohlenstoffes als die Hauptursache der Härte hin, welche dann durch den mechanischen Vorgang etwas modificirt werden könne.

Fragt man jedoch weiter nach der Ursache der Kohlenstoffbindung, so wird man leicht zu der Einsicht geführt, dass dieselbe nur in dem mechanischen Vorgang gesucht werden kann, welcher somit als die primäre Ursache der Härtung erscheinen würde. Ich denke mir nämlich, dass es wesentlich die starken, bei der plötzlichen Contraction glühend in kaltes Wasser eingetauchten Stahles auftretenden Druckkräfte sind, welche die Verbindung der Kohle mit dem Eisen herbeiführen.

Dieselbe Auffassung findet sich auch in einer schon vor 20 Jahren veröffentlichten Arbeit von Caron.²⁾ Dasselbst werden Versuche mitgetheilt, welche das Verhalten von abgelöschtem, von gehämmertem und von langsam gekühltem Stahl gegen Säuren betreffen. Sie ergaben das Resultat, dass der Kohlerückstand bei ersterem verschwindend klein, bei dem zweiten bedeutender und bei dem dritten am grössten ist. Hieraus schliesst Caron, dass der durch Ablöschen gehärtete Stahl die Kohle fast nur in chemischer Verbindung enthält, und dass das, was durch das Ablöschen in der vollkommensten Weise, nämlich die Bindung des Kohlenstoffes, auch durch Hämmern wenigstens theilweise erreicht wird. Die Ursache für die Bindung der Kohle würde aber in beiden Fällen die gleiche, nämlich die durch Druck hervorgebrachte Annäherung der Molecüle sein, und die schwächere Wirkung des Hämmerns würde dadurch ihre Erklärung finden, dass erstens hierbei die Annäherung nur in einer, bei dem Ablöschen aber gleichzeitig in allen Richtungen geschieht, und dass zweitens wohl auch die ausgeübten Druckkräfte schwächer sind als die beim Ablöschen erzeugten.

1) Barus, Wied. Ann. 7. p. 383. 1879.

2) Caron, Compt. rend. 56. p. 45 u. 211. 1863.

Wenn die vorgetragene Auffassung von der Ursache der Stahlhärtung durch Ablöschen richtig ist, so muss es auch möglich sein, den Stahl dadurch zu härten, dass man ihn zwar langsam aus dem glühenden Zustand erkalten lässt, aber während dessen hohen Drucken aussetzt. So behandelter Stahl müsste dann ebenso wie der abgelöschte einen grösseren Gehalt an gebundener Kohle besitzen und hart erscheinen. In der That ist beides nach den Versuchen von Clémandot¹⁾ und Lan²⁾ der Fall.

Giessen, April 1884.

IV. Ueber die bei einigen Gasentwickelungen auftretenden Electricitäten³⁾; von W. Hankel.

(Aus den Berichten der math.-phys. Classe der königl. sächs. Ges. der Wiss. 1883, mitgetheilt vom Hrn. Verf.).

Im Laufe der letzten Jahre habe ich mich mit den bei einigen Gasentwickelungen auftretenden Electricitäten beschäftigt, und ich lege heute der Gesellschaft eine Abhandlung (die siebenzehnte in der Reihe meiner electrischen Untersuchungen⁴⁾) vor, in welcher die Resultate der darauf bezüglichen Beobachtungen und Messungen zusammengestellt sind. In dem kurzen Berichte, welchen ich jetzt darüber geben will, muss ich mich jedoch darauf beschränken, die electrischen Vorgänge bei den verschiedenen Gasentwickelungen im allgemeinen zu charakterisiren.

Der Gedanke, dass bei chemischen Zersetzungen, namentlich bei Gasentwickelungen, Electricität auftreten könne, ist zuerst im Jahre 1769 von Volta ausgesprochen worden; indess hatten seine damaligen Versuche, solche aufzufinden,

1) Clémandot, Compt. rend. **94.** p. 703. 1882; **95.** p. 587. 1882.

2) Lan, Compt. rend. **94.** p. 952. 1882.

3) Vorgetragen in der Sitzung am 23. April 1883.

4) Hankel, Abhandl. d. k. Sächs. Ges. d. Wiss. **20.** (math.-phys. Classe **12.**) p. 598. 1883.

keinen Erfolg. Nach der Construction seines Condensators kam er wieder auf diesen Gegenstand zurück; neue Versuche wurden jedoch erst im Jahre 1782 auf einer Reise nach Paris im Verein mit de la Place und Lavoisier angestellt.

Seit jener Zeit ist meines Wissens keine eingehende Untersuchung über diese Electricitätsentwicklung veröffentlicht worden; ein Umstand, der sich wohl durch die geringe Empfindlichkeit der früheren Electrometer erklärt. Dagegen bot das von mir construirte Electrometer alle Hülfsmittel, um selbst die oft sehr geringen Electricitätsmengen mit voller Genauigkeit wahrzunehmen und zu messen.

Der Inhalt der einzelnen Abschnitte meiner Abhandlung ist nun in der Kürze folgender:

I. Electrometer.

Bei meinem Electrometer hängt das Goldblättchen in der Mitte zwischen zwei Messingscheiben, welche mittelst eines geeigneten Commutators mit den Polen einer aus Zink-Kupfer-Wasser-Elementen gebildeten, und in der Nähe der Mitte zur Erde abgeleiteten Volta'schen Säule verbunden sind. Die Messung der dem Goldblättchen zugeführten Electricität geschah stets auf die Weise, dass der Ausschlag beobachtet wurde, welcher durch Umlegen des Commutatorbügels (Verwechselung der Polaritäten in den Messingscheiben) entstand.

Das Electrometer wurde so justirt, dass das Goldblättchen desselben, wenn es durch einen mit den eisernen Gasröhren des Hauses verbundenen Kupferdraht zur Erde abgeleitet war, beim Umlegen des Commutatorbügels keinen Ausschlag gab. Dies liess sich, obwohl das Goldblättchen durch die genannte Ableitung eine electricische Spannung von nahe $-0,21$ (die Spannung zwischen Zink und Kupfer $= +1$ gesetzt) erhält, erreichen, wenn der negative Pol der Volta'schen Säule gerade so weit verstärkt wurde, dass die Vertheilungswirkung seines Ueberschusses über den positiven Pol auf das Goldblättchen die negative Ladung des letzteren aufhob. Da das Blättchen genau in der Mitte

zwischen beiden Scheiben hing, also zu beiden in gleichen Beziehungen stand, so blieb auch beim Umlegen des Commutatorbügels der unelectrische Zustand des Goldblättchens erhalten, und es trat keine Aenderung seiner Lage ein. Der Ausschlag, welcher dann durch Zuführung fremder Electricität erfolgte, mass also nur diese letztere; die ursprüngliche, durch die Ableitung zur Erde bedingte Spannung hatte darauf keinen Einfluss.

II. Electricische Vorgänge bei von Metallen abfallenden Wassertropfen.

Die Anordnung der späteren Versuche über die bei Gasentwickelungen auftretenden Electricitäten machte es nöthig, zuvor die electricischen Vorgänge genauer zu erörtern, welche beim Abfallen der Wassertropfen von Metallen sich zeigen.

Ein trichterförmiges, isolirt aufgestelltes Glasgefäss war unten in eine so feine Spitze ausgezogen, dass in dasselbe eingegossenes Wasser nur in Tropfen (vier bis acht in der Sekunde) von dieser Spitze abfiel; die Tropfen sammelten sich in einer unterhalb befindlichen Platinschale.

Wird nun in das Wasser des Trichters ein Metallstück eingetaucht, welches durch einen an den Gasröhren des Hauses befestigten Kupferdraht mit der Erde in leitender Verbindung steht, so erhält das Wasser und also auch der an der unteren Spitze des Trichters sich bildende Tropfen infolge dieser Ableitung eine electricische Spannung, die sich, wenn die Spannung des eben genannten Kupferdrahtes gegeben ist, nach den in meinen Maassbestimmungen der electromotorischen Kräfte¹⁾ aufgeführten Zahlenwerthen berechnen lässt. Taucht Platin in das Wasser, so erhält das Wasser eine negative Spannung; taucht Kupfer ein, so ist die ebenfalls negative Spannung viel geringer; taucht Zink ein, so nimmt dagegen das Wasser eine positive Spannung an, deren absoluter Werth etwas grösser ist als der negative beim Platin.

Ist die unterhalb des Trichters stehende Platinschale

1) Hankel, Abh. der k. sächs. Ges. d. Wiss. 11. p. 605 ff. 1865.

isolirt und durch einen Metalldraht mit dem Goldblättchen des Electrometers verbunden, so wird durch die herabfallenden Tropfen der Schale und dem Electrometer eine der Spannung des Wassers entsprechende electricische Ladung (negativ bei Platin und Kupfer, positiv bei Zink) zugeführt, die mit der Anzahl der in der Schale angesammelten Tropfen wächst.

Wird das in das Wasser des isolirten Trichters eintauchende Metall durch einen Draht mit dem Goldblättchen des Electrometers verbunden und dann diese Leitung mit einem an den eisernen Gasröhren des Hauses befestigten Kupferdraht ableitend berührt, so bleibt nach dem Zurückziehen des Kupferdrahtes in dem vom Goldblättchen bis zum Wasser des Trichters reichenden isolirten Leiter eine electricische Ladung zurück, welche durch die electricische Spannung des ableitenden Drahtes bedingt ist. Ist diese letztere gegeben, so lässt sich, wie ich schon vorhin bemerkt, der electricische Zustand der einzelnen Theile der zuvor beschriebenen Leitung aus meinen Maassbestimmungen berechnen.

Wenn Platin in das Wasser taucht, erhält das Wasser eine negative Ladung; wird nun diese negative Ladung des Wassers durch Fortführung seitens der von der Spitze des Trichters abfallenden Tropfen immer geringer, so muss der absolute Werth der Spannung an allen Punkten des Leiters in gleichem Grade sich ändern, während die Unterschiede zwischen seinen verschiedenen Theilen bestehen bleiben. Würde z. B. das Wasser des Trichters durch die fallenden Tropfen gänzlich entladen, so müsste der electricische Zustand des Goldblättchens um den vollen Betrag der verschwundenen Spannung nach der positiven Seite hin sich ändern, beim Umlegen des Commutatorbügels also ein positiver Ausschlag angezeigt werden.

Ist Zink in das Wasser eingetaucht und durch einen Draht mit dem Goldblättchen verbunden, so besitzt das Wasser nach dem Zurückziehen des ableitenden Kupferdrahtes eine positive Spannung. Wird diese durch die fallenden Tropfen hinweggenommen, so erhält das Goldblättchen eine negative Ladung.

Da bei meinen Versuchen das Fallen der Tropfen nach Eintritt der Isolirung nur zwei Minuten fortgesetzt wurde, so konnte das Wasser nicht vollständig entladen sein. Nehmen wir aber an, dass während dieses Zeitraumes bei den verschiedenen Versuchen gleichviel und gleichgestaltete Tropfen fallen, so wird sich die Ladung des Wassers stets in demselben Verhältnisse verringern, und die nach zwei Minuten beobachteten Ausschläge geben ein Maass für die im Wasser anfänglich vorhandene electriche Spannung.

Mittels solcher Versuche, die in der Abhandlung mitgetheilt sind, ist es auch möglich geworden, den electricen Zustand des mit den eisernen Gasröhren des Hauses verbundenen Kupferdrahtes zu bestimmen. Die electriche Spannung auf demselben ist nahe $-0,11$, wenn die Spannung zwischen Zink und Kupfer $= +1$ gesetzt wird.

Die Versuche mit den fallenden Wassertropfen wurden darauf auch in einer Anordnung wiederholt, welche mit der bei den Gasentbindungen benutzten übereinstimmte. Anstatt einen Metalldraht in das Wasser des Trichters einzutauchen, wurde ein Metallstreifen in einer unter 45° gegen den Horizont geneigten Lage unterhalb des isolirten Trichters mittelst einer isolirenden Vorrichtung so aufgestellt, dass die aus der Spitze des Trichters fallenden Tropfen in der Nähe des oberen Endes des Metallstreifens auftrafen und nach dem Hinabfliessen sich am unteren Rande desselben zu etwas grösseren Tropfen sammelten, welche dann in die unterhalb befindliche Platinschale fielen. Die auf dem Metallstreifen und in der Platinschale beobachteten electricen Spannungen waren dieselben als zuvor, wo die Metalle in das Wasser des Trichters tauchten.

Analoge Spannungen, und auch nahe in gleicher Grösse, traten auf, wenn anstatt eines gewöhnlichen blanken Zinkstückes ein gut amalgamirter Zinkstreifen angewandt wurde. Auch änderten sich dieselben nicht wesentlich, wenn anstatt Wasser verdünnte Schwefelsäure, welche das amalgamirte Zink nicht angreift, in den Trichter gegossen wurde.

III. Electriche Vorgänge bei der Entwicklung des Wasserstoffs aus Zink und Schwefelsäure.

Volta fand in seinen ersten Versuchen, wobei er in einem Gefässe Eisen oder Zink mit Schwefelsäure übergoss, das Gefäss negativ; später (1789) beobachtete er auch, besonders bei Auflösung des Zinkes in verdünnter Schwefelsäure, eine positive Ladung des Gefässes. Eine specielle Untersuchung, unter welchen Umständen die eine oder die andere Polarität erschien, hat er aber nicht unternommen.

Es wäre auch nach seinem Verfahren, bei welchem in einem Gefässe liegende Zinkstücke mit Säure übergossen wurden, völlig unmöglich gewesen, eine Kenntniss der verschiedenen Vorgänge, welche auf die zur Messung gelangende electriche Spannung Einfluss haben, zu gewinnen. Ich habe daher bei meinen Untersuchungen einen anderen Weg eingeschlagen, bei welchem die eben bezeichneten Vorgänge noch erkennbar wurden, indem sie zu verschiedenen Zeiten und unter veränderten Umständen in ungleicher Stärke auftraten.

Wie bei den zuletzt erwähnten Versuchen des vorhergehenden Abschnittes wurde ein Zinkstück in einer unter 45° gegen den Horizont geneigten Lage unterhalb des Trichters, in welchem sich Schwefelsäure von verschiedener Concentration befand, aufgestellt. Die in der Nähe des oberen Endes auftreffenden Säuretropfen flossen über die Zinkfläche hinab, sammelten sich am unteren Rande zu etwas grösseren Tropfen und fielen dann in die unterhalb befindliche Platinschale. Mittelt eines Commutators konnte das Zinkstück oder die Platinschale mit dem Goldblättchen des Electrometers verbunden werden, während andererseits die Platinschale oder resp. das Zinkstück zur Erde abgeleitet war.

In der Regel wurde der electriche Zustand des Zinkstückes und der Platinschale abwechselnd beobachtet. Die in der Abhandlung mitgetheilten Zahlenwerthe geben die electriche Spannung, wie sie jedesmal während eines Zeitraumes von zwei Minuten nach dem Eintritt der Isolirung angesammelt war.

Ich habe nun die Aenderungen in der Stärke und der Art der electricischen Spannungen, welche bei längerer Fortdauer des Tropfens und bei verschiedenen Concentrationsgraden der Schwefelsäure eintreten, genauer bestimmt und in der Abhandlung durch specielle Versuchsreihen belegt. In diesem Berichte beschränke ich mich auf Angabe der hauptsächlichsten Resultate.

Bevor ich jedoch den Verlauf der electricischen Spannungen beschreibe, wird es zweckmässig sein, diejenigen Vorgänge zusammenzustellen, welche auf die Erregung der einen oder der anderen Electricität, sowie auf die Zu- und Abnahme der electricischen Spannungen von Einfluss sind.

a) Berührung der Leiter. Wenn die Säure nur schwach ist und namentlich im Anfange des Tropfens die Zinkfläche nicht angreift, so treten die electricischen Spannungen auf, welche im vorhergehenden Abschnitte beschrieben worden sind.

b) Directer Angriff der Säure. Der durch den directen Angriff der Säure auf dem Zink entwickelte Wasserstoff führt positive Electricität mit sich fort, lässt also das Zink und die Säure in negativem Zustande zurück.

Man kann sich diesen Vorgang in folgender Weise vorstellen: In meinen Maassbestimmungen der electromotorischen Kräfte habe ich gezeigt, dass blankes Zink in Berührung mit Wasser positiv, das Wasser also negativ wird, und nach einem in der vorgelegten Abhandlung beschriebenen Versuche weicht das Verhalten der Schwefelsäure gegen Zink in electromotorischer Beziehung nicht wesentlich von dem des Wassers ab. Auf der Berührungsfläche zwischen Zink und Säure wird also in einer der dort vorhandenen electromotorischen Kraft entsprechenden Menge auf dem Zink positive und auf der anliegenden Säurefläche negative Electricität gebunden sein. Wird nun das Wasser an dieser Berührungsstelle zerlegt, so nimmt der Wasserstoff die positive Electricität des Zinkes auf und entweicht. Das mit dieser positiven Electricität beladene Gas muss beim Aufsteigen eine dünne Flüssigkeitsschicht durchdringen; die Gase geben aber ihre electricischen Ladungen an feste und

flüssige Leiter nur sehr allmählich ab. Es wird also mit dem Gase ein mehr oder weniger grosser Theil der vom Wasserstoff aufgenommenen positiven Electricität entfernt, während ein entsprechendes Quantum der negativen Electricität der Säure frei wird und sich über die Oberfläche des gesammten Leiters verbreitet.

c) Bildung einer galvanischen Kette. — Nach und nach bedecken sich die Stellen des Zinkes, an welchen die Säure angreift, mit einer anfangs graulichen, später schwärzlichen Schicht aus Kohle (und fremden ausgeschiedenen metallischen Beimengungen). In dem aus Zink, Kohle und Schwefelsäure gebildeten Elemente wird nun aber der Wasserstoff nicht am Zink, sondern an der negativen Kohle ausgeschieden, und nimmt, wie ich dies in der Abhandlung an einem aus amalgamirtem Zink, Platin und Schwefelsäure gebildeten Elemente speciell nachgewiesen habe, negative Electricität mit sich fort, lässt also das Zink und den ganzen Leiter in positivem Zustande zurück.

d) Abfall der Säuretropfen vom unteren Rande bei gleichzeitig vorhandenem chemischen Processe. Durch die Gasentwicklung am unteren Rande wird die Berührung zwischen Zink und Säure aufgehoben; in der abgestossenen flüssigen Schicht wird also die negative Electricität frei und beim Abfallen der Tropfen zum Theil mitgenommen. Die am unteren Zinkrande entwickelten Gasblasen, welche positive Electricität angenommen haben, können bei ihrer Lage nur schwierig entweichen und geben einen Theil ihrer Ladung wieder an das Zink zurück. Ist nun das von den Tropfen mitgenommene Quantum negativer Polarität grösser als das von dem Gase fortgeführte Quantum positiver, so erhält das Zink eine positive Ladung.

An denjenigen Stellen des unteren Randes, wo bereits der schwärzliche Beschlag gebildet ist, entwickelt sich der Wasserstoff an diesem und nimmt daher den negativen Zustand an. Die kleinen Wasserstoffbläschen geben dann während ihres Verweilens in den Säuretropfen einen Theil ihrer negativen Ladung an diese ab.

e) Schaumbildung auf der Seitenfläche des Zinkes. — Wenn durch sehr heftigen Angriff der Säure sich auf der Seitenfläche des Zinkes, über welche die Säure hinabfliesst, Schaum anhäuft, so hat die von den entwickelten Gasen aufgenommene positive oder negative Electricität Zeit, in grösserer oder geringerer Menge an die Flüssigkeit überzugehen. Die von dem Gase fortgeführten electrischen Quanta werden also verringert, und dadurch der entgegengesetzt electrische Zustand des Zinkes und der Säure schwächer.

f) Schaumanhang am unteren Rande des Zinkes. Wenn am unteren Rande des Zinkes sich ein Schaumanhang bildet, so fallen die Tropfen daselbst nicht vom Zink, sondern von diesem Schaumanhange ab. Die in ihnen durch die Zersetzung vorhandene negative Electricität hat also Zeit, sich mit der positiven auf dem Zink zum Theil wieder zu vereinigen, und die abfallenden Tropfen nehmen nur eine geringe negative Ladung mit.

g) Verminderung der Leichtflüssigkeit der Säure. Wenn sich, namentlich bei stärkeren Säuren, eine gewisse Menge von schwefelsaurem Zinkoxyd (oder Chlorzink) in der über die Seitenfläche hinfließenden Säure und in den am unteren Rande hängenden Tropfen bildet, so wird die leichte Beweglichkeit der Gasblasen in diesen Flüssigkeiten vermindert; die mit Electricität beladenen Gasblasen werden also beim Durchgang durch dieselben einen grösseren Theil ihrer Ladung abgeben.

Mit Beziehung auf das Vorstehende wird es genügen, die electrischen Zustände sowohl der in der Platinschale angesammelten Säuretropfen als auch des Zinkes kurz anzugeben.

1. Electricisches Verhalten der in die Platinschale fallenden Tropfen. — Da bei der Beobachtung der von den Tropfen fortgeführten Electricität das Zink stets mit der Erde in leitender Verbindung stand, so konnte der electrische Zustand derselben nur durch die Ableitung zur Erde und dem am unteren Rande vorgehenden chemi-

schen Process bedingt sein. Solange die Säure das Zink an dem unteren Rande nicht angreift, nehmen die Tropfen die aus der Ableitung stammende schwache positive Electricität mit sich. Tritt dann, bei schwächerer Säure in längerer, bei stärkerer in kürzerer Zeit der Angriff am unteren Rande ein, so geht die positive Ladung der Tropfen in eine negative über. Wird durch Amalgamirung des unteren Theiles des Zinkes oder durch eine daselbst angelöthete Platinplatte die Entstehung einer Gasentwicklung an der Abfallstelle der Tropfen verhindert, so entspricht die Ladung der Tropfen nur der durch die Ableitung zur Erde gesetzten Spannung. Bildet sich an einem gewöhnlichen Zinkstücke bei stärkeren Säuren am unteren Ende ein Schaumanhang, so nimmt die Stärke der negativen Ladung der in die Schale fallenden Tropfen ab.

2. Electricisches Verhalten des Zinkes. Ist das isolirte Zinkstück mit dem Goldblättchen des Electrometers verbunden, so zeigt das letztere, solange kein Angriff der Säure statt hat, in Folge des Abfallens der positiv geladenen Tropfen schwache negative Spannung an; dieselbe wird verstärkt, sobald der Angriff der Säure beginnt, und erreicht je nach der Stärke der Säure in längerer oder kürzerer Zeit ein Maximum. Dem Anwachsen der negativen Spannung auf dem Zink treten nämlich zwei andere Vorgänge entgegen, welche dem Zink positive Electricität ertheilen: das Entstehen eines galvanischen Elementes durch die Bildung der schwärzlichen Schicht und der unter chemischem Prozesse stattfindende Abfall der Tropfen vom unteren Rande. Durch das Anwachsen der beiden genannten Vorgänge nimmt nach und nach die negative Spannung auf dem Zink ab und geht bei mässig starken Säuren zuletzt in eine positive über. Ist die Säure stark, so wird durch den heftigen Angriff an einzelnen Stellen der schwärzliche Ueberzug abgestossen, und der positive Zustand des Zinkes kann zeitweilig wieder in den negativen zurückgehen.

Wird ein blankgefeiltes Zinkstück in ein Uhrglas, das auf dem Boden der Platinschale ruht, gelegt und mit Schwe-

felsäure übergossen, so beobachtet man an der Platinschale zuerst eine schwache positive Spannung, weil die Blasen, welche aus der zufolge der Ableitung negativen Flüssigkeit aufsteigen, negative Electricität mitnehmen. Die von den am Zink entwickelten Gasblasen aufgenommene positive Electricität wird meistens, weil die Blasen längere Zeit am Zink haften, an die Umgebung wieder abgegeben; nur unter günstigen Umständen, bei lebhaftem Angriffe, wird die Schale negativ erscheinen können. Ist dann später durch das Auftreten der schwärzlichen Schicht ein galvanisches Element gebildet, so nimmt der entweichende Wasserstoff negative Electricität mit fort, und die Schale erscheint stärker positiv. Sehr begünstigt wird die positive Ladung der Platinschale, wenn das Zinkstück unmittelbar auf den Boden der Platinschale gelegt, und somit ein neues galvanisches Element hergestellt wird.

Werden zahlreiche kleine Zinkstücke mit verdünnter Schwefelsäure übergossen, so hängt die zuerst auftretende electricische Ladung der Schale von der Concentration der Säure, von der Beschaffenheit der Oberfläche der Zinkstücke und von dem Material der Schale (Porcellan und Glas oder Platin) ab. Sind im Anfange die Umstände einem heftigeren Angriff der Säure günstig, und wird durch die grösseren sich bildenden Gasblasen die Flüssigkeit verdrängt und dadurch eine starke Absorption der in dem Gase in diesem Zeitpunkte vorhandenen positiven Electricität verhindert, so tritt in der Schale negative Spannung auf. Diese negative Spannung hält jedoch nicht lange an, sondern geht in eine positive über. Sehr oft vermag aber im Anfange die negative Spannung nicht aufzutreten; infolge des Ueberwiegens der Zersetzung durch das gebildete galvanische Element erscheint die Schale gleich anfangs positiv.

IV. Electricische Vorgänge bei der Entwicklung des Wasserstoffgases aus Zink und Salzsäure.

Fällt Salzsäure in Tropfen auf ein geneigt gestelltes Zinkstück, so gleichen die Vorgänge den zuvor bei Anwendung der Schwefelsäure beschriebenen; nur tritt der Ueber-

gang der negativen Spannung auf dem Zink in die positive etwas später ein.

Wird ein blank geschabtes Zinkstück in ein Uhrglas, das auf dem Boden der Platinschale ruht, gelegt und mit Salzsäure (specifisches Gewicht 1,14), welche mit dem zwei- oder mehrfachen Volumen Wasser verdünnt ist, übergossen, so zeigt die Platinschale positive Ladung. Wird aber die Säure nur mit dem gleichen Volumen Wasser gemischt oder ohne Wasserzusatz angewandt, so ist der Angriff der Säure so heftig, dass die fremden Schichten von der Oberfläche des Zinkes abgestossen werden, und der Wasserstoff die vom Zink aufgenommene positive Electricität fortführt. Die Platinschale erscheint also negativ. Erst wenn der heftige Angriff nachlässt, wird die Schale, weil nun der Wasserstoff die negative Electricität mit sich nimmt, ebenso wie bei der schwächeren Säure positiv.

Werden zahlreiche kleine Zinkstücke mit verdünnter Salzsäure übergossen, so wird das Gefäss positiv und behält bei schwächeren Säuren diesen Zustand. Bei stärkerer Säure tritt wohl auch zuerst eine schwache positive Spannung am Gefässe auf; dieselbe geht aber, sobald der Angriff heftig genug wird, um die Flüssigkeit durch Blasenbildung vom Zink abzustossen, in die negative über, die je nach den vorliegenden Verhältnissen stark anwächst, nach mehreren Minuten wieder abnimmt und sich dann in eine positive verwandelt. Ist gleich anfangs der Angriff sehr heftig, so fällt die erste schwache positive Periode fort, das Gefäss erscheint sofort nach dem Uebergiessen der Zinkstücke negativ.

V. Electriche Vorgänge bei der Entwicklung von Gasen aus Zink und Salpetersäure.

Obwohl bei dem Angriff der Salpetersäure auf Zink anstatt des Wasserstoffes vorzugsweise oder ausschliesslich Stickoxydgas entwickelt wird, so treten doch ganz analoge electriche Vorgänge ein, wie die zuvor unter Anwendung von Schwefelsäure oder Salzsäure beschriebenen.

Wird ein Stück Zink mit starker Salpetersäure in einer

Schale übergossen, so erscheint zuerst die Schale negativ, aber schon nach $\frac{1}{2}$ Minute geht die negative Spannung in die positive über. Beim Uebergiessen mit einer verdünnteren Säure zeigt die Schale gleich am Anfang positive Spannung.

VI. Electriche Vorgänge bei der Entwicklung des Wasserstoffes durch Einwirkung von Säuren auf Eisen.

Lässt man Schwefel- oder Salzsäure, selbst in ziemlich starker Concentration, über ein geneigt gestelltes Eisenstück fließen, so wird das Metall nur wenig angegriffen, und es treten daher auch nur geringe electriche Spannungen auf.

Wird kalte, mit dem drei- bis vierfachen Volumen Wasser verdünnte Schwefelsäure auf kleinere Mengen Eisenfeilicht gegossen, so findet nur eine schwache Einwirkung statt, und das Gefäss erhält nur eine geringe positive Spannung. Ist die Schwefelsäure erhitzt, was einen stärkeren Angriff bedingt, so tritt zuerst einige Secunden hindurch negative Ladung des Gefässes ein, die rasch in eine positive übergeht.

In gleicher Weise zeigt das Gefäss zuerst negative Electricität, wenn man, wie Volta, auf das Eisenfeilicht etwas Wasser giesst und dann die concentrirte Schwefelsäure hinzufügt.

Wird Eisenfeilicht mit Salzsäure übergossen, so zeigt das Gefäss sich zuerst positiv; diese positive Spannung nimmt ab und verwandelt sich nach einigen Minuten in eine negative, die nach einigen Minuten wieder in eine positive übergeht.

VII. Electriche Vorgänge bei der Entwicklung der Kohlensäure aus Kreide und Marmor.

1. Kreide. — Es wurde ein längeres, passend geformtes, durch eine isolirte Messingklammer gehaltenes Kreidestück, ähnlich wie zuvor die Metallstücke, unterhalb der Spitze des trichterförmigen Gefässes aufgestellt, und in dieses Gefäss Salzsäure von verschiedener Concentration gegossen. Auf der Stelle, auf welche die Tropfen fielen, stand das Ende eines Platindrahtes, welcher mit dem Goldblättchen des Elec-

trometers oder mit der Erde verbunden werden konnte. Die am unteren Ende des Kreidestückes abfallenden Tropfen sammelten sich in der Platinschale.

Wenn selbst nur eine sehr verdünnte Salzsäure auf die Kreide tropft, zeigt das Electrometer eine erhebliche negative Ladung der Kreide und der über sie hinfließenden Säure an; mit der Concentration der Säure wächst diese Ladung. Die in die Platinschale fallenden Tropfen (wobei der Platindraht zur Erde abgeleitet ist) ertheilen dieser ebenfalls negative Electricität, die mit der Concentration der Säure zunimmt, jedoch geschwächt wird, wenn am unteren Ende des Kreidestückes ein Schaumanhang sich bildet.

Wird ein in der Platinschale liegendes Kreidestück mit verdünnter Salzsäure übergossen, so wird die Schale negativ. Die negative Spannung steigt mit der Concentration der Säure, nimmt aber bei starken Säuren infolge der Schaumbildung wieder ab.

2. Marmor. — Wird an Stelle der Kreide ein Stück weissen Marmors aufgestellt, so erhält beim Auftropfen von schwacher Salzsäure der Marmor und die über ihn hinfließende Säure negative Spannung; ebenso sind aber auch die von dem Marmor abfallenden Tropfen negativ.

Die negative Electrisirung des Marmors und der auf ihm befindlichen Säure verdankt ihr Entstehen, gerade wie bei den entsprechenden Versuchen mit der Kreide und dem Zink, der auf der Oberfläche des Marmors eintretenden Zersetzung; die sich entwickelnde Kohlensäure nimmt positive Electricität an, und die Säure negative, welche sich über die benetzte Fläche des Marmors und den zum Electrometer führenden Platindraht verbreitet. Da bei Beobachtung des electrischen Zustandes der Platinschale die Säureschicht auf dem Marmor zur Erde abgeleitet ist, so muss die erhebliche negative Ladung der fallenden Tropfen, abgesehen von dem geringen Einfluss der Ableitung des Platindrahtes, durch den am unteren Ende und in dessen Nähe vorgehenden Process erzeugt werden.

Wird eine stärkere Salzsäure angewandt, so geht die

negative Spannung des Marmors je nach der Concentration der Säure mehr oder weniger schnell in eine positive über, wobei die fallenden Tropfen eine starke negative Ladung behalten. Diese Umkehrung in der Polarität des Marmors wird durch die Gasentwicklung am unteren Rande desselben bewirkt. Die daselbst mit positiver Electricität beladenen Gasblasen geben, weil sie namentlich bei der Dicke des Stückes nicht sofort frei entweichen können, ebenso wie beim Zink, einen Theil ihrer positiven Ladung an den Marmor und die ihn bedeckende Säure zurück, sodass dieselben positiv erscheinen.

Dass in der That in der am unteren Rande vorgehenden Gasentwicklung die Ursache für das Auftreten der positiven Spannung des Marmors liegt, lässt sich beweisen, wenn man diese Entwicklung beseitigt, was z. B. durch Ankitten eines Platinbleches auf den unteren Theil der Seitenfläche des Marmors, über welche die Säure hinabfließt, geschieht. Der Marmor zeigt dann stets starke negative Spannung.

Wird ein in der Platinschale liegendes Marmorstück mit verdünnter Salzsäure übergossen, so erhält die Schale zuerst eine negative Ladung. Dieselbe ist um so stärker, je concentrirter die Säure ist, wird jedoch bei sehr starker Säure infolge der Schaumbildung wieder schwächer. Diese anfänglich negative Spannung nimmt beim Nachlassen der heftigen Auflösung ab und geht nach einigen Minuten in eine schwache positive über, die nur wenig grösser ist, als die durch die vorhergegangene Ableitung zur Erde gesetzte Spannung sie geben würde, wenn die aus der Säure aufsteigenden Blasen die an der Oberfläche der Säure befindliche negative Electricität mitnehmen. Indess ist sie immer etwas grösser, und dieser etwas höhere Werth wird durch das in der Säure gebildete Chlorcalcium bedingt.

VIII. Electricität bei Gasentwickelungen, wenn Marmor, Kreide oder Zink mit Salzsäure, welcher Chlorcalcium, Glycerin oder Zucker zugesetzt worden, übergossen wird.

Wenn ein Marmorstück in der Platinschale mit Salzsäure übergossen wird, so tritt zuerst eine negative Ladung

der Schale auf, welche später in eine positive übergeht. Wird der Salzsäure anstatt Wasser eine Chlorcalciumlösung oder Glycerin in einer gewissen Menge zugesetzt, so erscheint die erste negative Periode nicht mehr, die Schale wird gleich anfangs positiv, und zwar erreicht diese positive Spannung einen höheren Werth, als bei der mit Wasser verdünnten Säure.

Wird ein Kreidestück mit verdünnter Salzsäure übergossen, so zeigt die Schale sich stets negativ geladen. Bei Zusatz von Chlorcalcium, Glycerin oder Zuckerlösung erscheint diese negative Spannung viel schwächer und wird auch wohl ganz aufgehoben.

Ebenso tritt beim Zink, wenn es mit starker Salzsäure unter Zusatz von Glycerin übergossen wird, die bei reiner Salzsäure anfangs erscheinende negative Ladung nicht auf.

Da Chlorcalcium-, Zuckerlösung und Glycerin in gleicher Weise die Entstehung der positiven Spannung der Platinschale bewirken, so scheint ihre Einwirkung nur auf einer Verminderung der Leichtbeweglichkeit der Flüssigkeitstheilen zu beruhen. Die an ihrem Aufsteigen gehinderten Gasblasen geben zum Theil die ihnen bei ihrer Entstehung zugetheilte positive Electricität wieder an die Flüssigkeit ab und nehmen aus dieser negative mit fort; beim Vorwalten des letzteren Vorganges muss die Schale dann positiv erscheinen.

V. *Ueber Normalelemente für electrometrische Messungen; von W. von Beetz.*

(Aus den Sitzungsber. der math.-phys. Classe der k. bayer. Acad. d. Wiss. vom März 1884; mitgetheilt vom Hrn. Verf.).

Um eine Potentialdifferenz nach absolutem Maasse zu messen, bedarf man eines Normalelementes, dessen electromotorische Kraft genau definirt ist, und das entweder ein für alle mal zusammengestellt bleibt oder in immer gleicher

und nicht zu umständlicher Weise zusammengestellt werden kann. Nach den Untersuchungen von Kittler¹⁾ entsprechen diesen Bedingungen die mit einem Diaphragma versehenen Daniellelemente durchaus nicht, da sich deren electromotorische Kraft fort und fort ändert. Dagegen ist ein aus chemisch reinem Zink und reinem Kupfer, aus verdünnter Schwefelsäure und Kupfervitriollösung von bestimmter Concentration und einem beide Lösungen verbindenden, mit derselben Schwefelsäure gefüllten und in feinen Oeffnungen endigenden Heberrohre zusammengesetztes Element stets von gleicher electromotorischer Kraft und eignet sich, da es leicht zusammengestellt werden kann, als Normalelement. Bei Anwendung concentrirter Kupfervitriollösung und einer verdünnten Schwefelsäure vom spec. Gew. 1,075 fand Kittler die electromotorische Kraft eines solchen Elementes = 1,195 Volt, während dieselbe auf 1,059 Volt hinabsank, wenn die verdünnte Schwefelsäure durch concentrirte Zinkvitriollösung ersetzt wurde.

Von den bisher für Messungen von Potentialdifferenzen angewandten Daniellelementen entspricht den hier gestellten Bedingungen am meisten das von Raoult²⁾, weniger das von Lodge³⁾, welches eine verdünnte Zinkvitriollösung enthält, und noch weniger geeignet für Normalelemente sind solche Combinationen, welche ein Diaphragma enthalten, wie das von Buff⁴⁾ vorgeschlagene Element. Alle aber behalten nicht auf die Dauer eine constante electromotorischer Kraft, wie sie gegenwärtig für die Zwecke electrometrischer Messungen verlangt wird, da bei allen eine allmähliche Diffusion der Flüssigkeiten eintritt. Ich selbst⁵⁾ habe mich früher für Messungen, welche nach der Compensationsmethode ausgeführt wurden, ähnlich eingerichteter Normalelemente bedient; für electrometrische Messungen reichten sie aber nicht aus,

1) Kittler, Sitzungsber. d. k. bayer. Acad. d. Wiss. p. 467. 1882. Wied. Ann. 17. p. 865. 1882.

2) Raoult, Ann. de chim. et de phys. (4) 2. p. 345. 1864.

3) Lodge, Phil. Mag. (5) 5. p. 1. 1878.

4) Buff, Lieb. Ann. 85. p. 4. 1853.

5) v. Beetz, Wied. Ann. 4. p. 5. 1878.

und ich habe mich deshalb dazu bequemen müssen, die Normalelemente immer wieder neu zusammenzustellen. Für die Zeit, während welcher man ununterbrochen am Electrometer zu beobachten pflegt, kann man sich dann auf die Constanz des Elementes verlassen.

Immerhin ist das häufige Zusammensetzen und Auseinandernehmen des Elementes eine Arbeit, welche man gern vermeiden möchte. Deshalb wurde das dauernd beisammen bleibende Zinkquecksilberelement von Latimer Clark¹⁾ mit Freuden begrüßt. Seine electromotorische Kraft (1,457 Volt) wurde bei verschiedenen nach der gegebenen Vorschrift ausgeführten Herstellungen des Elementes nahezu gleich gefunden, aber es hat zwei nicht angenehme Eigenschaften: die eine ist die grosse Veränderlichkeit seiner electromotorischen Kraft mit der Temperatur, welche man freilich leicht in Rechnung ziehen kann, welche aber beim Daniellelement gar nicht vorhanden ist²⁾, die andere ist die starke Abnahme, welche die electromotorische Kraft erfährt, wenn das Element auch nur auf sehr kurze Zeit geschlossen worden ist. Dieser Fall kann aber gar leicht eintreten. Ein falscher Griff an den bei den Messungen angewandten Hilfsapparaten, z. B. an dem von mir³⁾ beschriebenen Schlüssel, genügt, um das Element für einen oder mehrere Tage unbrauchbar zu machen. An einem Latimer-Clark-Elemente erhielt ich 2 Proc. Verlust an electromotorischer Kraft, als das Element nur eine halbe Minute lang geschlossen worden war; ein Daniellelement würde sich unter gleichen Umständen nur sehr wenig verändert haben.

Aber auch das Latimer-Clark-Element kann man von dieser üblen Eigenschaft fast gänzlich befreien, wenn man ihm einen so grossen Widerstand gibt, dass nur eine unbedeutende Stromstärke in ihm zu Stande kommen kann. Ich füllte ein zweischenkeliges Rohr von 1 cm Durchmesser und 75 cm Schenkellänge mit dem aus Quecksilbersulphat

1) Latimer Clark, Proc. of the Roy. Soc. of London. 20. p. 444. 1878; Beibl. 2. p. 565. 1878.

2) Kittler, l. c. p. 371.

3) v. Beetz, Wied. Ann. 10. p. 371. 1880.

und Zinkvitriollösung nach Vorschrift bereiteten Brei, kochte denselben aber so stark ein, dass er nach dem Erkalten steinhart wurde. Das Auskochen des Breies im Rohre geschah mit Hilfe einer Wasserluftpumpe. Dann wurde am einen oberen Ende des Rohres der Zink-, am anderen der Quecksilberpol angebracht, und wurden die Oeffnungen mit Paraffin geschlossen. Das Element ist sehr bequem am Experimentirtisch anzubringen, indem man die beiden Pole durch zwei in die Tischplatte gebohrte Löcher schiebt und den ganzen Körper des Rohres unter dem Tische geschützt stehen lässt. Der innere Widerstand des Elementes wurde = 15700 Ohm gefunden.¹⁾ Seine electromotorische Kraft war etwas kleiner, als sie Latimer Clark angibt. Wenn nämlich die Kraft eines Normaldaniells (mit verdünnter Schwefelsäure) als 1,195 Volt zu Grunde gelegt wurde, so war die meines Quecksilberelementes 1,442 (statt 1,457) Volt. Als nun das Element in sich geschlossen wurde, war seine electromotorische Kraft nach einer Schliessungsdauer von:

5 Minuten	= 1,440 Volt.
1 Stunde	= 1,439 „
4 Stunden	= 1,439 „
6 „	= 1,437 „
12 „	= 1,434 „
48 „	= 1,408 „ .

In der That widerstand also das Element lange Zeit dem Einflusse der Polarisation. Derselbe konnte auch nur sehr gering sein, denn der Strom, welcher das Element durchlief, hat nur eine Stärke von 0,000 091 Ampère. Erst nachdem der Schluss 48 Stunden lang gedauert hatte, war die electromotorische Kraft um 2 Proc. gesunken, freilich um eine Grösse, welche sehr gering ist gegen die Schwächung der sonst gebräuchlichen Latimer-Clark-Elemente. Man wird wohl einen so lange dauernden Schluss leicht vermeiden

1) Die Widerstandsmessungen wurden von meinem ersten Assistenten, Hrn. Dr. Pfeiffer, unter Anwendung von Wechselströmen ausgeführt.

können; ist die Schwächung einmal eingetreten, so erholt sich das Element nur langsam wieder. Nach 24 Stunden fand ich seine Kraft = 1,430 Volt.

Der Gedanke, die Leitungsflüssigkeit des Elementes durch einen festen Körper zu ersetzen, lässt sich aber auch am Daniellelemente verwirklichen. Ich rührte feinen Alabastergyps einmal mit concentrirter Kupfervitriollösung, das andere mal mit concentrirter Zinkvitriollösung zu der Consistenz an, welche zum Herstellen von Gypsabgüssen angewandt wird. Eine U-förmig gebogene Glasröhre von 4 mm Durchmesser und 22 cm Schenkellänge wurde zum Theil mit dem einen Brei und, nachdem derselbe erstarrt war, zum anderen Theil mit dem anderen Brei angefüllt, sodass der eine Guss den anderen unmittelbar berührt. In den Kupferbrei wurde vor dem Erstarren ein Kupferdraht, in den Zinkbrei ein Zinkdraht gesteckt. Der obere Theil jedes Schenkels wurde vom Gypsguss befreit und mit Paraffin angefüllt.

Von so hergerichteten trockenen Daniellelementen wurden mehrere Exemplare mit einem mit concentrirten Lösungen von Kupfer- und Zinkvitriol zusammengesetzten Daniellelemente verglichen, auf die Einwirkung von Temperaturveränderungen und auf die des Stromschlusses geprüft. Wenn die electromotorische Kraft des mit Flüssigkeiten gebildeten Elementes gleich Eins gesetzt wird, so ergab sich die von drei verschiedenen trockenen Elementen (I, II und III) an verschiedenen Tagen gemessen:

I	II	III
0,996	0,993	1,000
0,998	0,996	0,996
1,000	0,999	0,993
—	0,998	0,998
im Mittel: 0,998	0,996	0,997

Die Temperatur schwankte bei allen diesen Beobachtungen nur um wenige Grade; die geringen, scheinbaren Unterschiede in der electromotorischen Kraft der trockenen Elemente sind auch wohl zum Theil in kleineren Abweichungen in der Kraft der Flüssigkeitselemente zu suchen, welche jedesmal frisch zusammengesetzt waren. Durchschnitt-

lich ist aber das trockene Element um ein geringes schwächer, als das Flüssigkeitselement; es enthält kein amalgamirtes Zink, weil solche amalgamirte Drähte sehr brüchig sind.

Eine zweite Versuchsreihe bezog sich auf den Einfluss der Temperatur. Die Elemente II und III wurden bald bei der Temperatur der umgebenden Luft, bald in verschiedenen erwärmten Bädern stehend, mit dem Flüssigkeitselemente, das stets nahezu auf der Temperatur 20° blieb, verglichen. Mit Rücksicht auf die schlechte Wärmeleitungsfähigkeit der trockenen Elemente blieben dieselben jedesmal $\frac{3}{4}$ Stunden lang im Bade stehen, ehe die Messung vorgenommen wurde. Wird die electromotorische Kraft des Flüssigkeitselementes wieder gleich Eins gesetzt, so war die der trockenen Elemente:

II		III	
bei 0°	0,996	bei 1°	1,007
„ 20	0,993	„ 21	1,000
„ 39	0,983	„ 32	0,995
		„ 55	0,981

Die Abnahme an electromotorischer Kraft eines jeden der beiden Elemente betrug demnach bei den niederen Temperaturen zwischen 0 und 20° , beziehungsweise zwischen 1 und 21° nur $0,015\%$ für einen Grad Temperaturzunahme. Dieser Temperaturcoefficient steigt aber mit zunehmender Temperatur. Beim Elemente II beträgt er zwischen 20 und 39° $0,053$, beim Elemente III zwischen 21 und 32° $0,045$, zwischen 32 und 55° sogar $0,061$. Beim Latimer-Clark-Element wurde er von v. Helmholtz und von Kittler¹⁾ übereinstimmend $= 0,08$ gefunden. Innerhalb der engen Temperaturgrenzen, zwischen denen electrometrische Messungen angestellt zu werden pflegen, ist der Einfluss der Temperatur auf die electromotorische Kraft der trockenen Daniellelemente ganz zu vernachlässigen.

Die Einwirkung des Stromschlusses ergibt sich aus folgenden, mit den Elementen I, II und III angestellten Versuchen. Das Element wurde in sich auf eine nachstehend angegebene Zeit geschlossen, dann geöffnet und die Potential-

1) Kittler, Sitzungsber. L. c. p. 501.

differenz gemessen. Dadurch erhält man freilich nicht den tiefsten Werth, welchen die Potentialdifferenz erreicht hatte, weil dieselbe schon während der wenigen Secunden, welche die Messung beansprucht, wieder zunimmt; aber man erhält denjenigen Werth, um den es sich bei den Messungen eben handelt.

Die Elemente I und III wurden durch einen Schluss von der Dauer einer halben Minute fast gar nicht beeinflusst; das Element II sank dadurch von 1,000 auf 0,997, erholte sich aber auch schnell wieder vollkommen. Längere Schlüsse brachten folgende Veränderungen hervor:

I		II	
	0,998		1,000
nach 10 Minuten	0,991	nach 1 Stunde	0,994
„ 35 „	0,988	„ 15 Stunden	0,988
„ 14 $\frac{1}{2}$ Stunden	0,975	„ 20 „	0,988
	0,996		0,993
„ 15 Stunden	0,986	nach 15 $\frac{1}{2}$ Stunden	0,987
5 Minuten offen	0,994	„ 24 „	0,986
		„ 39 „	0,987
		5 Minuten offen	0,994

III	
	1,000
nach 15 Minuten	0,996
„ 50 „	0,994
„ 17 Stunden	0,989
5 Minuten offen	0,992

Nach Verlauf einer Viertelstunde hatte in allen Fällen das geöffnete Element seine alte electromotorische Kraft wieder erreicht.

Die trockenen Daniellelemente haben also mit dem Latimer-Clark-Elemente das gemein, dass sie ein für alle mal zusammengestellt sind, sie haben aber den Vorzug vor demselben, dass sie dem Einfluss der Temperatur so gut wie gar nicht unterliegen, und dass ein zufälliger Stromschluss auch bei Elementen von kleinen Dimensionen nur eine unbedeutende Schwächung hervorbringt (ungefähr 1%), welche aber sehr bald wieder ausgeglichen wird. Wenn die electromotorische Kraft des aus Kupfer, Zink, concentrirter Kupfer-

und Zinkvitriollösung zusammengesetzten Daniellelementes = 1,059 Volt gesetzt wird, so ist die mittlere electromotorische Kraft eines trockenen Daniellelementes = 1,056. Dabei darf indess nicht vergessen werden, dass der Werth 1,059 durch die Voraussetzung begründet worden ist, dass die Kraft eines Latimer-Clark-Elementes = 1,457 Volt ist, welche Angabe auch nur eine vorläufige war.

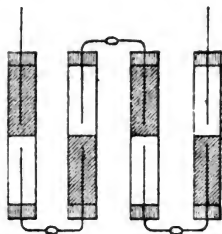
Der Widerstand des Elementes II wurde = 14600 Ohm, der des Elementes III = 13500 Ohm gefunden. Die Stärke des Stromes, welcher ein geschlossenes Element durchläuft, ist demnach beim Elemente II = 0,000 072, bei III = 0,000 078 Ampère, d. h. im ersten werden in der Stunde 0,08, im letzteren 0,09 mg Kupfer niedergeschlagen.

Die trockenen Daniellelemente empfehlen sich noch für eine andere Anwendung: zum Laden des Quadrantenelectrometers. Die Zamboni'sche Säule hat sich für diesen Zweck nicht bewährt: eine Zeit lang functionirt sie vortrefflich; dann ändert sich plötzlich, namentlich bei jähen Temperaturveränderungen, die Potentialdifferenz ihrer Pole. Wahrscheinlich bilden sich durch Feuchtigkeitsniederschläge auf der Innenwand des Glasrohres, welches die Säule enthält, Nebenschliessungen. Bei der Wasserbatterie kommen so plötzliche Veränderungen nicht vor, aber allmählich, wenn auch sehr langsam, nimmt die Potentialdifferenz ihrer Pole ab. Fehler in den Messungen können dadurch nicht entstehen, die Ausschläge des Electrometers werden aber nach und nach kleiner, und abgesehen davon, dass man das verdunstete Wasser hin und wieder ergänzen muss, muss auch die ganze Batterie zuweilen auseinander genommen und von Oxyd- und Carbonatniederschlägen gereinigt werden. Ich fand die electromotorische Kraft eines frischen, mit Brunnenwasser geladenen Zinkkupferelementes = 0,992 Volt, nach zwölf Stunden, während deren das Element geöffnet blieb, war dieselbe auf 0,934 Volt gesunken. Von den Elementen, welche meine Wasserbatterie bilden, und die nun schon über ein Jahr beisammen stehen, wurden drei untersucht. Sie zeigten die Potentialdifferenzen:

0,838 0,678 0,724 Volt,
also im Mittel: 0,743 Volt.

Die trockenen Daniellelemente können bequem zu einer Batterie zusammengestellt werden, welche keiner Auffüllung bedarf, und auf welche Temperatur und Feuchtigkeit ohne Einfluss sind.

Da der Widerstand der Elemente hier gleichgültig ist, so können dieselben sehr klein gemacht werden. Ich habe Glasröhren von 8 cm Länge und 5 mm Durchmesser zur Hälfte mit dem mit Kupfervitriollösung, zur anderen mit dem mit Zinkvitriollösung angerührten Gypse gefüllt und in die betreffenden Mischungen jedesmal einen Kupfer- und



einen Zinkdraht gesteckt, welche aneinander gelöthet waren, wie aus nebenstehender Figur ersichtlich ist. Die Röhrenenden sind wieder durch Paraffin geschlossen. Je zwölf solche Elemente bilden eine Reihe, zwölf solche Reihen stehen hintereinander, eine jede mit der vorhergehenden durch eine isolirt aufgestellte Klemmschraube verbunden,

sodass jede Kette von zwölf Elementen zwischen zwei Klemmschrauben aufgehängt ist. Man kann dann eine beliebige Anzahl solcher Zwölferreihen zur Ladung benutzen. Die ganze Batterie von 144 Elementen weist eine polare Potentialdifferenz von 152 Volt auf, wozu von den frischen Elementen der Wasserbatterie 156, von den geschwächten 200 erforderlich wären. Die ganze trockene Batterie bedeckt eine quadratische Bodenfläche von 16 cm Seite.

Zusatz. In später angefertigten Elementen sind die Zinkdrähte an der Spitze amalgamirt, übrigens mit Schellack überzogen. Die concentrirten Lösungen haben einen Zusatz von $\frac{1}{3}$ Wasser erhalten.

VI. Ueber den Polabstand, den Inductions- und Temperaturcoëfficient eines Magnetes und über die Bestimmung von Trägheitsmomenten durch Biflarsuspension; von F. Kohlrausch.

(Aus den Gött. Nachr. vom 1. Dec. 1883; mitgetheilt vom Hrn. Verf.).

Insofern ein Magnet den Gegenstand oder das Hilfsmittel einer Messung bildet, kommen vorzugsweise folgende Eigenschaften desselben in Betracht. Ausser dem magnetischen Moment selbst spielen die Veränderlichkeit desselben mit der Temperatur und mit der Lage im magnetischen Felde — „Temperatur- und Inductionscoëfficient“ — eine wichtige Rolle, es ist die Vertheilung des Magnetismus im Stabe und als erste Näherung zu der Kenntniss desselben der „Polabstand“ von Bedeutung; die ponderable Masse kommt bei der gewöhnlichen bisherigen Beobachtungsweise hauptsächlich mit ihrem Trägheitsmomente in Betracht.

Von einigen über die genannten vier Grössen gemachten Beobachtungen und Erfahrungen erlaube ich mir das Wesentliche hier mitzutheilen.

Der mit Hrn. W. Hallock gemeinsam unternommene erste Theil der Arbeit wird demnächst in ausführlicher Mittheilung erscheinen.

I. Ueber den Polabstand der Magnete. Von W. Hallock und F. Kohlrausch.

Die meisten stabmagnetischen, erdmagnetischen, galvanischen Messungen lassen sich bekanntlich, soweit die Vertheilungsweise des Magnetismus in einem Stabe in Frage kommt, so einrichten, dass die Kenntniss dieser Vertheilung für gewöhnliche Zwecke nicht weiter zu gehen braucht als bis zu der Lage der „Pole“. Darunter werden hier diejenigen Punkte verstanden, in denen man bei Fernwirkungen den freien Magnetismus annehmen kann, sobald die vierten Potenzen des Verhältnisses der Magnetlänge zu der Entfernung von dem Magnet gegen Eins verschwinden.¹⁾ Gewöhnliche gestreckte Stäbe besitzen solche Pole.

1) Vgl. Riecke, Gött. Nachr. 1872. p. 251; Pogg. Ann. 149. p. 62. 1873; Wied. Ann. 8. p. 299. 1879.

In der Regel tritt nun der Abstand dieser Pole von einander in Correctionsgliedern der Rechnung auf, welche hinreichend genau gegeben sind, wenn man den Polabstand auf einige Procente genau kennt. Die Frage, ob und wie weit diese Kenntniss durch die Gestalt des Magnetes gegeben ist, spielt für electriche und magnetische Messungen eine bedeutende Rolle, denn sie bedingt deren Einfachheit und unter Umständen sogar die Genauigkeit.

Durch Versuche mit der Tangentenbussole hatte der eine von uns schon vor längerer Zeit im physikalischen Institut zu Göttingen Polabstände zu messen gesucht¹⁾ und im Anschluss daran Hrn. Schneebeli veranlasst, nach derselben und nach der Ablenkungsmethode einige Stäbe oder Nadeln der Beobachtung zu unterwerfen. Die Ergebnisse dieser Versuche zeigten eine auffallende Uebereinstimmung verschiedener Magnete untereinander, doch war die Versuchszahl nicht gross genug, dass ein Zufall ausgeschlossen war.

Deswegen haben wir eine grössere Versuchsreihe dieser Art ausgeführt, deren Resultate hier vorläufig mitgetheilt werden sollen.

Wir gebrauchten dabei:

1. Die Ablenkung einer ganz kurzen Nadel durch den zu untersuchenden Magnet in gewöhnlicher Weise.

2. Die gleichzeitige Einwirkung des Magnets auf zwei Magnetometer, zwischen denen der Stab aufgestellt war, aus zwei verschiedenen Lagen. Dieses Verfahren gewährt eine grosse Genauigkeit, da die Temperaturänderungen des Stabes ohne Einfluss sind, und da die erdmagnetischen Schwankungen in Intensität vollständig und in Declination wenigstens theilweise herausfallen.

3. Die gleichzeitige Einwirkung von Strömen in concentrischen Kreisen von verschiedenem Halbmesser auf die zu untersuchende Magnetnadel. Verhält sich hier der Durchmesser der Windungen umgekehrt wie ihre jeweilige Anzahl, so lässt sich dieses Verfahren in einer Form ausführen,

1) Schneebeli, Progr. d. Eidgen. Polytechnik. in Zürich 1871/72. p. 15 d. Sept. Abdr.

welche die vorgenannte an Einfachheit und an Genauigkeit sogar noch übertrifft und von äusseren Störungen ganz unabhängig ist.

Der Factor, mit welchem die äussere Länge des Magnets zu multipliciren ist, um den Polabstand zu erhalten, also das Verhältniss der idealen oder reducirten zur wirklichen Länge, möge kurz der Polabstandsmodul heissen und im Folgenden mit k bezeichnet werden.

Zur Untersuchung kamen 14 Magnete, theilweise in verschiedenem Härtezustande. Wo nichts weiter bemerkt ist, sind dies nach der Axenrichtung magnetisirte Cylinder.

1. Sechs kürzlich hergestellte kleine glasharte Rundstäbe von 5,0 cm Länge, 0,40 cm Dicke und 5 g Gewicht, theilweise gesättigt, theilweise absichtlich nur schwach magnetisirt, sodass der specifische Magnetismus zwischen 6 und 24 cm g-Einheiten auf 1 g Stahl betrug, lieferten den Modul:

$$k = 0,82 \text{ bis } 0,86.$$

(Nach dem Anlassen im Bleibade gingen die Zahlen hinauf, theilweise bis auf 0,90.)

2. Zwei grössere, äusserlich gleiche parallelepipedische Magnete, schon lange im Gebrauch und häufig ummagnetisirt gewesen, 786 g schwer, Dimensionen $44 \times 2,3 \times 1,0$ cm, vom specifischen Magnetismus 39, gaben die Werthe:

$$k = 0,82 \text{ und } 0,83.$$

3. Ein harter, in der von Hrn. Strouhal angegebenen Weise seit der Magnetisirung 30 Stunden lang gekochter Hohlcyylinder, 16 cm lang, von 1,6 cm äusserem Halbmesser, 109 g schwer, vom specifischen Magnetismus 32, lieferte:

$$k = 0,85.$$

4. Ein harter massiver Stahlcyylinder, kürzlich gehärtet und magnetisirt, 16 cm lang, 1,48 cm dick, 216 g schwer, vom specifischen Magnetismus 26, hatte:

$$k = 0,81.$$

5. Endlich zwei Stäbe aus demselben 1,03 cm dicken Rundstahl, hart, 30 cm, bez. 20 cm lang, 200, bez. 133 g schwer, vom specifischen Magnet 42, bez. 28, gaben übereinstimmend:

$$k = 0,82.$$

Stellt man mit diesen zwölf Stäben, welche sämmtlich Zahlen zwischen 0,81 und 0,86 gaben, die von Schneebeli früher an zwei Stäben gefundenen Werthe 0,84 und 0,86, die von Schneebeli, resp. von mir für zwei Magnetnadeln beobachteten Zahlen 0,85 und 0,87, endlich die von v. Helmholtz¹⁾ kürzlich gegebenen Werthe 0,84 und 0,86 zusammen, berücksichtigt man ferner die verhältnissmässig grossen Schwierigkeiten und Fehlerquellen solcher Messungen, ohne welche vielleicht die Unterschiede noch kleiner ausgefallen sein würden, so darf man mit einiger Bestimmtheit behaupten, dass der Werth:

$$k = 0,83 \text{ oder } \frac{5}{6}$$

für gewöhnliche gestreckte Magnete der Wahrheit immer ziemlich nahe kommen wird. Mit anderen Worten:

Die für Fernwirkungen massgebenden Pole eines Magnets liegen um je etwa $\frac{1}{12}$ seiner Länge von den Enden entfernt.

Fehler, welche 5 Proc. der Länge erreichen, dürften unter dieser Annahme niemals zu befürchten sein, und es wären demnach viele magnetische Messungen der Nothwendigkeit besonderer Bestimmungen des Polabstandes überhoben und sehr viel einfacher ausführbar geworden.

Ja, wenn man nicht mit besonders feinen Hilfsmitteln arbeitet, so halte ich die Benutzung dieses Mittelwerthes oft für weniger bedenklich als eine Elimination des Polabstandes durch Beobachtungen aus zwei Entfernungen.

Dass diejenige Vertheilung des Magnetismus in einem Stabe, welche sich bei Versuchen von van Rees ergeben hatte, auf einen Polabstandsmodul von ähnlicher Grösse, wie den oben angegebenen, führt, hat Riecke²⁾ bemerkt.

Wegen ihrer Bedeutung als Magnetnadeln insbesondere in Galvanometern haben wir endlich noch einen Scheibenmagnet und einen Ringmagnet untersucht, und zwar wie oben bemerkt mittelst der gleichzeitigen Einwirkung von Kreisströmen verschiedenen Halbmessers. Es bezeichne d

1) v. Helmholtz, Sitzungsber. d. Berl. Acad. 1883. p. 405. Vgl. auch Töpler, ebenda p. 1040, welcher den Werth $\frac{5}{6}$ bestätigt findet.

2) Riecke, l. c. p. 319.

den äusseren Durchmesser der Scheibe oder des Ringes. Wir fanden, dass in dem Reductionsfactor der Tangentenbussole, welcher das Correctionsglied $\frac{3}{16} \lambda^2 / R^2$ enthält, als „Nadellänge“ λ einzusetzen ist:

für die Kreisscheibe (Durchmesser = 2,2 cm, Dicke = 0,17 cm, Masse = 4,6 g, specifischer Magnetismus = 7):

$$\lambda = 0,80 \cdot d$$

und für den Ring (äusserer und innerer Durchmesser = 2,3, resp. 1,9 cm, Dicke = 0,22 cm, Masse = 2 g, specifischer Magnetismus = 14):

$$\lambda = 0,88 \cdot d.$$

Bis zur Untersuchung einer grösseren Auswahl runder Magnete können diese Zahlen wenigstens einen vorläufigen Anhaltspunkt gewähren.

II. Ueber die Vermehrung und Verminderung magnetischer Momente durch kleine Kräfte.

Es ist ein einzelner aber ein fundamentaler Punkt aus der Lehre vom inducirten Magnetismus, der hier berührt werden soll. Setzt man ein Stahlmagnet schwachen Kräften aus, welche seinen Magnetismus entweder verstärken oder abschwächen, so entsteht die Frage, ob die Verstärkung und Schwächung gleich oder verschieden gross sind.

Mit dieser Frage hat sich Lamont bei seinen ausgedehnten magnetischen Untersuchungen beschäftigt¹⁾, hat gefunden, dass die Abschwächung leichter geschieht als die Verstärkung, und zwar etwa im Verhältniss 4:3, und diese Ansicht scheint von denjenigen, welche mit dem Gegenstande in Berührung traten, zum Theile angenommen worden zu sein.²⁾ Eingehende experimentell begründete Untersuchungen aber scheinen nicht vorzuliegen, und doch haben wir es mit einem Gegenstande von der grössten Bedeutung in dem Gebiete feinerer magnetischer und electricischer Messungen zu thun. Wild rechnet die Bestimmung des Inductionscoëffi-

1) Lamont, Erdmagnetismus. p. 149. 1849.

2) Vgl. z. B. Wild, Rep. d. Meteor. d. k. Acad. zu Petersb. S. Nr. 7. p. 61. 1883, wo gerügt wird, dass einige Beobachter, worunter der Verfasser, keine Unterscheidung zwischen dem Verstärkungs- und dem Schwächungscoëfficienten gemacht haben.

cienten zu den Hauptschwierigkeiten für die Messung der erdmagnetischen Intensität und schlägt, um sie zu umgehen, sogar vor, die schwingenden Magnete durch eine bifilare Aufhängung künstlich senkrecht zum Meridian zu bringen.¹⁾

Während nun eine Schwierigkeit für die Bestimmung der beiden verschiedenen Coëfficienten in der That zugegeben werden muss, so wird dieselbe weit kleiner, wenn man bloß ihre Summe nach der von Weber gegebenen Methode der Inductionsströme²⁾ ermitteln will. Wenn ein nahe constantes Verhältniss zwischen beiden Coëfficienten festgestellt ist, so genügt natürlich die Kenntniss ihrer Summe.

Mir selbst war nun von vornherein am wahrscheinlichsten, dass dieses constante Verhältniss bestehen werde, aber nicht in der von Lamont angenommenen Weise, sondern einfach als Gleichheit. Lamont's Versuche (l. c.) erscheinen nicht zureichend, um die von ihm anfänglich aufgestellte Ansicht zu begründen. Später scheint Lamont selbst, ohne dies bestimmt auszusprechen, die frühere Ansicht zurückzunehmen.³⁾ Er weist nur mit wenigen Worten auf „einige früher von ihm bekannt gemachte Versuche“ hin, erwähnt aber deren Resultat gar nicht mehr. Im Gegentheil er rechnet so, als ob beide Coëfficienten für sehr kleine Kräfte gleich gross seien, und spricht hiervon als von der allgemein verbreiteten Ansicht.

Von vornherein wahrscheinlich ist ja auch das letztere, denn es entspricht dem Gesetz der Stetigkeit. Der Wahrscheinlichkeitsgrund Lamont's, dass ja auch ein verbogener elastischer Körper sich leichter der natürlichen Gestalt wieder annähern als von ihr entfernen lasse, kann nicht als zutreffend bezeichnet werden. Diese Thatsache aus der Molecularmechanik ist allerdings richtig für dauernde Gestaltsänderungen. Die Elasticitätsgrenze des verbogenen Körpers

1) Wild, l. c. p. 37 u. 43.

2) W. Weber, Abh. d. Gött. Ges. d. Wiss. 6. p. 5. d. Sep.-Abdr. 1855. Dass das Verfahren, wie H. Wild meint, an Complication leide, kann ich nicht sehen. Die hier verlangte Genauigkeit wenigstens ist mit wenig complicirten Hilfsmitteln zu erreichen. Vgl. unten.

3) Lamont, Handb. d. Magnetism. p. 371. 1867.

ist nach aussen bekanntlich weiter als nach innen, und ähnlich verhält sich natürlich im allgemeinen ein Magnet den Kräften gegenüber, welche für eine dauernde Aenderung des Magnetismus hinreichend gross sind.

Das aber kommt hier nicht in Betracht. Die Aenderung des magnetischen Momentes mit der Lage gegen den Erdmagnet ist den elastischen Aenderungen der Gestalt zu vergleichen, und für die letzteren wird ohne Zweifel auch für verbogene Körper der Elasticitätsmodul nach beiden Seiten gleich sein.

Ich habe mich zum Ueberfluss von der Richtigkeit der beiden eben aufgestellten Behauptungen überzeugt. Ein Magnet, welcher etwa 8000 mal einer schwächenden Kraft von der Grösse des horizontalen Erdmagnetismus (0,2 cm, g) ausgesetzt worden war, zeigte noch bis auf $\frac{1}{2000}$ denselben Magnetismus wie vorher. Und was den Elasticitätsmodul betrifft, so fand ich denselben an einem kürzlich stark verbogenen weichen Stahlstab nach beiden Seiten merklich gleich.

Die Frage nach den beiden Inductionscoefficienten habe ich, bei den Beobachtungen durch Hrn. Kreichgauer wesentlich unterstützt, in folgender Weise zu entscheiden gesucht. Erstens wurde die Weber'sche Methode der in der gedrehten Spule durch den veränderlichen Magnetismus inducirten Ströme so angewandt, dass man nur Drehungen um 90° eintreten liess, nämlich erstens aus der Ostwestlage des Magnets in die normale Lage (Nordpol nach Nord) und zweitens in die verkehrte Lage (Nordpol nach Süd). Die Ausschläge der Galvanometernadel wurden in beiden Fällen merklich gleich gross gefunden. Ein Unterschied von weniger als 1 Proc. zu Gunsten der Verstärkungscoefficienten ist durch einen kleinen Orientirungsfehler der Spule leicht zu erklären.

Bequemer und genauer wird das Weber'sche Verfahren, wenn man, anstatt den Magnet mit der Spule gegen den Erdmagnetismus umzulegen, eine magnetische Scheidungskraft gegen die Spule und den Magnet in der Spule umkehrt. Zu diesem Zwecke wurde die Inductionsspule mit einer fernerer Lage Draht bewickelt (280 Windungen von

5 cm Durchmesser und einer Gesamtlänge von 39 cm), durch welche ein Strom geleitet wurde, welcher innerhalb der Spule ein magnetisches Feld von nahe 0,2 [cm, g] bewirkte, also ungefähr von der Stärke des horizontalen Erdmagnetismus. Dieser Strom wurde geschlossen und geöffnet, entweder so, dass er den Stabmagnetismus vermehrte, oder dass er ihn verminderte.

In der inneren Spule wurden hierdurch Stromstöße inducirt, die nach dem Multiplicationsverfahren gemessen wurden. Und zwar konnte man den von dem magnetisirenden Strome selbst herrührenden Theil des Inductionstromes durch eine zweite Doppelspule compensiren, was einen Vortheil dieses electromagnetischen Verfahrens bildet. Eine ähnliche Anordnung findet sich schon bei Töpler und von Ettingshausen.¹⁾

Localeinflüsse wurden durch Commutiren des Stromes und Umlegen des Magnetes eliminirt.

Um die Galvanometerausschläge auf inducirten Magnetismus umzurechnen, diente ein kleiner Magnet von bekanntem Moment, mit welchem Multiplicationsversuche durch Hineinstossen und Ausziehen aus der Spule angestellt wurden.

Die Stahlstäbe wurden in verschiedenen Zuständen der Härte und der Magnetisirung untersucht, so wie man in der ersten Spalte der Tabelle findet. Die Masse m der Stäbe ist in Grammen, das magnetische Moment M in [cm, g]-Einheiten, alsdann unter s der specifische Magnetismus M/m oder das auf 1 g Stahl kommende magnetische Moment angegeben.

Unter $+As$ und $-As$ endlich finden sich die specifischen Inductionsconstanten, und zwar in der Form, dass die Zahlen die Veränderung des specifischen Magnetismus mit anderen Worten die Vermehrung, resp. Verminderung des magnetischen Momentes der Masseneinheit (1 g) bedeuten, welche durch die Einheit der magnetisirenden oder entmagnetisirenden Kraft [$g^{1/2}$ cm $^{-1/2}$ sec $^{-1}$] hergebracht wird.

1) Töpler u. Ettingshausen, Pogg. Ann. 160. p. 1. 1877.

Zur Veranschaulichung mag dienen, dass die Zahlen Δs ungefähr die Aenderung des specifischen Magnetismus darstellen, wenn in unseren Breiten der Stab in der Inclinationsrichtung umgewendet wird. Der fünfte Theil etwa ist die durch den horizontalen Erdmagnetismus unserer Breite in 1 g hervorgebrachte „Magnetismus der Lage“.¹⁾

	m	M	$s = \frac{M}{m}$	$+\Delta s$	$-\Delta s$
	g	$\frac{\text{cm}^{3/2} \text{g}^{1/2}}{\text{sec}}$	$\frac{\text{cm}^{3/2}}{\text{g}^{1/2} \text{sec}}$	$\frac{\text{cm}^3}{\text{g}}$	
Cylinder, 16 cm lang, 1,5 cm dick,					
hart	216				
vor einem Jahre magnetisirt . . .	—	4200	20	+0,202	—0,201
„ gestern neu magnetisirt . . .	—	6200	29	+0,218	—0,214
„ oft magnetis. u. lange gekocht	—	5000	23	+0,216	—0,215
Hohlcylinder, 16 cm lang, innerer u. äusserer Durchm. = 1,2, resp. 1,6 cm	109				
vor einem Jahr magn. u. gek. . .	—	3500	32	+0,261	—0,265
„ neu magnetisirt	—	4200	38	+0,261	—0,264
Parallelepipèd $18 \times 1,5 \times 0,5$ cm	114				
weich, unmagnetisch	—	0	0	$\pm 0,459$	
„ weich, magnetisirt	—	940	8,3	+0,447	—0,449
„ hart, unmagnetisch	—	0	0	$\pm 0,335$	
„ hart, magnetisirt	—	3600	32	+0,308	—0,305
Parallelepipèd $18 \times 1,7 \times 0,6$ cm	144				
weich, unmagnetisch	—	0	0	$\pm 0,490$	
„ weich, magnetisirt	—	1230	8,6	+0,467	—0,465
„ hart, unmagnetisch	—	0	0	$\pm 0,341$	
„ hart, magnetisirt	—	3900	27	+0,303	—0,304

In keiner von diesen Zahlen ist eine deutliche Differenz zwischen den Verstärkungscoefficienten $+\Delta s$ und den Abschwächungscoefficienten $-\Delta s$ zu bemerken. Die kleinen Unterschiede unregelmässigen Vorzeichens sind Beobachtungsfehler und werden grösstentheils von Schwankungen der Stärke

1) Mit der Dichtigkeit des Stahles 7,6 multiplicirt, geben die Zahlen s oder Δs die auf die Volumeneinheit bezogenen specifischen Magnetismen, resp. Inductionscconstanten, welche letztere, wie schon Herwig bemerkt hat, unbenannte Zahlen vorstellen, also von den Grundeinheiten unabhängig sind.

des inducirenden Stromes herrühren. Die Mittelwerthe sind ganz gleich.

Bewiesen ist hiermit, dass von einer Ungleichheit des Verstärkungs- und Schwächungscoefficienten im Verhältniss 3:4 oder ähnlichem nicht die Rede sein kann, dass man vielmehr für praktische Zwecke nur einen einzigen Coefficienten für die Aenderung des Magnetismus durch äussere begünstigende oder nachtheilige Kräfte anzunehmen hat.

Selbstverständlich gilt dieser Satz nur innerhalb gewisser Grenzen. Wie weit die letzteren sich erstrecken, bedarf einer weiteren Untersuchung. Ich will hier nur bemerken, dass wir bei Kräften, welche die Hälfte mehr oder weniger betragen als der horizontale Erdmagnetismus, merklich auf dieselben Zahlen geführt wurden.

Das Gebiet der hierher gehörigen Messungen scheint durch diese Resultate einer ohne Grund angenommenen Schwierigkeit entkleidet zu werden. Zu entscheiden bleibt freilich noch ein anderer Punkt, nämlich die Frage, ob und unter welchen Umständen man von einer Aenderung des inducirten magnetischen Momentes mit der Zeit absehen kann.

Ohne Zweifel gibt es einen solchen Einfluss, er wird aber bei harten Magneten wohl praktisch zu vernachlässigen sein.

III. Ueber die Bestimmung des Temperaturcoefficienten eines Magnets.

Den bekannten Methoden von W. Weber, Lamont. Wild kann man folgende übersichtliche und empfindliche Anordnung hinzufügen.

In der Nachbarschaft einer spiegelnden Magnetnadel wird der zu untersuchende Stab in der Höhe der Nadel horizontal so angebracht, dass sein Mittelpunkt im Meridian der Nadel liegt, und dass er mit dem Erdmagnetismus zusammenwirkend die Nadel ostwestlich stellt. Der Stab bilde in dieser Stellung mit dem Meridian den Winkel q .

Aendert sich nun der Magnetismus M des Stabes um ΔM , so wird die Einstellung der Nadel sich um den kleinen Winkel $\Delta \varepsilon$ ändern. Dann ist, wie man leicht sieht, von Correctionen (vgl. unten) einstweilen abgesehen:

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta \varepsilon.$$

Man bemerkt, dass die Methode einer grossen Empfindlichkeit fähig ist, indem man nämlich den Abstand des Magnetes von der Nadel so wählt, dass φ einen kleinen Werth erhält.

Zum Behufe der praktischen Ausführung ist es sehr bequem, den Magnetstab an dem Stiele einer Alhidade mit Theilkreis zu haben; als Magnetnadel habe ich eine beiderseitig spiegelnde Stahlscheibe angewandt. Das Verfahren gestaltet sich dann folgendermassen.

Um den Winkel φ zu bestimmen, dreht man den Magnetstab aus seiner anfänglichen Lage, bis das Scalenbild in der zweiten Spiegelfläche erscheint. Diese Drehung beträgt dann 2φ . Man gibt der Alhidade in den beiden um 2φ verschiedenen Stellungen Anschläge und dreht dann bei jeder Beobachtung, d. h. im kalten und im warmen Zustande den Magnet zwischen diesen Anschlägen. Dadurch ist man zugleich vor dem Einfluss kleinerer unfreiwilliger Drehungen der magnetischen Axe des Stabes, etwa durch die Erwärmung selbst, gesichert.

Es möge nun A der Abstand der Scala vom Spiegel sein. Bei der einen Temperatur t mögen bei der Drehung des Stabes um 2φ die Nadeleinstellungen e_1 und e_2 , bei der anderen Temperatur t' die Einstellungen e'_1 und e'_2 beobachtet werden. Bezeichnen wir $e_1 - e_2$ durch n , $e'_1 - e'_2$ durch n' , so ist der relative Verlust an Magnetismus:

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{8A} (n - n'),$$

der Temperaturcoefficient also:

$$\vartheta = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{8A} \frac{n - n'}{t - t'}.$$

Correction wegen der Stablänge. Die Entfernung des Magnetes von der Nadel so gross zu machen, dass die Stablänge gegen sie verschwindet, wird nicht ausführbar sein, da es bei grösserem Abstände keinen Winkel φ gibt, der die Nadel transversal stellte. Die Stablänge wird berücksichtigt, indem man das obige Resultat mit:

$$1 + \frac{1}{3} \frac{\lambda^2}{a^2} (3 + 5 \cos^2 \varphi)$$

multiplicirt. Hier ist a die Entfernung des Magnetmittelpunktes von der Nadel, λ der Polabstand des Magnetes, d. h. bei gestreckten Magneten $\frac{5}{6}$ der Stablänge (cfr. p. 414).

IV. Ueber die bifilare Bestimmung von Trägheitsmomenten.

Das bekannte Gauss'sche Verfahren, das Trägheitsmoment eines Körpers aus den Schwingungen im unbelasteten und belasteten Zustande zu bestimmen, eliminirt die unbekannte Directionskraft der Schwingungen. Die Anwendung einer bekannten, z. B. einer bifilaren¹⁾ Directionskraft lässt ein einfacheres Verfahren anwenden.

Zu dem Versuche dieser Bestimmungsweise veranlasste mich ein Magnetstab, dessen Trägheitsmoment trotz der grössten Sorgfalt mittelst übergehangener Gewichte unregelmässig und zu gross gefunden wurde, wie man aus der geometrischen Ausmessung des sorgfältig gearbeiteten Stabes schliessen konnte.

Zur Ausführung diente die von mir vor kurzem beschriebene (l. c.) Bifilarsuspension.²⁾ Nach der bekannten

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 17. p. 744. 1882.

2) Unter Annahme der höchst zweckmässigen von Hrn. Wild herführenden Ersetzung der schrägen Flächen, über welche die Drähte liefen, durch senkrechte Flächen, an welche die Drähte angeklemt werden. (Rep. f. Meteor. d. k. Acad. d. Wiss. St. Petersburg. 7. Nr. 7. 1883.)

Es möge mir gestattet sein, hier zu bemerken, dass ich im übrigen mein Verfahren der „bifilaren“ Messung der erdmagnetischen Intensität keineswegs als eine Combination der Gauss'schen und der Wild'schen Bestimmungsweise ansehen kann, wie Hr. Wild dies zu thun scheint (l. c. p. 2). Ich glaube, mein Verfahren als ein durchaus selbständiges in Anspruch nehmen zu sollen. Denn die „bifilargalvanische Methode“, aus welcher sich die „bifilarmagnetische“ entwickelt hat, findet sich schon längere Zeit vor den ersten diesbezüglichen Publicationen des Hrn. Wild, auch unter Rücksichtnahme auf die Fadentorsion, in der dritten Auflage des „Leitfadens der praktischen Physik“ 1877. p. 184 beschrieben. Das erste von Wild im Jahre 1881 mitgetheilte bifilarmagnetische Verfahren wiederum unterscheidet sich in der Anordnung sowohl wie in den Zwecken durchaus von dem meinigen. Dem letzteren nähert sich erst das zweite Verfahren Wild's, welches mir ja aber unbekannt war, da es später als das meinige erschien.

Beziehung zwischen der Schwingungsdauer t , der bifilaren Directionskraft und dem Trägheitsmoment $K = Dt^2/\pi^2$ bestimmt man zuerst das Trägheitsmoment des bifilar aufgehängten Trägers; dann wird der zu untersuchende Körper eingelegt und das Trägheitsmoment der Summe gerade so ermittelt.

Ueber die Ermittlung der Directionskraft D aus dem Abstände, der Länge, dem Gewicht und der Elasticität der Aufhängefäden und dem Gewichte des Bifilarkörpers, sowie über instrumentelle Ausführung, Orientirung und Beobachtung darf ich auf meinen früheren Aufsatz¹⁾ verweisen.

Ist der Körper magnetisch, so hat man die zu der bifilaren Directionskraft hinzukommende erdmagnetische zu eliminiren. Bei der relativ geringen Grösse der letzteren geschieht dies leicht, z. B. so, dass man bewirkt, dass der Magnet bei den Schwingungen ostwestlich liegt. Die kleine Abweichung der unteren von der oberen Verbindungslinie der Fäden wird durch Multiplication mit dem Cosinus dieser Abweichung in Rechnung gesetzt. Oder man bringt die Suspension mit dem Magnet in den Meridian und beobachtet die Schwingungsdauer t_1 bei normaler und t_2 bei verkehrter Lage des Magnetes. Dann ist die Schwingungsdauer des unmagnetischen Körpers gleich:

$$\sqrt{2} \frac{t_1 t_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}}.$$

Endlich könnte man ja auch die Untersuchung vor der Magnetisirung ausführen.

Dass auf die Centrirung der Schwerpunkte²⁾ die hinreichende Aufmerksamkeit zu verwenden ist, versteht sich von selbst.

Die Schwingungen geschehen im allgemeinen sehr rasch, weit schneller als man an schwingenden Magneten gewohnt ist. Aber die Beobachtungen lassen sich mit derselben Genauigkeit ausführen. Man notirt einfach die Zeiten der Umkehr auf derselben Seite, wobei man ja, wenn nöthig, immer eine oder mehrere überspringen kann. Die erreich-

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 17. p. 744 u. 745. 1882.

2) F. Kohlrausch, l. c. p. 754.

bare Genauigkeit gibt der für langsame Schwingungen zu erzielenden nichts nach. Ich fand Uebereinstimmung der einzelnen Beobachtungssätze, als die Schwingungsdauer selbst etwa eine Secunde betrug, bis auf höchstens einige Zehntausendtel Secunde.

Die so gefundenen Trägheitsmomente des genannten Magnetstabes (16 cm lang, 216 g schwer) stimmten sowohl unter sich als mit dem aus den Dimensionen berechneten gut überein.

Als Vorzüge der bifilaren Bestimmungsweise glaube ich folgende ansehen zu sollen.

1) Die Vermeidung der principiellen Fehler lose aufgehängener Gewichte¹⁾, resp. der Unsicherheit, welche für feste Belastungskörper, wie den Lamont'schen Ring, aus deren etwaiger Heterogenität entspringt.

2) Die Vermeidung der Schwankungen einer magnetischen Directionskraft durch die Temperatur und die erdmagnetischen Variationen.

3) Für eine wiederholte Bestimmung sogar die grössere Einfachheit der Ausführung mittelst einer einzigen Schwingungsdauer, wenn man das Trägheitsmoment der Suspension ein für allemal bestimmt hat.

4) Die Unabhängigkeit von den Einflüssen mitschwingender Luftschichten, sowie etwaiger magnetischer Inductionen auf die belastenden Gewichte.

Würzburg, 6. November 1883.

VII. *Ueber das Dispersionsäquivalent von Diamant; von A. Schrauf.*

Die Dispersion des Diamants genau zu kennen, ist ein dringendes Bedürfniss geworden, indem auf die optischen Werthe organischer Verbindungen die dem Kohlenstoff eigenthümliche, lichtzerstreuende Kraft massgebenden Ein-

1) Vgl. Dorn, Wied. Ann. 17. p. 788. 1882 und O. Beling, zur Theorie der Bifilaraufhängung, Breslau 1881.

fluss besitzt. Selbst eine flüchtige Revision der vorhandenen Beobachtungen lehrt, dass namentlich in den Benzolderivaten mit zunehmendem Kohlenstoffgehalt sehr grosse Dispersion auftritt. Eine gleich grosse auch im krystallisirten Kohlenstoff, im Diamant, zu erwarten, dieser Schluss läge wohl nahe. Allein schon des Autors ältere, 1861 veröffentlichten¹⁾ Beobachtungen widersprachen dieser Vermuthung. Um den Gegensatz zwischen dem organischen und mineralisirten Kohlenstoff in der angeregten Frage vollkommen sicher zu stellen, ward eine Serie neuer Beobachtungen durchgeführt.

Das Material hierzu bot ein brasilianischer Diamant (Min. M. 4399), vom ersten Wasser, dessen Farbe kaum merkbar ins Gelbliche zieht. Derselbe, ein Karat schwer, ist in der Form eines unregelmässigen Triakisoctaëders geschliffen. Deshalb konnten an dem einen Individuum mehrere Combinationen der Facetten als Prismen benutzt werden. Die geschliffenen Facetten gaben tadellose Reflexe, hingegen nur undeutliche Spectrallinien infolge der bei kleinen Objecten unvermeidlichen Convexität der Schlißflächen. Deshalb musste von der Bestimmung μ für die Fraunhofer'schen Linien abgesehen und Li, Na, Th-Flammen benutzt werden. Die Messungen wurden mittelst eines Fuess'schen Goniometers, Modell I, durchgeführt.

Die Resultate sind:

Volumengewicht $d_4^{20} = 3,516$

Prisma I $A = 15^\circ 45' 37''$ $\mu_{Na} = 2,417\,024$

Prisma II $A = 44^\circ 23' 13''$ $\mu_{Li} = 2,408\,449$

$\mu_{Na} = 2,417\,227$

$\mu_{Th} = 2,425\,487$

Der mittlere Werth der Brechungsexponenten stimmt vollkommen mit den Angaben von Fizeau $\mu = 2,4168$ und von Descloizeaux $\mu = 2,4195$.

In Beziehung auf Dispersion führen die vorliegenden Beobachtungen zu demselben Resultate, wie die älteren Daten.²⁾

1) A. Schrauf, Pogg. Ann. 112. p. 593. 1861.

2) Schrauf, Wien. Ber. 41. p. 776. 1860.

$$\begin{array}{ll} \mu_{Na} - \mu_{Li} = 0,008\,778 & \mu_{Th} - \mu_{Na} = 0,008\,260 \\ \text{früher } \mu_D - \mu_B = 0,009\,06 & \mu_E - \mu_D = 0,009\,03. \end{array}$$

Die Ausdehnung des Sonnenspectrums ist relativ gering. Beobachtet wurden mit dem Prisma II für die Grenzen von roth und violett die Deviationen D^0 :

$$\begin{array}{ll} D^0 = 86^\circ 34' 30'' & \mu_\varphi = 2,407\,929 \\ = 91^\circ 5' 30'' & \mu_v = 2,449\,321 \end{array}$$

Der Lichtstrahl war hier senkrecht zu dem einfallenden Strahl abgelenkt. Mittelst der Wellenlängen von Li, Th (nach Ketteler) erhält man aus den Resultaten die Refractions- und Dispersionsconstanten. Sie liefert die Formel

$$(I) \quad \mu_n = A + b \lambda_D^2 \lambda_n^{-2} = 2,378\,531 + 0,038\,696 \lambda_D^2 \lambda_n^{-2}.$$

Der Autor benutzt für vergleichende Rechnungen seit langem diese vereinfachte Cauchy'sche Dispersionsformel. Dieselbe würde sich auch zur allgemeinen Benutzung sehr empfehlen¹⁾, da:

$$\mu_D - A = b$$

ist und deshalb die separate Berechnung des Dispersionsfactors aus der gewöhnlichen Cauchy'schen Gleichung $\mu = A + B \lambda^{-2}$ überflüssig wird. Da μ_D immer bestimmt wird und:

$$\lambda_D^2 \lambda_{Li}^{-2} = 0,770\,896 \quad \lambda_D^2 \lambda_{Th}^{-2} = 1,213\,456 \quad \lambda_D^2 \lambda_{Na}^{-2} = 1,$$

so ist selbst auf dem Wege des Versuches die Auswerthung der Refractions- und Dispersionsconstante in kürzester Zeit möglich. Man hat nur von μ_{Li} , μ_{Na} , μ_{Th} aliquote Theile dieser Wellenlängenquadrate zu subtrahiren; sind die drei erhaltenen Reste gleich, so ist hierdurch A gegeben.

Benutzt man aber die gewöhnliche Cauchy'sche Formel und drückt die Wellenlängen in Mikron aus ($\lambda_D = 0,5891$), dann hat für Diamant die Gleichung Geltung:

$$(II) \quad \mu_n = A + B \lambda_n^{-2} = 2,378\,531 + 0,013\,432 \lambda_n^{-2}.$$

Diese Zahlen ermöglichen, die Thatsache zu constatiren, dass die organischen Kohlenwasserstoffe, namentlich die Ver-

1) Es entspricht diese Formel thatsächlich einer Aenderung des „Maassstabes“ der Wellenlänge, welche so vorgenommen ward, dass $\lambda_D = 1$ wird.

bindungen der aromatischen Reihe ein nahe 40 mal grösseres Dispersionsvermögen des Kohlenstoffes besitzen.

Zur Berechnung des Dispersionsäquivalentes werden sich — sowie es für die Refraction in der That bereits geschehen ist — mehrere Formeln aufstellen lassen, welche mit grösserem oder geringerem Grade der Genauigkeit einerseits dem Gesetze der Constanz genüge leisten, andererseits als summatorische Functionen verwendbar sind. Im wesentlichen werden aber die erzielten Resultate immer dem Sinne nach gleich sein. Der Autor benutzt daher, ohne weitere neuerliche Beweise, seine in diesen Annalen vor nahe einem Vierteljahrhundert angegebene Formel:

$$PBd^{-2} = \mathfrak{N},$$

des Dispersionsäquivalentes.¹⁾ Nur benutzt derselbe hier, statt des von λ_D^{-2} befreiten zweiten Gliedes der Cauchy'schen Formel den Factor b der Gleichung (I). Für die zum Vergleiche beigezogenen organischen Verbindungen ist dieser Factor mittelst der oben notirten Relation $b = \mu_D - A$ immer leicht zu ermitteln. Für die Berechnung des Refraktionsäquivalentes $\mathfrak{M}_A$ verwendete hier der Autor die bekannte Lorenz'sche Formel und erlaubte sich, die von Landolt in seinen classischen Zusammenstellungen angegebenen diesbezüglichen Werthe zu benutzen.²⁾

Diamant liefert:

$$d = 3,516 \quad A = 2,378\,53 \quad b = 0,038\,69$$

$$\mathfrak{M}(C) = 2,075\,8 \quad \mathfrak{N}(C) = 0,032\,86.$$

Nach dem bekannten summatorischen Gesetze des Refraktions- und Dispersionsäquivalentes lässt sich der Werth $\mathfrak{M}(C)$, oder $\mathfrak{N}(C)$ auch aus der Differenz der für $C_{x+1}H_yO_z$ und $C_xH_yO_z$ beobachteten Werthe ableiten. Solche um ein Atom Kohlenstoff differirende Gruppen wären beispielsweise:

1) Akrolein C_3H_4O — Acetaldehyd C_2H_4O . $A = C$.

$$A; b \quad 1,380\,10 \quad 0,019\,65 \quad 1,322\,29 \quad 0,009\,28$$

$$\mathfrak{M}; \mathfrak{N} \quad 15,43 \quad 1,555\,8 \quad 11,27 \quad 0,671\,3$$

$$\mathfrak{M}(C) = 4,16 \quad \mathfrak{N}(C) = 0,8845.$$

1) Schrauf, Pogg. Ann. 112. p. 591. 1861 und 119. p. 569. 1863.

2) Landolt, Wied. Ann. Beibl. 7. p. 845. 1883 und Landolt und Börnstein, Tabellen p. 88.

2) Allyläthyläther $C_6H_{10}O$ — Aethyläther $C_4H_{10}O$. $\Delta = C$.

$A; b$	1,375 47	0,012 63	1,343 68	0,009 25
$\mathfrak{M}; \mathfrak{N}$	25,76	1,855 5	21,89	1,336 2
	$\mathfrak{M}(C) = 3,87$		$\mathfrak{N}(C) = 0,5293$.	

3) Bittermandelöl C_7H_6O — Phenol C_6H_6O . $\Delta = C$.

$A; b$	1,509 40	0,036 98	1,520 35	0,029 98
$\mathfrak{M}; \mathfrak{N}$	30,29	3,586 1	26,72	2,452 2
	$\mathfrak{M}(C) = 3,57$		$\mathfrak{N}(C) = 1,1349$.	

Bei der zweiten Gruppe sinken die Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ gegenüber jenen der ersten Gruppe nahe um denselben Betrag; ein Zeichen, dass beide Formeln gleiche Genauigkeit gewähren, und die Ursache dieser Erscheinungen im Bau des Körpers zu suchen ist. In der dritten Gruppe ist hingegen das beträchtliche Anwachsen der Dispersion bemerkenswerth. Man kann in der That sagen, dass hier dem Plus von einem Atom Kohlenstoff eine vierzigmal grössere Einwirkung auf die Zerstreuung des Lichtes rechnungsgemäss zukommt, als sie Diamant auszuüben vermag.

Das Dispersionsäquivalent des Diamants ist verschwindend klein gegen jene Zahlen, die aus den Beobachtungen an organischen Verbindungen folgen. Die intramolecularen Zustände des Kohlenstoffes müssen daher beträchtlichen Veränderungen unterliegen.

Der Autor fügt dieser Notiz noch einige Bemerkungen über die relativen Dispersionsverhältnisse einiger organischer Substanzen an:

Aethylalkohol	C_2H_6O	b 0,00910	$\mathfrak{N}$ 0,6541
Acetaldehyd	C_2H_4O	0,00928	0,6713
Butylalkohol	$C_4H_{10}O$	0,01122	1,2658
Butylaldehyd	C_4H_8O	0,01065	1,1488
Aceton	C_3H_6O	0,01027	0,9496
Akrolein	C_3H_4O	0,01965	1,5558
Benzylalkohol	C_7H_8O	0,02625	2,6065
Bittermandelöl	C_7H_6O	0,03698	3,5861

Aus diesen Verbindungen lassen sich vier Gruppen bilden, deren Differenz gleich H_2 ist. Aber einer Zunahme von H entspricht in keiner Weise eine gleiche Zunahme des

Dispersionsvermögens. Die durch Subtraction erhaltenen Werthe von $\mathfrak{N}(\text{H}_2)$ sind:

$$-0,017 \quad +0,117 \quad -0,6062 \quad -0,9796.$$

An dieser negativen Differenz trägt die benutzte Formel nur die geringste Schuld. Eine kurze Ueberlegung zeigt dies. Combinirt man die vier ersten Glieder zu zwei um die Differenz C_2H_4 verschiedene Gruppen, so erhält man:

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}(\text{C}_2\text{H}_4) &= 0,6118 \\ &= 0,4775\end{aligned}$$

genügend nahe liegende Zahlen. Das Mittel gibt $\mathfrak{N}(\text{CH}_2) = 0,2723$. Benzylalkohol $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{CH}_2 \cdot \text{OH}$ hat analoge Structur wie Phenol $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{OH}$; unterscheidet sich vom letzteren nur durch die Differenz CH_2 . Ist die benutzte Formel auch nur in erster Annäherung richtig, so muss sich $\mathfrak{N}(\text{C}_7\text{H}_8\text{O})$ aus $\mathfrak{N}(\text{C}_6\text{H}_6\text{O})$ berechnen lassen. In der That ist:

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}(\text{Phenol}) + \mathfrak{N}(\text{CH}_2) &= 2,4522 + 0,2723 = 2,7246 \\ \text{beobachtet:} & 2,6065.\end{aligned}$$

Die Ursache, dass bei der Ermittlung des Dispersionsäquivalents von Hydrogenium negative Werthe gefunden wurden, dass der rechnungsmässigen „Verminderung“ des Wasserstoffes in der Formel eine „vermehrte“ Dispersion der Verbindung entspricht — die Ursache hiervon ist in der total geänderten Constitution solcher Körper aufzusuchen. Denn nur für homologe Reihen gelten mit einiger Strenge die summatorischen Functionen der optischen Werthe. Ueberall dort, wo die Refractionsäquivalente nur geringe Störungen zeigen, sind in weit grösserem Betrage auch Anomalien des Dispersionsäquivalentes nachweisbar. Jedenfalls ist zur Beurtheilung der Gleichheit des molecularen Baues der Körper die Lichtzerstreuung ein noch viel empfindlicheres Kriterium als die Refractionsconstante.

Miner. Mus. d. Univ. Wien, April 1884.

VIII. *Untersuchungen im Gebiet der strahlenden Wärme; von Heinr. Schneebeli.*

(Aus Bd. 19 der Vierteljahrsschrift der Züricher naturforsch. Ges. mitgetheilt vom Hrn. Verf.).

Im 84. Bde. von Pogg. Ann. p. 411 und folgende beschreibt Svanberg eine einfache und sehr empfindliche Methode zum Studium der strahlenden Wärme.

Meine Absicht bei den nachstehenden Versuchen war, diese Methode auf ihre Genauigkeit und Leistungsfähigkeit zu prüfen und zugleich einige Fragen der Strahlung experimentell mit ihrer Hülfe zu lösen.

Bereits haben in neuerer Zeit Langley und Baur die Svanberg'sche Methode benutzt, um verschiedene Fragen, die sich im Gebiet der strahlenden Wärme stellen lassen, zu entscheiden, und Anordnungen angegeben, um die Methode den verschiedenen Zwecken anzupassen.

Die Anordnung, wie ich sie bei meinen Versuchen wählte, ist folgende:

Als bestrahlter Widerstand wurde benutzt ein Gitter von dünnem Stanniol, welches mit Platinchlorid geschwärzt war und sich in einem Kasten mit beweglichem Deckel befand. Als electromotorische Kraft diente ein Daniell'sches Element, und wurde das Spiegelgalvanometer der Brücke so empfindlich gestellt, dass im allgemeinen eine Verrückung des Messdrahtcontactes von 1 mm einen Ausschlag von einigen hundert Scalentheilen bewirkte. Der Widerstand in dem Kreise, in dem sich die Säule befindet, wurde durch einen eingeschalteten Rheochorden constant erhalten und die Stromstärke in demselben beständig controlirt.

Verschiedene Umstände bewogen mich, die Strahlung in folgender Weise zu untersuchen: Es wurde das Stanniolgitter während zehn Secunden der Strahlung ausgesetzt, hierauf der Stromkreis geschlossen und der nun erfolgende Ausschlag abgelesen. Selbstverständlich war vorher der Schlitten so gestellt worden, dass beim Schliessen und Oeffnen vor der Bestrahlung die Nadel in Ruhe bleibt.

Ein Uebelstand der Methode, den ich gleich hervorheben will, ist, dass die Stromlosigkeit in der Brücke nie längere Zeit anhält, sodass auch bei sorgfältigem Schutze der empfindlichen Theile der Strombahn dennoch nicht garantirt werden kann, dass während der zehn Secunden, während welchen die Bestrahlung statthatte, die Stromlosigkeit bei nicht veränderter Gittertemperatur noch vorhanden gewesen sei. Eine kürzere Bestrahlungszeit anzuwenden, schien mir nicht angebracht, da die Temperatur des Gitters Function der Zeit ist und namentlich im Anfang sehr stark mit der Zeit wächst, und also kleine Ungenauigkeiten in der Exponirungszeit grosse Fehler hervorbringen würden. Folgende Zahlen geben hierüber Auskunft:

Bestrahlungsdauer:	2	5	10	15	20	Secunden.
Ausschlag:	270	300	321	328	331.	

I. Absorption der strahlenden Wärme in Glas.

Es wurde vorerst die Absorption der Wärmestrahlen die von einem glühenden Platinblech ausgingen, in verschiedenen Glassorten untersucht. Das Platinblech befand sich in der nicht leuchtenden Flamme eines Bunsen'schen Brenners. Die Glasplatten waren aus verschiedenen Fensterscheiben und Stücken von Electrisirmaschinen ausgewählt worden, und besaßen annähernd die gleiche Dicke, denn nur in diesem Fall sind die Absorptionsvermögen der verschiedenen Platten untereinander vergleichbar. Der Absorptionscoëfficient wurde berechnet aus der Formel:

$$J = J_0 e^{-kx}, \quad \text{zu } k = \frac{\log \frac{J_0}{J}}{x},$$

worin bedeuten:

- x die Dicke der absorbirenden Platte,
- J_0 die Intensität der auffallenden und
- J diejenige der durchgehenden Strahlen.

Folgende Tabelle gibt ein Bild über die Absorption in den gewählten Glasscheiben:

Dicke der Scheiben	J_0	J	k
1,8 mm	142,9	70,0	0,396
1,8 „	143,0	69,5	0,400
1,75 „	142,5	70,5	0,401
1,70 „	142,5	71,5	0,405
1,90 „	142,0	68,5	0,383

Die Tabelle zeigt, dass die untersuchten Glasplatten eine ziemlich gleichmässige Absorptionsfähigkeit besitzen; die grösseren Abweichungen, wie sie bei Nr. 4 und 5 vorkommen, erklären sich leicht aus der verschiedenen Dicke der beiden Platten. Aus dem Folgenden geht nämlich hervor, dass der Absorptionscoefficient mit wachsender Dicke ganz bedeutend abnimmt.

Weiter wurde die Frage untersucht: Wie ändert sich der Absorptionscoefficient in verschiedenen Tiefen der durchstrahlten Glasschicht? Folgende Tabelle gibt hierüber Auskunft; es bezeichnet in derselben δ die Dicke der von der Strahlung schon durchlaufenen Glasschicht, bevor die Absorption in der Glasplatte von 1,75 mm Dicke gemessen wird. Als strahlende Quelle diente eine leuchtende Gasflamme.

δ Dicke der schon durchlaufenen Glasschicht	Dicke der absorbirenden Glasplatte	k
0 mm	1,75 mm	0,419
1,8 „	1,75 „	0,207
5 „	1,75 „	0,150
10 „	1,75 „	0,084

Endlich wurde noch die Absorptionsfähigkeit des Glases bei strahlenden Quellen verschiedener Temperatur untersucht. Die Zahl für die Temperatur 100° ist nur als eine angenäherte zu betrachten:

Temperatur des strahlenden Körpers	Dicke der absorbirenden Glasplatte	k
100°	1,75 mm	2,4
250	1,75 „	1,47
circa 1000°	1,75 „	0,42

II. Untersuchung der Strahlung in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur des strahlenden Körpers.

Ueber die Abhängigkeit der ausgestrahlten Wärmemenge von der Temperatur des strahlenden Körpers stellte in jüngster Zeit Stefan¹⁾ eine Hypothese auf. Nach ihm soll die von einem Körper ausgestrahlte Wärmemenge proportional sein der vierten Potenz seiner absoluten Temperatur, es müsste also sein:

$$\frac{AT_1^4 - BT_0^4}{AT_2^4 - BT_0^4} = \frac{S_1}{S_2},$$

wenn wir bezeichnen mit:

A und B zwei Constante, die abhängen erstere von der Natur des strahlenden und letztere von der Natur des bestrahlten Körpers,

T_1 und T_2 die absoluten Temperaturen der strahlenden Quelle,

T_0 die absolute Temperatur der bestrahlten Fläche,

S_1 und S_2 die bei den Temperaturen T_1 und T_2 ausgestrahlten Wärmemengen.

Um diese Beziehung in vorläufiger Weise zu prüfen, wandte ich als strahlende Fläche die grosse Seite eines rechtwinkligen Kupferklotzes von folgenden Dimensionen an: Höhe 100 mm, Breite 80 mm und Dicke 45 mm und dessen Gewicht 3,21 kg betrug. Von oben wurde in den Klotz ein Loch gebohrt und in dasselbe ein Thermometer gesteckt, welches für die tieferen Temperaturen zur Temperaturmessung genügte. Für die höheren Temperaturen wurde die Temperatur des Klotzes auf calorimetrische Weise bestimmt, indem sofort nach vollendeter Strahlung ein Gehülfe denselben in ein Gefäss mit bekannter Wassermenge tauchte. Natürlich musste darauf Bedacht genommen werden, dass die Strahlung bei den verschiedensten Temperaturen unter gleichen Umständen, d. h. bei gleichbleibender Fläche vor sich gehe. Eine reine Kupferoberfläche war ausgeschlossen, da besonders bei höheren Temperaturen eine grosse Veränderung derselben vor sich geht und damit das Emissions-

1) Stefan, Wien. Ber. 1879. p. 391.

vermögen gewaltig verändert wird. Es wurde deshalb die strahlende Fläche mit einer sehr feinen Schicht von Silber überzogen durch Bestreichen derselben mit einer Silberlösung in Salpetersäure und nachheriges Erhitzen. Man erhält auf diese Weise eine sehr feine und ziemlich homogene, matt schwarze Oberfläche, die auch während einer ganzen Reihe trotz Eintauchens in Wasser ziemlich unverändert blieb.

Ich wähle aus den verschiedenen Versuchsreihen die folgende heraus:

<i>T</i>	423	473	523	553	643°
<i>S</i>	62	113	182	230	455

Da sowohl strahlende wie bestrahlte Fläche mit einer dünnen Schicht eines niedergeschlagenen Metalles überzogen sind, so dürfen wir wohl $A = B$ setzen. Nach Stefan müsste alsdann:

$$\frac{T^4 - T_0^4}{S} = \text{constant}$$

sein. Die folgende Tabelle enthält die aufeinander folgenden Werthe für:

<i>T</i>	423	473	523	553	643°
$(T^4 - T_0^4)/S$	39,7	37,7	37,1	37,4	36,0

Die Uebereinstimmung ist keine sehr befriedigende; indessen ist auch die Versuchsanordnung nicht eine solche, dass dieselbe geradezu entscheidende Resultate liefern könnte.

Die folgende Versuchsanordnung scheint mir aber dazu angethan zu sein, die Hypothese in weiten Grenzen prüfen zu können.

Als strahlende Fläche wurde das Gefäss eines Luftthermometers benutzt, das sich in einem Perrot'schen doppelwandigen Ofen befand. Die Wände des Ofens wurden durchbohrt und in das Loch eine mit einer Klappe versehene, dünnwandige Eisenröhre gesteckt, die nahe an die Wand des Thermometergefässes heranreichte. Die Schieberklappe befindet sich ausserhalb des Ofens und konnte mit einer Schnur vom Beobachter, der in einiger Entfernung am Ablesefernrohr sass, geöffnet und geschlossen werden. Vor der Röhre befanden sich zwei feste Schirme aus Zinkblech je ca. ein Quadratmeter gross und durch eine Luft-

schicht von etwa zwei Decimetern Dicke voneinander getrennt. In diese Schirme wurden der Röhre entsprechend kreisrunde Oeffnungen geschnitten, die aber erheblich kleiner waren, als der Querschnitt der Röhre betrug. Das Ganze wurde so gestellt, dass das durch die äussere Oeffnung blickende Auge bei geöffneter Klappe nichts weiteres wahrnehmen konnte als einen Theil der Wand des Thermometergefässes. Endlich wurde noch zwischen die beiden festen Schirme ein kleinerer Doppelschirm hineingehängt, der im Ruhezustand zwischen den beiden Oeffnungen hing und durch einen Schnurlauf vom Beobachter weggezogen und wieder zurückgelassen werden konnte. Hinter dem zweiten festen Schirm befand sich die Röhre mit dem Stanniolgitter, welches durch Wegziehen der Röhrenklappe und des beweglichen Doppelschirmes vermittelt der beiden Schnurläufe vom Beobachter sehr rasch der Strahlung des Thermometergefässes ausgesetzt, resp. ebenso rasch der Strahlung entzogen wurde. Wie früher dauerte auch hier wieder die Bestrahlung zehn Sekunden.

Das cylindrische Thermometergefäss ist aus Porcellan mit einem Inhalt von etwa 500 ccm; dasselbe endigt in einer Capillarröhre von ca. 1 m Länge, welche durch eine Bleicapillarröhre mit einem Metallmanometer verbunden ist. Ueber diese specielle Art der Temperaturmessung habe ich schon früher referirt¹⁾ und verweise deshalb auf das dortgesagte. Doch möchte ich noch einmal wiederholen, dass diese einfache Anordnung bedeutende Genauigkeit und grosse Raschheit der Temperaturmessung ermöglicht, sobald natürlich einmal die nöthigen Vorbestimmungen durchgeführt sind.

Jede Versuchsreihe dauerte im Minimum vier Stunden, da das Anwärmen des Thermometergefässes nur langsam geschehen durfte, um ein Springen desselben zu verhindern. Die Stellung des Gashahnes wurde immer so gewählt, dass bei der Temperatur, bei welcher man beobachten wollte, dieselbe stationär wurde; erst nachher wurde dann mehr Gas zugelassen, um wieder bei der nächst höheren Beobachtungs-

1) Schneebei, Arch. d. scienc. phys. et nat. 8. p. 244. 1882.

temperatur stationären Zustand zu erhalten. Stets wurde jedoch bemerkt, und zwar besonders bei sehr hohen Temperaturen, dass vom Momente an, wo behufs Bestrahlung die Klappe in der Röhre weggezogen wurde, der Druck im Manometer, d. h. die Temperatur ein wenig sank. Es ist dies eine Fehlerquelle, die sich nie vollständig wird vermeiden lassen und leider der Genauigkeit der Beobachtungen eine frühe Grenze setzt.

Ich gebe in der folgenden Tabelle die Resultate einer gut verlaufenen Versuchsreihe:

T	397	586	719	854	1007°
S	19,0	108	247	481 ¹⁾	960 ¹⁾
$(T^4 - T_0^4)/S$	9,2	10,2	10,5	10,9	10,6

und füge gleich bei, dass es mir gelang, noch höhere Temperaturgrade zu erreichen, z. B. in der folgenden:

T	871	1013	1097	1177°
S	80,0	146	201	260
$(T^4 - T_0^4)/S$	71,0	71,6	71,5	73,5.

Bei diesen höheren Temperaturen aber wurden die damals benutzten Thermometergefässe durch Zerspringen gefährdet, und bald war ich durch Mangel an Gefässen gezwungen, die Versuche einzustellen.

Aus den obigen Tabellen könnte man aus je zwei Beobachtungen die Constanten A und B nach den Formeln berechnen:

$$A = \frac{S_1 - S_2}{T_1^4 - T_2^4}; \quad B = \frac{S_1 T_2^4 - S_2 T_1^4}{T_0^4 (T_1^4 - T_2^4)}.$$

Es wird aber besonders für höhere Temperaturen der Zähler von B so klein, dass schon kleine Ungenauigkeiten in der Bestimmung von S und T ganz absurde Werthe für B liefern. Uebrigens ist das Glied BT_0^4 gegenüber AT^4 für hohe Temperaturen sehr klein, und habe ich deshalb der Einfachheit wegen $A = B$ gesetzt. Die Werthe:

$$\frac{T^4 - T_0^4}{S}$$

zeigen wenigstens für die höheren Temperaturen eine ganz annehmbare Uebereinstimmung, sodass wir zu dem Schlusse

1) Sind reducirte Zahlen, indem für diese Temperaturen die Empfindlichkeit des Galvanometers vermindert worden war.

berechtigt sind: Die Annahme, es sei die Strahlung proportional der vierten Potenz der absoluten Temperatur des strahlenden Körpers, entspricht mit grosser Annäherung der Wirklichkeit. Unsere Versuche umfassen das weite Temperaturintervall von ca. $T = 400^{\circ}$ bis $T = 1200^{\circ}$.

III. Untersuchung der Strahlung einer Swan'schen Incandescenzlampe bei verschiedenen Temperaturen.

Im weiteren wurde die Strahlung einer kleinen Swanlampe (Widerstand kalt 80 Ohms) untersucht, welche man durch verschiedene Stromstärken von anfangs Rothgluth bis zum Weissglühen erhitze. Die angewandten Ströme kamen von einer Gramme'schen Maschine und wurden mit Hülfe der Differentialbussole für starke Ströme gemessen, wie selbe in unserem Institute gebaut und von Dr. Denzler¹⁾ beschrieben worden ist. Die Ablesungen geschahen bei dieser Bussole ebenfalls mit Hülfe von Spiegel, Scala und Fernrohr. Die in der folgenden Tabelle angeführten Zahlen geben die abgelesenen Ablenkungen, also die relative Intensität des angewandten Stromes.

Zu gleicher Zeit wurde mit Hülfe des Bunsen'schen Photometers die Lichtstärke der Lampe bei den verschiedenen Stromstärken bestimmt. Man erhielt so folgende Tabellen:

I. Reihe.

Stromstärke	Gesamtstrahlung	Optische Strahlung in Kerzen
44,5	87,0	0,12
48,8	97,0	0,25
57,0	158	0,70
67,0	195	1,85
75,0	250	5,4
88,2	348	17,5

II. Reihe.

Stromstärke	Gesamtstrahlung	Optische Strahlung in Kerzen
48,0	102,0	0,3
76,2	254,0	5,5
94,2	392,0	24,0

1) Denzler, La lumière électrique, 15. April 1882.

Die beiden Reihen zeigen sehr hübsch, wie mit steigender Temperatur die Lichtemission in enormer Weise wächst.

Zwischen Stromstärke und Gesamtmission erhält man eine einfache Beziehung durch folgende Ueberlegung. Der thermische Gleichgewichtszustand der Lampe ist für jede Stromstärke dadurch definirt, dass die durch den Strom in der Lampe erzeugte Wärmemenge gleich ist der nach aussen abgegebenen. Es besteht daher für jede Stromstärke J folgende Gleichung: $J^2 W = C \cdot S$, wenn bedeutet:

W den Widerstand des Kohlenbügels bei der betreffenden Temperatur,

S die von der Lampe ausgesandte Strahlungsenergie und C eine Constante.

Aus obiger Gleichung ergibt sich:

$$\frac{J^2 W}{S} = C.$$

Würde W , der Widerstand des Kohlenbügels, für die hier in Betracht fallenden hohen Temperaturen (ca. 900—1500°) constant, so müsste der Quotient:

$$\frac{J^2}{S} = \text{constant}$$

werden.

In der That erhält man für diesen Quotienten folgende Werthe für die beistehenden Stromstärken:

J	44,5	48,8	57,0	67,0	75,0	88,2	48,0	76,2	94,2
J^2/S	22,8	24,5	20,7	23,0	22,5	22,4	22,6	22,8	22,6.

Die Abweichungen, wie sie bei zwei Versuchen vorkommen, sind Stromschwankungen zuzuschreiben, die während der Beobachtung der Gesamtstrahlung eintraten. Aus der Tabelle geht also hervor, dass in der That der Widerstand des Kohlenbügels von anfangs Rothgluth bis zum Weissglühen von der Temperatur sozusagen unabhängig ist. Dasselbe scheint der Fall zu sein für den Absorptionscoefficienten der Glasglocke der Lampe. Es sei bei dieser Gelegenheit noch bemerkt, dass die gewöhnliche amorphe Holzkohle im allgemeinen ein ebenso schlechter Electricitätsleiter ist, als z. B. Paraffin, bei Glühhitze aber ein sehr guter Leiter der Electricität wird.

IX. Ueber Construction des Bohnenberger'schen Reversionspendels zur Bestimmung der Pendellänge für eine bestimmte Schwingungsdauer im Verhältniss zu einem gegebenen Längenmaass¹⁾; von Wilhelm Weber.

(Aus den Sitzungsber. d. k. Sächs. Ges. d. Wiss. vom 29. Jan. 1883 mitgetheilt vom Herrn Verf.)

Ausser Entfernungsmessungen auf der Erdoberfläche, welche für die Erdbewohner die wichtigsten sind, gibt es noch viele andere, fast ebenso wichtige Längenmessungen, von denen die Pendelmessungen besonders hervorgehoben zu werden pflegen. Man versteht darunter die Messungen der an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche verschiedenen Secundenpendellänge.

Diese Secundenpendellänge (für einen bestimmten Punkt der Erdoberfläche) ist sogar selbst, statt des Meters oder der Seemeile, zum Längenmaasse vorgeschlagen und empfohlen worden.

Ein über die ganze Erdoberfläche sich erstreckendes System von Pendellängenmessungen ist aber niemals wirklich ausgeführt worden, und nur selten ist ein wirkliches Secundenpendel an irgend einem Orte hergestellt und seine Länge genau gemessen worden; vielmehr pflegt nur ein Pendel von unveränderlicher Länge an verschiedene Stellen der Erdoberfläche versetzt und seine Schwingungsdauer überall beobachtet zu werden, die, wenn sie auch an einem Orte genau eine Secunde beträgt, an den meisten anderen Orten der Erdoberfläche mehr oder weniger davon verschieden ist. Es handelte sich also bei diesen Pendelmessungen an verschiedenen Stellen der Erdoberfläche wesentlich um Messung verschiedener Schwingungsdauern bei gleicher Pendellänge, nicht um verschiedene Pendellängen bei gleicher Schwingungsdauer.

Was aber die einzige hiernach zu messende Pendellänge betrifft, so kommt, genau genommen, nichts darauf an, dass sie selbst unmittelbar messbar sei, sondern nur darauf, dass sie zu einer an einem physischen Pendel (dessen Schwin-

gungsdauer beobachtet worden ist) recht genau messbaren Länge in bekanntem Verhältnisse stehe.

Es ist nun zu diesen Messungen vorzugsweise das Bohnenberger'sche Reversionspendel nach Kater's Construction gebraucht worden, woran zwei parallele Schneiden sich befinden, welche abwechselnd als Drehungsachsen dienen, deren zu messender Abstand die Pendellänge für die beobachtete Schwingungsdauer darstellt, wenn letztere für beide Schneiden als Drehungsachsen gleich gefunden worden ist. Doch hat Bessel gegen diese Benutzung des Schneidenabstandes zur Bestimmung der Pendellänge gewichtige Bedenken erhoben.

Theorie des Bohnenberger'schen Reversionspendels.

Aus der Theorie des physischen Pendels ist bekannt, dass das Verhältniss der Directionskraft zum Trägheitsmoment gleich dem Verhältniss von $\pi\pi$ zum Quadrat der Schwingungsdauer ist, d. i.:

$$\frac{gmx}{K} = \frac{\pi\pi}{tt},$$

wenn gm das Gewicht, K das Trägheitsmoment und t die Schwingungsdauer des Pendels, x aber den Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsaxe bezeichnet.

Für das mathematische Pendel wird x gleich der Pendellänge l und das Trägheitsmoment $K = mll$; folglich:

$$\frac{g}{l} = \frac{\pi\pi}{tt} \quad \text{oder} \quad l = \frac{g}{\pi\pi} \cdot tt.$$

Aus dieser Theorie des physischen Pendels folgt die Theorie des Reversionspendels, wenn man beachtet, dass die Differenz des wirklichen Trägheitsmomentes und desjenigen, welches dem Pendel zukommen würde, wenn seine Masse im Schwerpunkte vereinigt wäre, d. i. $K - mxx$, gleich dem Trägheitsmomente ist, welches dem Pendel zukommen würde, wenn die Drehungsaxe durch den Schwerpunkt ginge. Setzt man das letztere Drehungsmoment $= maa$, wonach:

$$K - mxx = maa,$$

so erhält man die Gleichung des physischen Pendels:

$$\frac{gmx}{maa + mxx} = \frac{\pi\pi}{tt},$$

oder, wenn darin $(g/\pi\pi)tt = l$ gesetzt wird:

$$l = x + \frac{aa}{x}.$$

Hierin sind unter l und x die Verticalabstände zu verstehen, in denen bei ruhenden Pendeln die concentrirte Masse des mathematischen Pendels und der Schwerpunkt des physischen Pendels, dem dieselbe Schwingungsdauer zukommt, unter ihren Drehungsaxen liegen. Es folgt hieraus, dass l und x in obiger Gleichung beide positiv sind, vorausgesetzt, dass dasjenige Ende des physischen Pendels, welches zum Anfangspunkt genommen wird, der oberste Punkt des Pendels ist; wollte man den untersten Punkt dazu nehmen, so müssten beide, l sowohl als x , negativ gesetzt werden.

Es ergeben sich hiernach, wenn bei gegebenem Werthe von t für x der Werth x' genügt, noch drei andere gleichfalls genügende Werthe für x , nämlich:

$$x'' = \frac{aa}{x}, \quad x''' = -\frac{aa}{x}, \quad x^{IV} = -x'. \quad \begin{array}{l} \cdot O \\ \cdot B \end{array}$$

Stellt hierneben A den Schwerpunkt des ruhenden Pendels dar, und wird $BA = x'$, $CA = x''$, $DA = x'''$ und $EA = x^{IV}$ gemacht, so ergibt sich:

$$BD = BA + AD = x' - x''' = x' + \frac{aa}{x} = l, \quad \cdot C$$

$$CE = CA + AE = x'' - x^{IV} = \frac{aa}{x} + x' = l,$$

wo B, C, D, E die vier verschiedenen Lagen der Drehungsaxe bezeichnen, für welche die Schwingungsdauer des Pendels gleich ist. \cdot A

Für die Aufgabe: „Die Länge des mathematischen Pendels für irgend eine Schwingungsdauer t eines gegebenen physischen Pendels aus Beobachtungen derjenigen Versetzungen der Drehungsaxe des physischen Pendels zu bestimmen, durch welche diese Schwingungsdauer nicht geändert wird“, ergibt sich hieraus folgende Auflösung: \cdot D

Man suche eine zweite parallele Axe in einer durch die gegebene Axe und den Schwerpunkt des Pendels gelegten Ebene, welche auf entgegengesetzter Seite vom Schwerpunkt und nicht symmetrisch zu demselben liegt, für \cdot E

welche die Schwingungsdauer gleich ist, nämlich $=t$; so ist die gesuchte Länge des mathematischen Pendels für diese Schwingungsdauer t dem Abstände dieser beiden Axen voneinander gleich.

Der Lösung dieser allgemeinen Aufgabe, nämlich die Pendellänge für irgend eine gegebene Schwingungsdauer zu bestimmen, ist nun noch die Lösung der besonderen Aufgabe hinzuzufügen, nämlich: „diejenige Schwingungsdauer t zu bestimmen, für welche die Bestimmung der Pendellänge auf die angegebene Weise die grösste Genauigkeit gestattet.“

Bei obiger allgemeinen Aufgabe war nämlich der Abstand der ersten Axe vom Schwerpunkt des Pendels nicht bestimmt, und war als beliebig anzusehen, so lange als die Schwingungsdauer t unbestimmt blieb; wird nun aber durch Lösung der besonderen Aufgabe t , und dadurch die Lage der ersten Axe bestimmt, und wird ferner durch Lösung der allgemeinen Aufgabe auch die Lage der zweiten Axe gefunden, so ist durch den Abstand beider Axen die Pendellänge vollkommen bestimmt und kann mit grösster Genauigkeit, wenn nicht durch directe Messung dieses Abstandes, durch Messung einer mit diesem Abstände in einem genau bekannten Verhältnisse stehenden Länge gefunden werden.

Es leuchtet nun aber ein, dass die Pendellänge l auf die angegebene Weise am genauesten dann müsse bestimmt werden können, wenn ein kleiner Beobachtungsfehler dt der Schwingungsdauer t des physischen Pendels den geringsten Einfluss auf die Bestimmung von l hat.

Ein solcher Beobachtungsfehler dt kann aber stattfinden erstens bei Beobachtung der Pendelschwingungen um die Axe B (wobei das zum Anfangspunkt genommene Ende O der oberste Punkt des in Ruhe befindlichen Pendels ist), und zweitens bei Beobachtung der Pendelschwingungen um die Axe D (wobei das zum Anfangspunkt genommene Ende O der unterste Punkt des in Ruhe befindlichen Pendels ist). Für den Fehler dt ist der Einfluss auf die Bestimmung von $l = x' - x''$ im ersteren Falle $= (dx'/dt)dt$, im letzteren Falle $= -(dx''/dt)dt$.

Beachtet man, dass in beiden Fällen gleiche Fehler, und in jedem der beiden Fälle positive und negative Fehler gleich wahrscheinlich sind, so ergibt sich, dass der Einfluss dieser Fehler auf die Bestimmung der Pendellänge l der Wahrscheinlichkeit nach am geringsten sei, wenn die Summe $(dx'/dt)^2 + (dx''/dt)^2$ ein Minimum ist.

Für $x = x'$ (wo x' positiv sein soll und folglich auch l) haben wir nun folgende Gleichung:

$$l = \frac{aa}{x'} + x' = \frac{g}{\pi\pi} tt,$$

woraus durch Differentiation erhalten wird:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{2g}{\pi\pi} t \cdot \frac{x'x' - aa}{x'x' - aa}.$$

Für $x = x''' = -aa/x'$ (wo, wenn x' wiederum positiv sein soll, l negativ zu setzen, oder $-l$ für $+l$ zu schreiben ist) wird ebenso folgende Gleichung erhalten:

$$-l = \frac{aa}{x'''} + x''' = -\frac{g}{\pi\pi} tt,$$

woraus sich durch Differentiation ergibt:

$$\frac{dx'''}{dt} = -\frac{2g}{\pi\pi} t \cdot \frac{x'''x''' - aa}{x'''x''' - aa},$$

oder, weil $x''' = -aa/x'$ ist:

$$\frac{dx'''}{dt} = -\frac{2g}{\pi\pi} t \cdot \frac{a^4}{a^4 - aa x'x'}.$$

Substituirt man nun in obiger Gleichung:

$$\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx'''}{dt}\right)^2 = \text{Minimum},$$

die soeben für dx'/dt und dx'''/dt gefundenen Werthe, so erhält man:

$$\frac{4g^2 t^2}{\pi^4} \left(\left(\frac{x'x'}{x'x' - aa} \right)^2 + \left(\frac{a^4}{a^4 - aa x'x'} \right)^2 \right) = \text{Minimum},$$

oder, weil $4g/\pi\pi$ ein constanter Factor, und:

$$\frac{gt}{\pi\pi} = l = x' + \frac{aa}{x'} \text{ ist,}$$

$$\left(x' + \frac{aa}{x'} \right) \left(\frac{x'^4 + a^4}{(x'x' - aa)^2} \right) = \text{Minimum}.$$

Setzt man $x'x'/aa = z$, so erhält man:

$$\frac{(z+1)(z+1)}{(z-1)^2 \sqrt{z}} = \text{Minimum}$$

und hieraus die Gleichung:

$$z^4 + 1 = 6z(z^2 + z + 1).$$

Diese Gleichung hat zwei reelle Wurzeln, nämlich:

$$z = 6,97984 \text{ und } z = \frac{1}{6,97984},$$

und zwei imaginäre Wurzeln, nämlich:

$$z = -0,561555 \pm 0,83346 \cdot \sqrt{-1}.$$

Da $z = x'x'/aa$ war, so ergeben sich vier reelle Werthe für x'/a , nämlich:

$$\begin{aligned} \frac{x'}{a} &= +2,64194, & \frac{x''}{a} &= +0,37851, \\ \frac{x'''}{a} &= -0,37851, & \frac{x^{IV}}{a} &= -2,64194, \end{aligned}$$

folglich:

$$l = x' - x''' = x'' - x^{IV} = 3,02045 a = \frac{g}{\pi n} t t$$

und:

$$t = \pi \sqrt{3,02045 \cdot \frac{a}{g}},$$

d. i. diejenige Schwingungsdauer, für welche die Pendellänge l am genauesten bestimmbar ist.

Bei einem langen, homogenen und genau cylindrischen Stabe kann der Werth von a , welcher von der Länge und dem Halbmesser des Stabes abhängt, als bekannt vorausgesetzt werden. Bezeichnet man nämlich mit ρ die Dichtigkeit, mit r den Halbmesser und mit x den Abstand eines kreisscheibenförmigen Elementes von der Stabmitte, und bezeichnet man ferner mit α den Winkel, welchen irgend ein Radius der Scheibe mit ihrem der Schwingungsaxe parallelen Durchmesser bildet; so lassen sich für jeden Werth von α alle in gleicher Entfernung von jenem Durchmesser, nämlich in der Entfernung $r \sin \alpha$ liegenden Scheibenpunkte, die zusammen zwei Sehnen des Kreises bilden und die Länge $= 4r \cos \alpha$ besitzen, von den übrigen unterscheiden. Bezeichnet x die Entfernung des Scheibendurchmessers von den damit parallelen, durch den Schwerpunkt des Stabes gehenden Durchmesser, so ist der Abstand aller jener Sehnenpunkte von diesem letzteren Durchmesser $= \sqrt{(x^2 + r^2 \sin^2 \alpha)}$.

Legt man jenen beiden Sehnen einen kleinen Querschnitt $= r \cos \alpha \cdot d\alpha dx$ bei, so wird der ihnen entsprechende Theil der Grösse maa ausgedrückt durch $4\rho r^2 \cos \alpha^2 \cdot (x^2 + r^2 \sin \alpha^2) d\alpha dx$, wo ρ die Dichtigkeit der Stabmasse bezeichnet; der dem ganzen Querschnitt entsprechende Theil ist:

$$= 4\rho r^2 dx \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (x^2 + r^2 \sin \alpha^2) \cos \alpha^2 d\alpha,$$

und der dem ganzen Stabe entsprechende Werth von:

$$maa = 8\rho r^2 \int_0^{\frac{1}{2}L} dx \int_0^{2\pi} (x^2 + r^2 \sin \alpha^2) \cos \alpha^2 d\alpha.$$

Nun ist $\int_0^{2\pi} (x^2 + r^2 \sin \alpha^2) \cos \alpha^2 d\alpha =$

$$= x^2 \int_0^{2\pi} \cos \alpha^2 d\alpha + \frac{1}{2} r^2 \int_0^{2\pi} (\sin 2\alpha)^2 d(2\alpha) = \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi r^2}{16};$$

folglich:

$$maa = 8\rho r^2 \int_0^{\frac{1}{2}L} \left(\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi r^2}{16} \right) dx = \pi \rho r^2 L \left(\frac{1}{12} L^2 + \frac{1}{4} r^2 \right).$$

Nun ist $m = \pi \rho r^2 L$, folglich:

$$aa = \frac{1}{12} L^2 + \frac{1}{4} r^2,$$

wo L die ganze Stablänge bezeichnet.

Es geht hieraus hervor, dass, unter Voraussetzung eines im Verhältniss zu seiner Dicke r sehr langen, genau cylindrischen und homogenen Stabes L (wobei der kleine Bruch r/L ebenfalls genau bestimmbar sei), der Werth von a nahezu mit gleicher Genauigkeit wie der Werth von L bestimmbar sein werde.

Nun ist aber oben gefunden worden, dass a zur Pendellänge l in einem genau bestimmten Verhältnisse stehe, nämlich:

$$a:l = 1:3,02045;$$

also folgt hieraus, dass auch die Stablänge L (von der vorausgesetzt werden darf, dass sie entweder selbst als Originalmaassstab à bout gegeben, oder mit einem solchen aufs genaueste verglichen worden sei) mit der Pendellänge l in einem ganz bestimmten Verhältniss stehe, nämlich nach

obiger Gleichung, wenn darin für a sein Werth aus folgender Gleichung gesetzt wird:

$$aa = \frac{1}{12} L^2 + \frac{1}{4} r^2.$$

Mit l ist aber die der Schwingungsdauer t , nach der Gleichung $(g/\pi\pi)tt = l$, entsprechende Pendellänge bezeichnet worden, wo t , wie oben gezeigt worden ist, aus Schwingungsbeobachtungen des Stabes L sehr genau gefunden werden kann.

Ist also t aus den mit dem Stabe L , dessen Länge genau gegeben und bekannt ist, gemachten, oben beschriebenen Schwingungsbeobachtungen bestimmt worden, und kann ferner a aus L (unter Hinzufügung einer kleinen, von r abhängigen Correction) sehr genau bestimmt werden, nämlich aus der Gleichung $aa = \frac{1}{12} L^2 + \frac{1}{4} r^2$, und ist endlich $l = 3,02045 \cdot a$ gegeben; so ist der Zweck der Pendelmessung vollkommen erreicht, ohne dass es dazu einer directen Messung von l , d. i. der Entfernungen der an L angebrachten Schwingungsaxen x' von x''' oder x'' von x^{IV} bedürfte, welche, wie Bessel gezeigt hat, keiner genauen Bestimmung überhaupt fähig ist.

Die an dem Stabe L anzubringenden vier Schwingungsaxen x' , x'' , x''' und x^{IV} sollen hiernach nur noch dazu dienen, die Schwingungsdauer t zu bestimmen. Es ist aber dabei zu bemerken, dass zwei von diesen Schwingungsaxen, nämlich x' und x^{IV} , an einem homogenen cylindrischen Stabe L , wie hier angenommen worden ist, gar nicht angebracht werden können. Die mit x' und x^{IV} bezeichneten Entfernungen dieser beiden Axen vom Schwerpunkte, d. i. von der Mitte des Stabes L , sind nämlich bestimmt worden:

$$x' = + 2,64194 \cdot a \qquad x^{IV} = - 2,64194 \cdot a$$

das ist, wenn r/L ein sehr kleiner Bruch ist, nahezu:

$$x' = + 0,7627 \cdot L \qquad x^{IV} = - 0,7627 \cdot L,$$

d. h. diese beiden Axen liegen in den Verlängerungen des Stabes nach beiden Seiten um mehr als den vierten Theil der ganzen Stablänge von den Stabenden entfernt.

Da solche Axen, ohne feste Verbindung mit L , nicht existiren können, so bleiben nur die Axen x'' und x''' übrig, die sich wirklich darstellen lassen, und deren jede zu Beobachtungen der Schwingungsdauer t benutzt werden kann.

Es geht daraus also hervor, dass, wenn ein homogener

cylindrischer Stab zum Pendel darum benutzt werden soll, weil durch seine Länge und Dicke eine genaue Kenntniss von der Grösse a gewonnen werde, andererseits mit dieser Benutzung der Nachtheil verbunden zu sein scheint, dass die Bohnenberger'sche Methode (mit Einschluss der oben angegebenen Lagenbestimmung der vier Schwingungsaxen) illusorisch werden würde, insofern nämlich zwei von jenen vier Axen an einem solchen Stabe gar nicht angebracht werden könnten (sie würden nämlich nach obiger Lagenbestimmung ausserhalb der Grenzen des Stabes liegen), und die beiden anderen allein zur Bestimmung der Pendellänge nicht genügen würden.

Da nun aber, wie gezeigt worden ist, die gesuchte Pendellänge l bei einem homogenen cylindrischen Stabe, unabhängig von Axen und Schwingungsbeobachtungen, aus der Stablänge und Dicke sehr genau bestimmt werden kann; so sind Schwingungsbeobachtungen nur zur Bestimmung der Schwingungsdauer t erforderlich, wozu jede von den angegebenen vier Axen dienen kann, und es ist dabei gleichgültig, ob eine gleiche Zahl von Schwingungsbeobachtungen mit gleicher Genauigkeit alle an einer Axe oder an mehreren Axen vertheilt ausgeführt werden. Es bedarf also dazu der Axen x' und x^{IV} gar nicht, und es genügen dazu vollkommen die beiden Axen x'' und x''' .

Es bleibt noch übrig, an einem solchen homogenen und cylindrischen Stabe die beiden Axen x'' und x''' so anzubringen, dass dadurch der Genauigkeit der Bestimmung der Grösse a (aus Stablänge und Dicke) kein Eintrag geschieht. Es soll vorausgesetzt werden, dass die Axe von der Kante eines gehärteten, feingeschliffenen und polirten Stahlprismas gebildet wird. Soll der Stab an der Stelle der Axe nicht quer durchbohrt werden, um das Prisma durch den Stab hindurchzuführen; so kann das Prisma mit zwei Stahlspitzen vertauscht werden, welche symmetrisch zu beiden Seiten des Stabes so befestigt werden, dass eine durch die beiden Spitzen gezogene Gerade genau die Stelle der Axe einnimmt. Unter der abwärts gekehrten Prismenkante oder unter den beiden Stahlspitzen werden zu beiden Seiten des Stabes auf festem

Fundamente polirte Stahl- oder Achatplatten befestigt, deren Oberflächen genau in derselben Horizontalebene liegen müssen.

Bei Stäben von grösserem Gewichte verdient das Prisma als Axe den Vorzug, und wenn dieses Prisma quer durch den Stab hindurchgeführt werden soll, wozu der Stab durchbohrt werden muss, so steht es frei, entweder das Prisma mit dem Stabe fest zu verbinden und mit den ausserhalb des Stabes liegenden beiden Enden seiner nach unten gekehrten Kante auf die von polirtem Stahle oder von Achatplatten gebildete feste horizontale Unterlage zu stellen, oder es steht frei, die cylindrische Durchbohrung des Stabes (zumal wenn der Stab selbst aus feinem, gezogenem Stahle besteht) fein auszupoliren, sodann das Stahlprisma frei durch diese Durchbohrung durchzuführen, seine zur Axe bestimmte Kante nach oben zu kehren und horizontal gerichtet an seinen Enden ausserhalb des Stabes zu befestigen, was den Vorzug hat, dass dadurch am Stabe selbst am wenigsten geändert wird und der Genauigkeit der Bestimmung der Grösse a (nämlich aus der Länge und Dicke des Stabes) kein merklicher Eintrag geschieht. Nur muss erstens mit grösster Genauigkeit die Horizontalität der cylindrischen Durchbohrung, bei senkrechter Stellung des Stabes, hergestellt werden, zweitens im Fall von zwei Durchbohrungen, nämlich für die Axen x'' und x''' , muss genauer Parallelismus derselben hergestellt werden, und drittens muss die Cylinderoberfläche der Durchbohrung so zu liegen kommen, dass sie die Axe x'' oder x''' enthalte, indem diese Axe mit derjenigen auf der Cylinderfläche mit der Cylinderaxe parallel gezogenen Linie zusammenfällt, welche von dem Schwerpunkt des Stabes am entferntesten ist.

Es wird hierdurch am Stabe sonst gar nichts geändert, als durch Wegnahme des Stahles aus dem Raume der beiden Durchbohrungen, an den Axen x'' und x''' . Ein kleiner Planspiegel mit einem in die Durchbohrung passenden Holzzapfen, welcher das Gewicht des die Durchbohrung füllenden Stahles besässe, würde sich leicht herstellen lassen und dazu dienen können, bei den Schwingungsbeobachtungen allemal in die offen bleibende Durchbohrung gesteckt zu werden, wodurch

das durch die Durchbohrung veränderte Trägheitsmoment des schwingenden Stabes wieder hergestellt und zugleich die Beobachtung der Schwingungen im Spiegelbilde einer entfernten Scala ermöglicht werden würde.

Was die Herstellung eines cylindrischen Stabes, wie hierzu erfordert wird, betrifft, so kann dieselbe in grösster Vollkommenheit nach bekannter Methode bewerkstelligt werden, indem nämlich, während der Stab um seine Längsaxe gedreht wird, ein Stück desselben von einer aus zwei mit halbcylindrischen Vertiefungen gebildeten Kapsel umschlossen wird, welche, nachdem feiner Schmirgel zwischen die halbcylindrischen Capselwände und die Staboberfläche gebracht worden ist, an dem sich drehenden Stabe schnell hin und her geschoben wird.

X. Ueber das Gleichgewicht schwimmender elastischer Platten; von H. Hertz.

Auf einer unendlich ausgedehnten schweren Flüssigkeit, z. B. auf einer Wasserfläche, schwimme eine ebenfalls unendlich ausgedehnte elastische Platte, z. B. von Eis; auf der letzteren mögen eine Reihe von Gewichten ruhen, ohne dass eine seitliche Spannung stattfindet, es wird die Gleichgewichtslage der Platte gesucht. Die Lösung dieser Aufgabe führt zu gewissen paradoxen Resultaten, um derentwillen sie mitgetheilt werden möge.

Beschränken wir uns auf kleine Verschiebungen, so superponiren sich die Wirkungen der Gewichte, und es genügt, wenn wir ein einzelnes Gewicht P in Betracht ziehen. Wir denken uns dasselbe wirkend im Nullpunkte des Coordinatensystems der xy , deren Ebene mit der als unendlich dünn angesehenen Platte zusammenfallen möge. Wir setzen ferner $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 = \Delta$, $x^2 + y^2 = \varrho^2$, bezeichnen mit E und μ in üblicher Weise die elastischen Constanten des Materials der Platte, mit h ihre Dicke und nennen s das specifische Gewicht der Flüssigkeit. Ist dann

noch z die verticale Abweichung der deformirten Platte von der xy -Ebene, positiv gerechnet nach unten, so ist einerseits $(Eh^3/12(1-\mu^2)) \Delta \Delta z$ gleich dem von den elastischen Kräften auf die Flächeneinheit nach oben hin ausgeübten Schube¹⁾, andererseits ist der ebenfalls nach oben gerichtete hydrostatische Auftrieb per Flächeneinheit gleich sz . Die Summe beider Kräfte muss Null sein überall ausser im Nullpunkte. Hier muss der Integralwerth der Summe genommen über eine sehr kleine Fläche gleich sein dem Gewichte P . Da aber der Integralwerth des hydrostatischen Druckes über eine solche Fläche verschwindet, so muss schon der Integralwerth der elastischen Reaction für sich dieser Bedingung genügen. Setzen wir nun noch zur Abkürzung:

$$\frac{12(1-\mu^2)s}{Eh^3} = \alpha^4 = 1/\alpha^4,$$

so formulirt sich demnach unsere Aufgabe mathematisch dahin: Es ist ein Integral der Gleichung $\Delta \Delta z + \alpha^4 z = 0$ zu finden, von solcher Beschaffenheit, dass es verschwinde im Unendlichen, endlich sei im Mittelpunkte, und dass das über die Nachbarschaft des Mittelpunktes ausgedehnte Integral $s\alpha^4 \int \Delta \Delta z dw$ gleich P werde.

Wir setzen mit Heine²⁾:

$$K_{(\rho)} = \int_0^\infty e^{i\rho \cos iu} du,$$

dann ist $K_{(\rho)}$ eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta z = -z$, daher ist $K(\rho \sqrt{1-\alpha^4})$ eine Lösung der uns vorgelegten Gleichung. Es ist demnach auch:

$$(1) \quad z = \frac{\alpha^2 P}{4\pi s i} \left\{ K[a\rho \sqrt{\frac{1}{2}}(1+i)] - K[a\rho \sqrt{\frac{1}{2}}(1-i)] \right\},$$

eine Lösung dieser Gleichung. Dieselbe ist reel, bringt man sie auch in reelle Form, so erhält man nach einer Umformung des Integrals:

$$(2) \quad z = \frac{\alpha^2 P}{4\pi s} \int_1^\infty \frac{e^{-\alpha\rho \sqrt{v^2-1}} \sin \alpha\rho \sqrt{\frac{1}{2}} v dv}{\sqrt{v^2-1}},$$

1) Clebsch, Theorie d. Elasticität, 1862. § 73.

2) Heine, Handb. d. Kugelfunctionen, 1. p. 192. 1878.

welche Form zeigt, dass die angenommene Lösung im Unendlichen verschwindet. Um ihre Werthe in der Nähe des Nullpunktes zu untersuchen, benutzt man eine von Hrn. H. Weber angegebene Entwicklung¹⁾ der Funktion K , zunächst nach Bessel'schen Functionen, dann weiter nach Potenzen, und erhält so:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} z = & \frac{a^2 P}{2\pi s} \left\{ \frac{a^2 \varrho^2}{2 \cdot 2} \log a \varrho - \frac{a^6 \varrho^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} (\log a \varrho - \frac{3}{8}) + \dots \right. \\ & + \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{a^4 \varrho^4}{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{a^8 \varrho^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} - \dots \right) \\ & \left. - (1 + \log 2 - C) \left(\frac{a^2 \varrho^2}{2 \cdot 2} - \frac{a^6 \varrho^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

C ist gleich 0,57721. Die Reihen sind so geordnet, dass jede Horizontalreihe für sich ein particuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung darstellt. Es ist aus dieser Form ersichtlich, dass z endlich bleibt für $\varrho = 0$, ferner wird das über eine kleine Kreisfläche um den Mittelpunkt erstreckte Integral:

$$\int \Delta \Delta z dw = 2\pi \int \varrho \Delta \Delta z d\varrho = 2\pi \lim \left(\varrho \frac{\partial \Delta z}{\partial \varrho} \right)_0 = \frac{a^4}{s} P.$$

Danach ist das in Betracht genommene Integral das gesuchte, zugleich haben wir in der Form (3) eine Darstellung gewonnen, welche zur numerischen Berechnung von z für kleine Werthe von ϱ geeignet ist. Für grosse Werthe benutzt man eine semiconvergente Reihe, welche man aus (2) durch Entwicklung der Wurzel und Integration der Glieder erhält, und deren Anfang ist:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} z = & \frac{a^2 P}{2\pi s} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a\varrho\sqrt{1/2}}}{\sqrt{a\varrho}} \left\{ \sin \left(a\varrho \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{8} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{8\varrho} \sin \left(a\varrho \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{3\pi}{8} \right) + \dots \right\}. \end{aligned} \right.$$

Noch in einigen weiteren Formen lässt sich die Lösung darstellen. Wir wollen die obigen durch die folgenden Bemerkungen interpretiren.

1) l. c. p. 244. Bei der Angabe des Werthes von C findet sich hier ein irrthümliches Vorzeichen.

1. An der Stelle, an welcher das Gewicht aufgelegt ist, erreicht die Einsenkung der Platte den grössten Werth. $z = z_0 = a^2 P / 8s$. Die Platte steigt von da nach allen Richtungen erst langsam, dann schnell, dann wieder langsam gegen das Niveau 0 an, in der Entfernung $\rho = a$ ist $z = 0,646 z_0$, für $\rho = 2a$ ist $z = 0,258 z_0$, für $\rho = 3a$ ist $z = 0,066 z_0$. Nahezu in der Entfernung $\rho = \frac{7}{8} \pi \sqrt{2} a = 3,887 a$ wechselt z sein Zeichen, und es erscheint also die Platte nach aussen zu wulstartig gehoben um den Depressionspunkt. Auffällig aber muss es erscheinen, dass, wenn wir uns nun weiter vom Mittelpunkt entfernen, beständig mit der Periode $\pi \sqrt{2} a$ sich Hebungen und Senkungen folgen. Es wird die Platte in ein vollständiges System kreisrunder Wellen verworfen, allerdings nimmt die Höhe dieser Wellen nach aussen so schnell ab, dass es nicht wunderbar erscheint, wenn man dieselben ohne besondere Vorkehrungen nicht wahrnehmen kann. Die Grösse a , welche für das Wellensystem charakteristisch ist, ist eine Länge. Berechnen wir dieselbe für den Fall, dass Eis auf Wasser schwimmt, so haben wir $s = 10^{-6}$ kg/cmm. μ können wir ohne Schaden gleich $\frac{1}{4}$ annehmen, E haben wir nach einer Angabe von Hrn. Reusch¹⁾ gleich 236 kg/qmm zu setzen, und so erhalten wir für verschiedene Dicken h :

$h =$	10	20	50	100	200 mm
$a =$	0,38	0,64	1,27	2,14	3,60 m,

woraus sich dann leicht die von 100 kg veranlasste Einsenkung ergibt:

$$z_0 = 86,4 \quad 30,5 \quad 7,72 \quad 2,73 \quad 0,96 \text{ mm.}$$

2. Die Beanspruchung, welche die Platte erfährt, hängt ab von den zweiten Differentialquotienten von z nach x und y : sie wird daher unendlich im Nullpunkt. Dies zeigt an, dass die grösste Beanspruchung nicht gefunden werden kann ohne eine Kenntniss von der Vertheilung des Gewichts. Wir wollen die Maximalspannung berechnen für den einfachen Fall, dass die Belastung P gleichmässig das Innere einer Kreisfläche vom Radius R erfüllt, wo R klein sein soll gegen a . Zu dem Ende berechnen wir Δz_0 für den Mittel-

1) Reusch, Wied. Ann. 9. p. 329. 1880.

punkt. Nennen wir ϱ den Abstand vom Mittelpunkt, in welchem das Element dP des Gewichts aufliegt, so ist derjenige Theil von Δz_0 , welcher von diesem Element herrührt, nach Gleichung (3) gleich $a^4 dP / 2\pi s (\log a\varrho - \log 2 + C)$. Vernachlässigt sind die Glieder, welche verschwinden mit ϱ . Eine einfache Integration ergibt uns nun:

$$\begin{aligned}\Delta z_0 &= 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{a^4 P}{2\pi s} \{ \log aR - \frac{1}{2} - \log 2 + C \} \\ &= \frac{a^4 P}{2\pi s} \{ \log aR - 0,6519 \}.\end{aligned}$$

Die Maximalspannung im Mittelpunkt der gekrümmten Platte ist nun $p = (Eh/2) \partial^2 z / \partial x^2$, bilden wir p und setzen für a^4 seinen Werth ein, so folgt:

$$p = \frac{3(1-\mu^2)P}{2\pi h^2} \{ \log aR - 0,6519 \}.$$

Es wäre verkehrt, wollte man diese Formel auch dann noch anwenden, wenn R abnimmt bis zur Ordnung der Dicke der Platte oder zu noch kleineren Werthen. Es wird sich nämlich in diesem Falle der Druck im Inneren der Platte immer noch vertheilen auf eine Kreisfläche, deren Durchmesser angenähert der Dicke der Platte gleichkommt. Angenähert also können wir den Fall, dass das Gewicht soviel wie möglich in einen Punkt concentrirt ist, dadurch repräsentiren, dass wir R in der vorigen Formel gleich $h/2$ setzen, wir erhalten so für die Maximalspannung, der das Gewicht P die Platte überhaupt aussetzen kann:

$$p = \frac{3(1-\mu^2)P}{2\pi h^2} \left\{ \log \frac{h}{a} - 1,3090 \right\}.$$

Beispielsweise ergibt sich für unsere eben betrachteten Eisplatten bei 100 kg Belastung, resp.

$$p = 221, \quad 53, \quad 8,1, \quad 1,9, \quad 0,47 \text{ kg/qcm.}$$

Die Platte von 100 mm Dicke würde das Gewicht sicher ertragen, diejenige von 50 mm Dicke vermuthlich nicht mehr.

3. Der Auftrieb, den das Wasser auf die Platte infolge von deren Deformation ausübt, ist gleich:

$$2\pi \int_0^x s z \varrho d\varrho = - \frac{2\pi s}{a^4} \int_0^x \Delta z \varrho d\varrho = -P;$$

er ist also gleich dem belastenden Gewichte. Wie gross also auch das Gewicht, es wird immer getragen; auf den Auftrieb, welchen die ebene unbelastete Platte erfährt, kommt es nicht an. Legt man eine nicht zu kleine runde Scheibe steifen Papiers aufs Wasser, so kann man die Mitte derselben mit mehreren hundert Gramm belasten, während doch der Auftrieb des Papiere kaum einige Gramm beträgt. Schwimmt also ein Mensch auf einer ausgedehnten Eisplatte, so ist es, genau genommen, correcter, zu sagen, er schwimme, weil er das Eis durch sein Gewicht zu einem sehr flachen Bote gewölbt habe, als zu sagen, er schwimme, weil das Eis leicht genug sei, ihn neben dem eigenen Gewichte zu tragen. Denn er würde ebenso gut schwimmen, wenn das Eis auch gar nicht leichter wäre, als das Wasser, und wenn man statt des Menschen beliebig grosse Gewichte auf das Eis stellte, so könnten dieselben wohl einbrechen durch das Eis, niemals aber versinken mit dem Eis. Die Grenze der Belastung hängt von der Festigkeit, aber nicht von der Leichtigkeit des Eises ab. Die Sache verhält sich anders, wenn Personen oder Gewichte gleichmässig über die Fläche vertheilt sind, oder wenn der Radius der Platte nicht sehr gross, d. h. nicht ein Vielfaches von α ist.

4. Betrachtet man den letzteren Fall, d. h. den Fall endlicher Platten, näher, so kommt man zu dem oberwähnten paradoxen Resultate. Für den freien Rand der kreisrund angenommenen Platte müssen die Bedingungen¹⁾ erfüllt sein:

$$\text{a) } \Delta z - \frac{1-\mu}{\varrho} \frac{\partial z}{\partial \varrho} = 0, \quad \text{b) } \frac{\partial}{\partial \varrho} \Delta z = 0.$$

Im Mittelpunkte muss dieselbe Bedingung bestehen, wie vorher. Durch diese drei Bedingungen ist die aus den drei im Mittelpunkte endlichen Integralen der Gleichung $\Delta \Delta z + \alpha^4 z = 0$ zusammengesetzte Lösung völlig bestimmt. Jenachdem für den Rand der Platte alsdann sich z negativ oder positiv ergibt, jenachdem also der Rand über oder unter den Wasserspiegel zu liegen kommt, jenachdem schwimmt die Platte ohne weitere Vorrichtung (ohne eigenen Auftrieb).

1) Clebsch, l. c. § 73.

oder schwimmt sie nicht. Der Fall, dass am Rande c) $z = 0$ ist, bildet die Grenze. Fragen wir, unter welchen Umständen die Gleichungen a) b) c) gleichzeitig möglich sind, so werden wir auf das Verschwinden einer Determinante verwiesen, welche den Radius der Platte als Unbekannte enthält. In der That wird diese Determinante für gewisse Werthe von R gleich Null, und zwar findet man mit einiger Geduld, dass der kleinste Werth von R , für welchen dies eintritt, zwischen $2,5\alpha$ und $2,8\alpha$ liegt. Er liegt bei $2,5\alpha$, wenn $\mu = 0$, und bei $2,8\alpha$, wenn $\mu = \frac{1}{2}$ ist. Denken wir uns unsere Platte von gleichem specifischen Gewicht mit der Flüssigkeit, so wird bei jeder Belastung, solange nicht ihr Radius den obigen Werth besitzt, im Gleichgewichtszustand der Rand unter den Wasserspiegel fallen müssen, es wird daher die Platte auch nicht das kleinste Gewicht zu tragen vermögen. Erreicht der Radius genau den kritischen Werth, so fällt der Rand der Platte in die Wasserlinie, und zwar für jede Belastung, daher vermag jetzt plötzlich die Platte jedes Gewicht zu tragen, welches nicht die Elasticitätsgrenze überschreitet. Wird der Radius noch grösser, so wird am Rande jetzt z negativ, wir dürfen dann also noch ein gewisses Gewicht gleichmässig über die Platte vertheilen, ohne dass der Rand derselben tiefer als bis zum Wasserspiegel herabgedrückt würde, d. h. wir dürfen auch von vornherein die Platte etwas schwerer, als die Flüssigkeit annehmen. Denken wir uns also eine solche Platte, die an und für sich nicht schwimmen würde, in ihrer Mitte mit einem hinreichenden Gewichte belastet und nun aufs Wasser gelegt, so wird sie schwimmen; die Sicherheit des Schwimmens wird zunehmen, jemehr wir Gewichte in ihrer Mitte hinzufügen, sie wird abnehmen, wenn wir Gewichte aus der Mitte entfernen, und wenn wir hierin eine gewisse Grenze überschreiten, so wird die Möglichkeit des Schwimmens aufhören, die Platte wird versinken mit dem Reste der Gewichte.

XI. Die Electricität der Flamme. Entgegnung; von J. Kollert.

Auf die unlängst in diesen Annalen ¹⁾ erschienene Entgegnung der Herren Elster und Geitel habe ich folgendes zu erwidern.

1. Was den Sinn der Worte: „Die Längspolarisation der Flamme ist nur eine scheinbare“, anbetrifft, so habe ich denselben allerdings missverstanden. Elster und Geitel gehen nämlich von der Ansicht aus, dass den verschiedenen Querschnitten der Flamme infolge der Verbrennung an sich schon eine gewisse Electricität zukommt, und dass die eingetauchten Platindrähte nur diese bereits vorhandenen Electricitäten dem Electrometer zuführen, und weisen dann durch ihre Versuche die Unzulässigkeit dieser Annahme nach. Da indessen die Unmöglichkeit dieser Auffassung bereits durch die Hankel'schen ²⁾ Untersuchungen erwiesen war, so hatte ich obige Worte nicht in dem soeben angeführten Sinne verstanden, sondern hatte dieselben so aufgefasst, als ob damit eine Aenderung der Spannungen bei Verschiebung des Platindrahtes in der Richtung der Axe der Flamme überhaupt gänzlich in Abrede gestellt werden sollte, und hiergegen richtet sich die Bemerkung auf p. 261. ³⁾

2. Ich habe durchaus nicht, wie die Herren Elster und Geitel in ihrer Entgegnung behaupten, „stets die Brennermündung mit dem Electrometer verbunden und seitlich einen zur Erde abgeleiteten Draht in die Flamme eingeführt.“ Im Gegentheil habe ich stets, wie ich in meiner Abhandlung mehrfach betont habe ⁴⁾, unmittelbar hintereinander durch einen geeigneten Commutator sowohl den Platindraht mit der Erde und den Brenner mit dem Electrometer, als auch umgekehrt den Brenner mit der Erde und den Platindraht mit dem Electrometer verbunden. Die Verbindung mit der Erde geschah mittelst der Gasleitung. Bezeichnet man

1) Elster und Geitel, Wied. Ann. 22. p. 123. 1884.

2) Hankel, Abh. d. sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Cl. 5. p. 28. 1861.

3) Kollert, Wied. Ann. 21. p. 244. 1884.

4) l. c. p. 246. 252. 265.

nun mit α den im ersten, mit β den im zweiten Falle erhaltenen Ausschlag, bedeutet ferner F die Flamme, M die Brennermündung, pt den Platindraht, Au das Goldblättchen des Electrometers, bezeichnet endlich V einen gewissen, der betreffenden Stelle der Erde eigenthümlichen Potentialwerth, so würde α , vorausgesetzt, dass das Goldblättchen genau in der Mitte zwischen den vollkommen genau einander gleichen und zu absolut gleichen und entgegengesetzten Potentialwerthen geladenen Scheiben hänge, folgender Summe von Spannungen äquivalent sein:

$$\alpha = V + \text{feuchte Erde} | \text{Gasl.} + \text{Gasl.} | pt + pt | F + F | M + M | Au.$$

Ebenso wäre:

$$\beta = V + \text{feuchte Erde} | \text{Gasl.} + \text{Gasl.} | M + M | F + F | pt + pt | Au.$$

Es ist somit:

$$\alpha - \beta = \text{Gasl.} | pt - \text{Gasl.} | M + pt | F + F | M - F | pt - M | F + M | Au - pt | Au = 2(pt | F + F | M + M | pt) = 2[ptFM].$$

Die Differenz $\alpha - \beta$ misst also unter allen Umständen die electromotorische Kraft $[ptFM]$.

Ferner ist:

$$\alpha + \beta = 2V + 2 \text{ feuchte Erde} | \text{Gasl.} + \text{Gasl.} | pt + pt | Au + \text{Gasl.} | M + M | Au = 2(V + \text{feuchte Erde} | \text{Gasl.} + \text{Gasl.} | Au).$$

Die Summe $\alpha + \beta$ misst also unter den gemachten Voraussetzungen diejenige Spannung, welche das Goldblatt infolge der Ableitung zur Erde besitzt.¹⁾ Ist somit das Electrometer so abgeglichen, dass diese Grösse gerade durch Vertheilungswirkungen compensirt ist²⁾, so muss $\alpha + \beta = 0$, oder $\alpha = -\beta$ werden. Dies ist jedoch nur der Fall, solange die Flamme oder die sie umgebenden heissen Gase noch eine leitende Verbindung mit der Erde herzustellen vermögen, und solange dies der Fall ist, können irgend welche äussere, influenzirende Einflüsse auf das Electrometer keine Wirkung ausüben. Umgekehrt erkennt man aus der Gleich-

1) Ueber deren muthmasslichen Werth siehe Hankel: „Ueber die bei einigen Gasentwickelungen auftretenden Electricitäten.“ Abh. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Cl. 12. p. 609. 1883.

2) Ausser den auf p. 244 meiner Abhandlung citirten Stellen vergleiche hierüber auch Hankel, l. c. p. 602.

heit der entgegengesetzten Ausschläge bei richtig justirtem Electrometer, dass diese Ableitung zur Erde noch vorhanden ist.

Mit Ausnahme der in § 3 mitgetheilten Versuche bin ich stets innerhalb der Grenzen geblieben, wo die Ausschläge entgegengesetzt gleich waren.¹⁾ Diese Grenze geht indessen weit über die sichtbare Flamme hinaus und erstreckt sich auch über Gebiete, innerhalb deren der Draht *pt* nicht mehr zum Glühen kommt.²⁾

Da nun aus den zur Widerlegung meiner Ansichten von den Herren Elster und Geitel angestellten und l. c. p. 126 mitgetheilten Versuchen durch Vergleichung mit den Ergebnissen meiner Versuche über die Ausdehnung des „Wirkungsbereiches“ (wie ich das Gebiet der guten Leitungsfähigkeit kurz genannt habe)³⁾ mit grösster Wahrscheinlichkeit zu entnehmen ist, dass der Eisendraht bei ihnen sich noch innerhalb dieses Gebietes befunden hat, so geben die von ihnen mitgetheilten Zahlen einfach die electromotorische Kraft des Elementes (Eisendraht, Flammengase, Brennermündung), und die Ladung der Luft ist wegen der vorhandenen Erableitung überhaupt ohne allen Einfluss geblieben. Ich kann deshalb diese Versuche nicht als die von mir in § 3 ausgesprochenen Ansichten widerlegend anerkennen, und ich bemerke noch, dass es mir bei derartigen Versuchen unbedingt nothwendig erscheint, entweder auf dem von mir eingeschlagenen Wege oder in irgend einer anderen Weise erst zu prüfen, ob im gegebenen Falle eine Ableitung zur Erde vorhanden ist oder nicht.⁴⁾

3. Von einer Thermoelectricität in dem Sinne, dass die Flamme als „eine Löthmasse“ aufzufassen wäre, habe ich

1) Vgl. unter anderen p. 252.

2) Vgl. Fig. 7, 10 und 12 der Tafel.

3) J. Kollert, l. c. p. 254.

4) Was die in § 3 und 4 von mir mitgetheilten Versuche und Erklärungen betrifft, so habe ich dieselben selbst ausdrücklich für noch der Vervollständigung, resp. Bestätigung bedürftig erklärt, woran ich indessen bis jetzt durch äussere Umstände verhindert gewesen bin. Ich hoffe jedoch, diese Untersuchungen bald fortsetzen zu können.

nicht gesprochen, sondern habe damit nur die Verschiebung des glühenden Platins nach der positiven Seite der Spannungsreihe hin bezeichnen wollen, durch welche sich die Erscheinungen der Flammenelectricität erklären lassen.¹⁾ Ich habe es indessen p. 272 als unwahrscheinlich hingestellt, dass eine solche positive Verschiebung des Platins zur Erklärung der hohen Spannungen allein ausreichen sollte, und habe im Gegentheil vermuthet, dass der Contact mit den glühenden Gasen eine wesentliche Quelle der Electricität sein möchte, eine Vermuthung, die durch die zweite (mir bei der Abfassung meiner Arbeit nicht bekannte) Abhandlung der Herren Elster und Geitel sich bestätigt hat; dabei hatte ich angenommen, dass an den Stellen stärkster Erregung diese vielleicht freiem Wasserstoff und Kohlenoxyd als Dissociationsproducten zuzuschreiben sein möchte. Ich habe somit nur von einer Contactwirkung, nicht aber von einer „electrolytischen Erregung“ gesprochen. Ausserdem ist nach den von mir über die Electricitätsleitung durch glühende Gase ausgesprochenen Ansichten dieser Vorgang hier ein ganz wesentlich anderer, als bei den Flüssigkeiten, und hat mit einer „Electrolyse“ durchaus nichts zu thun.

Was die von den Herren Elster und Geitel entdeckte negative Erregung glühender Metalle und anderer Körper durch erhitzte Gase betrifft, deren Stärke mit der Temperatur wächst, so vereinfacht sich hierdurch die Erklärung der Spannungsmaxima in der Flamme insofern beträchtlich, als man die denselben entsprechenden Orte einfach als Temperaturmaxima zu bezeichnen hätte, ohne eine besondere Beschaffenheit der Gase zu Hülfe ziehen zu müssen.

1) Hankel, Abh. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Cl. 5. p. 30. 1861.

**XII. Ueber eine neue Anordnung des Messdrahtes
in der Wheatstone-Kirchhoff'schen Brücken-
combination; von Hugo Meyer.**

(Hierzu Taf. V Fig. 11–13.)

Hr. Geh.-Rath W. Weber¹⁾ hat im Jahre 1829 einen Monochord beschrieben, dessen Verwendbarkeit auch für andere Zwecke von vornherein einleuchtend war. Eine neue Anwendung dieses Apparates, welche sich als praktisch erwiesen hat, soll hier mit den Aenderungen, die sie am Monochord nothwendig machte, beschrieben werden.

Zu den wesentlichen Vorzügen, welche der Weber'sche Monochord vor anderen Instrumenten derselben Gattung hat, gehört u. a., dass das Stück des Drahtes, welches schwingen soll, in scharf bestimmte Grenzen eingeschlossen werden kann, und dass, wie auch die Länge des schwingenden Stückes abgeändert werden mag, die Spannung der Saite sich weder vermehren, noch vermindern kann. Dieselben Eigenschaften muss mutatis mutandis auch der Messdraht in der Wheatstone-Kirchhoff'schen Brückencombination besitzen. Ich habe daher, als ich mich vor längerer Zeit mit galvanischen Widerstandsmessungen beschäftigte, an dem Weber'schen Apparate einige Aenderungen von solcher Art anbringen lassen, dass die aufgespannte Metallsaite als Messdraht benutzt werden kann; dabei hat das Instrument an seiner Brauchbarkeit als Monochord nichts eingebüsst.

Die umgeänderte Form des Instrumentes stellt sich in Fig. 11 dar. Was zu dem Weber'schen Monochord neu hinzugekommen ist, ist im Wesentlichen nur ein zweiter Schieber *S*. Die Art der Spannung und Einklemmung der Metallsaite ist ungeändert beibehalten, nur sind die Backen, zwischen denen der Draht geklemmt ist, aus Messing, statt wie ursprünglich aus Eisen gefertigt, mit Klemmschrauben für die Zuleitungsdrähte versehen und soweit verlängert, dass die Anbringung der auf dem Schieber *S* befindlichen Contacte an allen Punkten des Drahtes ermöglicht wurde.

1) W. Weber, Pogg. Ann. 15. p. 1. 1829.

Der aus trockenem Holze hergestellte Schieber S kann mit Hülfe einer Schraube s in jeder beliebigen Stelle des Messdrahtes festgehalten werden. Seine weitere Einrichtung zeigt Fig. 12. Auf den Schieber S ist ein Holzklotz H von solcher Höhe aufgeschraubt, dass bei verticaler Stellung des Apparates die Metallsaite die vordere Fläche desselben auf der ganzen Länge berührt. Auf diesem Holze sind die Contactpunkte und deren Verbindungsstücke mit den Zuleitungsdrähten in symmetrischer Weise angebracht. Der Contact mit dem Messdraht wird durch Niederdrücken der Feder f bewirkt, unter welche an ihrem äussersten Rande ein Stückchen feinen Platindrahtes gelöthet ist, sodass beim Niederdrücken der Feder dieses Drahtstück den Messdraht senkrecht schneidet. Gleichzeitig mit dieser Berührung soll die Verbindung der Feder f mit dem Zuleitungsdrahte z hergestellt werden. Es ist daher vor dem einen Ende der Feder f eine Messingplatte m mit Klemmschraube s auf dem Klotze befestigt, und an zwei gegenüberliegenden Stellen sind Feder und Platte halbkreisförmig ausgebohrt, sodass durch Einschieben eines Stöpsels in das runde Loch gleichzeitig die Feder niederdrückt und der Contact mit dem Zuleitungsdraht z hergestellt wird. Dieser Stöpsel ist passend an seinem Ende mit einem halben Schraubenumgang versehen, mit welchem er in eine in den Klotz H eingelassene Schraubemutter eingedreht wird; beim Einschrauben legt sich dann, wenn der Stöpsel wie in Fig. 13 geformt ist, der breite Rand desselben sowohl auf die Feder wie auch auf die Metallplatte auf und sichert so die metallische Verbindung dieser beiden Stücke.

Die Anforderung, alle Punkte des Messdrahtes berühren zu können, machte das Anbringen zweier Federn f an den gegenüberliegenden Kanten des Klotzes H nöthig, und der Wunsch, den Messdraht in einer bequemen, inzwischen von Hrn. F. Braun ¹⁾ beschriebenen Methode calibriren zu können, gab Veranlassung, statt einer Metallplatte, welche mit beiden Federn verbunden werden konnte, zwei ganz gleiche anzu-

1) F. Braun, Centralz. f. Opt. u. Mech. 4. p. 134. 1883. Beibl. 7. p. 776. 1883.

bringen, die je nach Bedürfniss durch Einsetzen oder Ausziehen eines Messingstöpsels miteinander verbunden oder voneinander getrennt werden können.

Soll der Messdraht calibriert werden, so sind die beiden Metallplatten m getrennt zu benutzen, und mit den beiden Enden des Multiplicators eines empfindlichen Galvanometers von grossem Widerstande zu verbinden. Beim Einsetzen der Stöpsel zwischen den Federn f und den Metallplatten m wird dann die Nadel des Galvanometers, an welcher Stelle des Messdrahtes sich der Schieber auch befinden mag, dieselbe Ablenkung erfahren, wenn der Draht calibrisch ist. Bei der Prüfung verschiedener Neusilberdrähte von ca. 0,4 mm Durchmesser habe ich Hrn. Braun's Angaben über die Homogeneität solcher Metallsaiten vollkommen bestätigt gefunden.

Wenn es sich dagegen um die Benutzung der aufgespannten Saite als Messdraht in der Brückencombination handelt, so wird man die beiden Metallplatten m mit einander verbinden und je nach Bequemlichkeit die eine oder die andere der Federn f zum Contact mit dem Messdraht benutzen. Natürlich wird dann nur das eine Ende des Galvanometerdrahtes, eventuell der eine Pol der galvanischen Säule mit einer der Platten m verbunden.

Als Probe für die Brauchbarkeit des Instrumentes als Brückendraht mag hier eine Vergleichung Platz finden, welche ich zwischen einer British Association Unit. (Nr. 51), richtig bei 15,8° C.) und einer Siemens'schen Originaleinheit (Nr. 1630, richtig bei 17,3° C.) nach der Wheatstone'schen Methode vorgenommen habe. Es fand sich:

$B.-A.-U.$ bei 0° C. = 1,0437 S.-E.

$B.-A.-U.$ bei 20° C. = 1,0500 S.-E.

Für die S.-E. wurde angenommen, dass sich dieselbe bei einer Temperaturänderung von 1° C. um 0,0004 verändere. Aus diesen Bestimmungen ergibt sich für die Widerstandsänderung der $B.-A.-U.$ für 1° C. der Werth 0,00031 oder 0,031 Proc., d. i. derselbe Werth, welcher für eine Temperaturschwankung von $\pm 5^\circ$ um die Aichtemperatur dem

Etalon beigegeben ist. Die Anwendung dieses Temperaturcoëfficienten liefert den Widerstand der *B.-A.-U.* für die Aichtemperatur 1,0487 S.-E. Die directe Vergleichung bei 15,7° der *B.-A.-U.* lieferte den Werth 1,0488 S.-E. Ein Resultat, das befriedigend genannt werden dürfte.

Göttingen, physikal. Institut, Mai 1884.

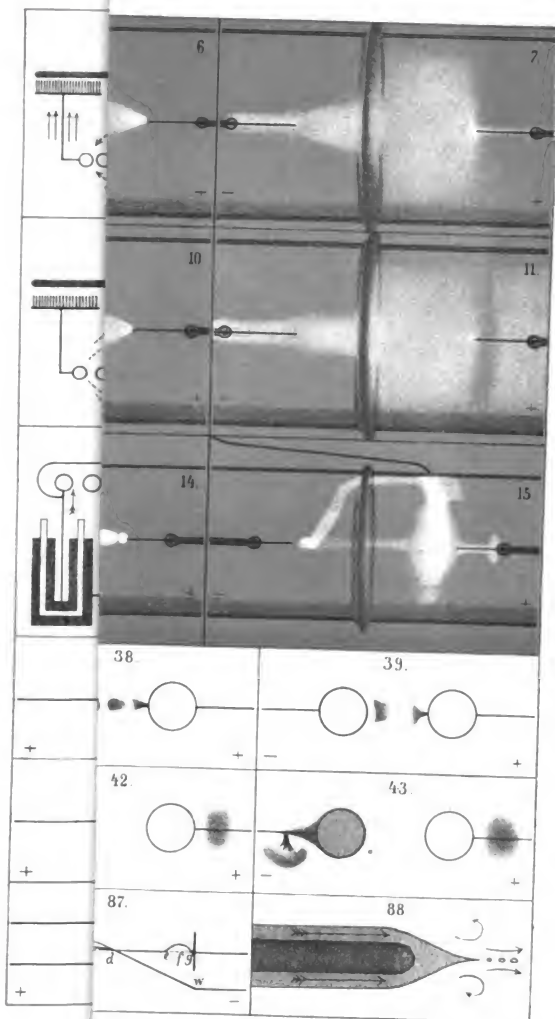
XIII. *Wheatstone's Rheostat mit Quecksilbercontact; von J. Bodyński.*

(Hierzu Taf. V Fig. 14—15.)

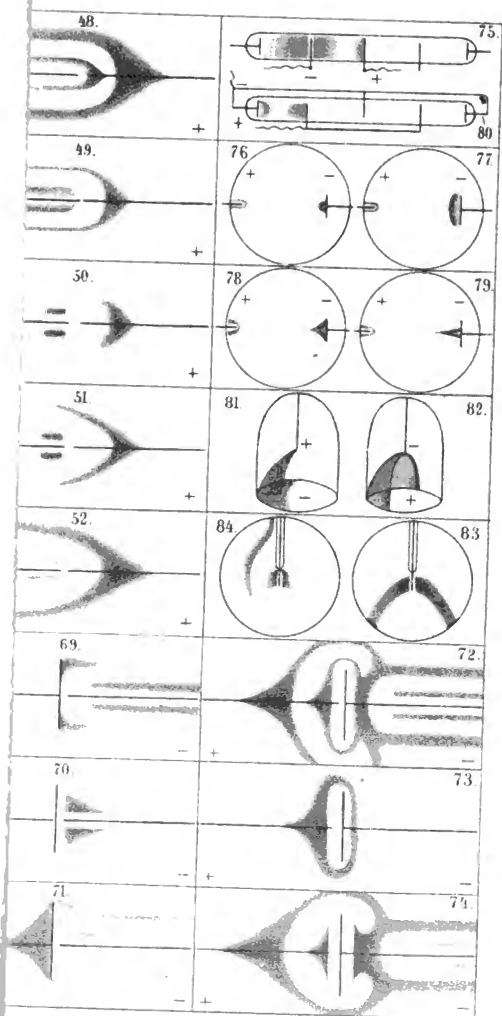
Der Rheostat von Wheatstone kann trotz seiner leichten und bequemen Handhabung zu genauen Messungen nicht verwendet werden, weil bekanntlich die Berührung der Drahtspirale mit der Rolle eine höchst ungenaue und unsichere ist. Um diesem Uebelstande abzuhelpen, ersetzte ich den gewöhnlichen Contact durch einen Quecksilbercontact und gebe in dem Folgenden die Beschreibung eines derartigen Instrumentes, welches ich mir vor Kurzem anfertigen liess.

Figur 14—15 zeigt den Rheostat im Auf- und Grundrisse. Der Draht aus vernickeltem Neusilber wird in der üblichen Weise auf eine Walze *N* aus Serpentin aufgewickelt, nur ist in derselben eine etwa 3 mm tiefe Furche eingeschnitten. Mittels Kurbel und Getriebe *ABC* wird gleichzeitig mit der Walze *N* auch die Schraubenspindel *D* gedreht. Ein Kupferhebel *E* hat an dem einen Ende ein Muttergewinde, durch welches die Messingspindel *D* hindurchgeht; durch eine Bohrung in der Mitte desselben ist die Messingstange *F* gesteckt und das andere Ende des Hebels verlängert sich zu einer schmalen Rinne, welche unter die Drahtspirale zu stehen kommt und einen Theil der Schraubenwindung aufnimmt. Die Rinne wird mit etwas Quecksilber gefüllt und auf diese Weise ein zuverlässiger und gleichmässiger Contact derselben mit der Draht-

spirale hergestellt. Andererseits ist auch die Leitung zwischen dem Kupferhebel *E* und der Schraubenklemme *J* eine vollkommen sichere. Sie wird durch die Spindel *D*, zum Ueberflusse aber auch durch die Stange *F* und die Zahnräder *B* und *C* vermittelt. Die Stange *F* dient zur Geradföhrung des Hebels und trägt die Scala. Wie aus der Zeichnung ersichtlich, macht bei einer Kurbeldrehung das Zahnrad *C* sammt Spindel *D* zwei Umdrehungen. Selbstverständlich muss dem entsprechend die Höhe eines Schraubenganges der Spindel die Hälfte jener an der Walze *N* betragen. Ein sanftes Aufsteigen der Schraubenwindungen an der Spindel *D* ist erforderlich, damit bei Drehung der Kurbel der Kupferarm *E* leicht und ruhig fortgleite. Mein Apparat, welcher mir von der Firma W. J. Rohrbeck's Nachfolger in Wien geliefert wurde, hat auch wirklich einen äusserst leichten, gleichmässigen Gang und unterscheidet sich auch in dieser Beziehung vortheilhaft von den üblichen Rheostaten.









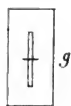


Fig. 1.

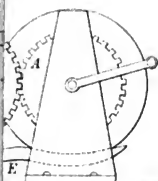


Fig. 2.

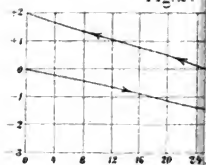


Fig. 3.

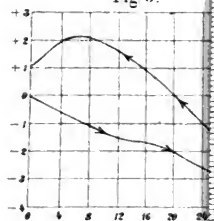
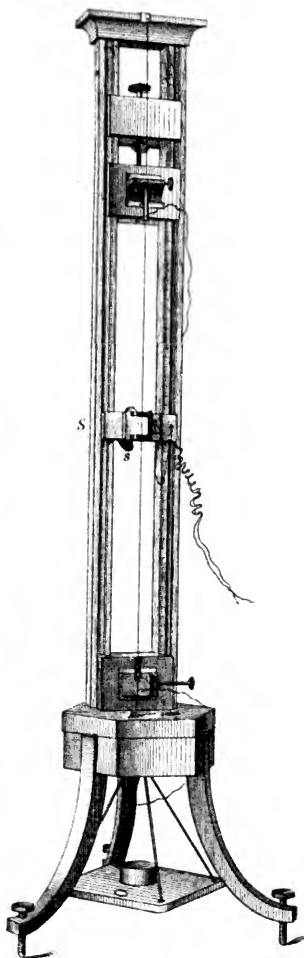


Fig. 4.



Fig. 11.





DER PHYSIK UND CHEMIE

NEUE FOLGE. BAND XXII.



I. *Ueber ein neues Verfahren zur Bestimmung
der Dampfdichte niedrig siedender Körper;
von Nik. von Klobukow.*

Stud. chem. an der technischen Hochschule zu München.

(Hierzu Taf. VI Fig. 1–10.)

Im Laufe der letzten Jahre wurden, wie bekannt, zahlreiche Verfahren zur Bestimmung der Dampfdichte angegeben, welcher Umstand an und für sich hinreichend zeigt, dass diese, für den Chemiker so wichtige Operation sich allgemein in den chemischen Laboratorien Eingang verschafft. Andererseits aber beweisen die immer von neuem erscheinende Vorschläge, dass die bisherigen Verfahren nicht ausreichen, dass wir in der Bestimmung der Dampfdichte keine so gründlich ausgearbeitete Manipulation besitzen, wie z. B. die Elementaranalyse der organischen Körper.

Bekanntlich gründen sich sämtliche Verfahren zur Dampfdichtebestimmung auf directem Wege auf den drei Principien:

1) Princip der directen Wägung eines bestimmten Dampfvolomens: angegeben von Dumas.

2) Princip der Volumbestimmung des Dampfes aus der Menge der von ihm verdrängten Sperrflüssigkeit: angegeben von A. W. Hoffmann und allgemein als sogenanntes „Verdrängungs“- oder „Deplacirungs“-Verfahren bekannt.¹⁾ Hierzu lässt sich auch die zuerst von L. Pfaundler und dann von V. Meyer eingeführte Me-

1) Dieses Princip wird sehr häufig, aus mir unbekannten Gründen, auch das „V. Meyer'sche Princip“ genannt und als ein von ihm herührendes angenommen.

thode der Anwendung von Luft (oder anderer Gase) als Sperrflüssigkeit anreihen.

3) Princip der Bestimmung der Dampfdichte „in Vacuo“: angegeben von A. W. Hoffmann. — Nach dem ersten und dritten Princip wurden, seit ihrer Angabe, zahlreiche Methoden ausgearbeitet, unter welchen ich nur auf die wichtigsten hinweisen will. So z. B. die Verfahren von H. Wichelhaus¹⁾, Muir und Suguira²⁾, Pettersson und Eckstrand³⁾, Bell und Teed⁴⁾, Engler⁵⁾, Roscoe⁶⁾, Brühl⁷⁾ u. s. w.

Viel weniger kann dies von dem zweiten Princip behauptet werden, dafür zeigt sich hier eine schrittweise Verbesserung der ursprünglich angegebenen Methode in Bezug auf Genauigkeit und Einfachheit der Ausführung. Ein Blick auf die Methoden von V. Meyer für hohe und niedrige Temperaturen⁸⁾ im Vergleiche mit denen von Frerichs⁹⁾ und Watts¹⁰⁾, die in früheren Jahren angegeben wurden, wird dies genügend beweisen.¹¹⁾ Gerade umgekehrt verhält es sich aber bei den Methoden nach dem ersten und dritten Principe; man kann hier aufs deutlichste die interessante Thatsache beobachten, dass beinahe jede auf Vereinfachung der ursprünglichen Methoden zielende Modification ihr im bezug auf Genauigkeit und Präcision nachsteht. So z. B., um eine der letztangegebenen Methoden zu erwähnen,

1) H. Wichelhaus, Chem. Ber. 3. p. 166. 1870.

2) Muir und Suguira, l. c. 10. p. 1598. 1877.

3) Pettersson und Eckstrand, l. c. 13. p. 1185. 1880.

4) Bell und Teed, l. c. 13. p. 2007. 1880.

5) Engler, l. c. 9. p. 1419. 1876.

6) Roscoe, l. c. 11. p. 1196. 1878.

7) Brühl, l. c. 9. p. 1368. 1876.

8) V. Meyer, Chem. Ber. 9. p. 1216. 1876 und 10. p. 2068. 1877.

9) Frerichs, Lieb. Ann. 185. p. 199. 1877.

10) Watts, Laboratory 1. p. 225. 1877; Zeitschr. f. anal. Chem. 7. p. 82. 1868.

11) Dabei schliesse ich die Luftverdrängungsmethode von V. Meyer als eine nicht wissenschaftlich genaue aus der Betrachtung aus und verweise nur auf die Verfahren mit Anwendung von Quecksilber und des Wood'schen Metalles als Sperrflüssigkeiten.

die Abänderung des Dumas'schen Apparates von Pawlewski¹⁾, durch welche in dieses musterhafte Verfahren eine Masse von Fehlerquellen eingeführt werden, und trotzdem die Ausführung dieser Methode kaum erleichtert wird.

Daher waren auch bis jetzt die ursprüngliche Dumas-Deville-Troost'sche und die Gay-Lussac-Hoffmann's die einzigen praktisch in den Laboratorien angewendeten Methoden.

Und in der That: ist das Endziel einer Dampfdichtebestimmung nur die Lösung der Frage über die Moleculargrösse einer chemischen Verbindung, so genügt offenbar:

a) für niedrige Temperaturen das einfachste der denkbaren „Vergleichungsverfahren“ von Landolt²⁾, oder die ihm ähnlichen von Pfaundler³⁾ (nach Grabowski);

b) für hohe Temperaturen, das für solche Bestimmungen hinreichend genaue Verfahren der Luftverdrängung von V. Meyer⁴⁾ anzuwenden.

Will man dagegen die Bestimmung der Dampfdichte für präzise wissenschaftliche Zwecke, also z. B. zum Studium der Dissociationserscheinungen und der damit verbundenen abnormen Dampfdichten, zur Constatirung der chemischen Reinheit einer Substanz u. s. w. anwenden, so gebraucht man natürlich nicht die leichter ausführbaren, sondern die genaueste von den existirenden Methoden. Deshalb ist jeder neue Vorschlag dann und nur dann berechtigt, wenn er eine Vereinfachung einer genauen aber schwierig auszuführenden Methode bezweckt, wobei die Genauigkeit nicht im geringsten beeinflusst wird; damit habe ich aber auch die Grundidee ausgesprochen, von welcher sich bei der Angabe meines Apparates, der auf dem „Verdrängungsprincipe“ beruht, ausgegangen bin, und ich kann nunmehr zur Beschreibung meines Verfahrens übergehen.

1) Pawlewski, Chem. Ber. 16. p. 1293. 1883.

2) Landolt, Chem. Ber. 5. p. 497. 1872.

3) Pfaundler, l. c. 5. p. 575. 1872.

4) V. Meyer, Chem. Ber. 11. p. 1867 u. 2253. 1878.

Ueber das Princip des Apparates kann ich mich sehr kurz fassen: es entspricht vollkommen dem eines Dilatometers oder sogenannten „Gewichtsthermometers“, wie es bis jetzt zur Bestimmung der Ausdehnungscoëfficienten angewendet wurde. Dieses Dilatometer besitzt eine ähnliche Form wie die in Fig. 1 abgebildete. Denken wir uns, es seien die Gewichte des Quecksilbers, welches der Apparat bei verschiedenen constanten Temperaturen t^0 , t'^0 , t''^0 (sagen wir sogleich bei den Temperaturen der zu verwendenden Heizflüssigkeiten) fasst, so sind daraus offenbar auch die Volumen des Apparates bei den genannten Temperaturen bestimmt. Füllen wir dann unseren Apparat bei t^0 mit Quecksilber und bringen gleichzeitig eine abgewogene Menge einer bei t^0 verdampfenden Substanz hinein; erhitzen wir ferner den Apparat bis auf diese Temperatur t^0 , so wird, infolge der Ausdehnung des Quecksilbers einerseits und der Dampfbildung andererseits, eine bestimmte Quantität Q des Quecksilbers herausfließen, welches wir wägen. Diese zwei Wägungen geben uns aber unmittelbar das Volumen des Dampfes, denn wir kennen das Volum V_r des Apparates bei t^0 ; kennen das Gewicht G_r des Quecksilbers bei t^0 , mit welchem wir anfangen; wissen also, dass im Apparate bei t^0 die Menge $G_r - Q$ zurückgeblieben ist, welche einem Volumen V_q entspricht, folglich ist $V_r - V_q = V_d =$ dem gesuchten Volumen des Dampfes.

Denken wir uns endlich, dass das gemessene Dampf-volumen sich unter dem während der Bestimmung herrschenden Barometerdrucke befindet, was durch eine später zu beschreibende Einrichtung erreicht wird, so geben uns die oben genannten zwei Wägungen und die Ablesung des Barometers alle Daten zur Bestimmung der Dampfdichte. Die Art und Weise, wie dies einfache Princip mittelst eines Apparates den ich, seinem Zwecke und seiner Gestalt entsprechend, als „Dampfdichtedilatometer“ benennen will, realisiert wurde, ist aus der Figur 2 und Folgenden zu ersehen. Die Figuren 2_a und 2_b stellen uns die Seiten- und vordere Ansicht des in $\frac{1}{2}$ der wahren Grösse abgebildeten Apparates dar. Ein cylindrisches, dünn-

wandiges ($\frac{1}{2}$ mm Wandstärke) Glasgefäß *a* von ca. 45—50 cm Inhalt ist oben verschlossen und geht unten in eine bis zur horizontalen Lage gebogene Röhre *b* (1 mm Wandstärke) über. Diese ist in der Hülse *h* des Stahlverschlusses *v* eingekittet. Ihre Fortsetzung bildet die capillare Röhre *c* ($\frac{1}{2}$ mm im innern Durchmesser), deren oberes Ende horizontal gebogen und bei *m* glatt abgeschliffen ist. Der Verschluss *v*, dessen Durchschnitt nach der Axe *nn* in den Fig. 2, und Fig. 3 detaillirt abgebildet ist, besteht im wesentlichen aus drei Haupttheilen:

1) der schon erwähnten Hülse *h*, welche mit einem Vorsprunge *r* und einem Schraubengewinde versehen ist; 2) der Schraubenmutter *s*, welche das Verschliessen des Apparates besorgt; 3) dem mit der Capillaren *c* fest verbundenen und in der Schraubenmutter um die Axe *nn* drehbaren vorderen Theile, in welchem sich zwei Bohrungen befinden, von denen die eine längs der Axe *nn* verläuft und mit der Capillaren *c* direct communicirt, die andere zur ersten unter einem Winkel von 45° geneigt ist. Diese drei Haupttheile sind in der Fig. 3, behufs Deutlichkeit durch eigene Schraffirung angedeutet; daselbst sind die Bohrungen mittelst starker, schwarzer Linien gekennzeichnet.

Der konische Vorsprung *l* des Bolzens *f* gleitet in einer entsprechenden konischen Rinne der Schraubenmutter *s* und wird durch eine Ringfeder *w* an diese letztere fest angedrückt, wobei die Federkraft nach Belieben regulirt werden kann, was durch das Anziehen der kleinen Schraubenmutter *p* mittelst eines Schlüssels (siehe Fig. 4) bewerkstelligt wird. Der Bolzen *f*, welcher sich, wie auf den Figuren zu sehen, ziemlich weit in die Glasröhre *b* cylindrisch verlängert, ist selbstverständlich mit dem beweglichen vorderen Theile des Verschlusses fest verbunden, was durch eine Gegenmutter *i* mit quadratischem Einschnitte in leicht zu begreifender Weise bewerkstelligt wird. Durch die beschriebene Einrichtung des Stahlverschlusses, auf deren weitere Einzelheiten ich vorläufig nicht näher eingehen will, ist uns offenbar das Mittel in die Hand gegeben: durch Drehung des beweglichen vorderen Theiles des Apparates die capillare Röhre *c* in

eine solche Lage zu bringen, dass die Druckverhältnisse innerhalb und ausserhalb des Apparates ausgeglichen werden, ohne dabei das Volumen des ganzen Apparates zu ändern.

Die Bedingungen, bei welchen dieses Ausgleichen stattfindet, sind leicht zu ersehen: wären a und c zwei Röhren von gleichem Durchmesser, so müsste man das Niveau des Quecksilbers in beiden Röhren auf gleiche Höhe bringen; ist das aber nicht der Fall, und haben wir es, wie im Dampf-dichtedilatometer, mit einer weiten und einer capillaren Röhre zu thun, so muss durch genaue Messung ein und für alle mal der Einfluss der Capillardepression in c festgestellt werden.

Diese Grösse muss, da sie in demselben Sinne wie der äussere Barometerdruck bei m wirkt, zu der beobachteten Barometerhöhe addirt werden. Um etwaige Zweifel über den zuverlässigen Verschluss zu beseitigen, sei bemerkt, dass bei physikalischen Arbeiten eine Reihe von Apparaten angewendet werden, welche sogar für Gase wie Wasserstoff dicht sind; ausserdem muss dieser Verschluss ja nur quecksilberdicht sein. Dieses wird schon durch die capillar-depressiven Kräfte zwischen zwei auf $\frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ mm voneinander entfernte Eisenstücke erreicht, zudem arbeitet der Apparat nur unter gewöhnlichem Drucke. Ungeachtet dessen wurde mein Apparat, dessen sorgfältige und elegante Ausführung ich dem Geschieke des Hrn. Wiedemann¹⁾ zu verdanken habe, unter der Bedingung hergestellt, dass er bei einem Drucke von 2,5 Atmosphären quecksilberdicht sei, was auch in leichter Weise geschehen ist.

Was die Verkittung der Glas- und Metalltheile des Apparates anlangt, so will ich auch darüber einiges sagen. Die Theile der Röhren b und c , soweit sie in den Stahlverschluss eingekittet sind, werden mit Flusssäure geätzt, die geätzten Stellen mit Wasserglas bestrichen und, nachdem sie ausgetrocknet, mittelst einer Mischung von Bleiglätte mit Glycerin (in der Praxis oft unter dem Namen

1) Physikalisch-mechanisches Institut in München.

„Silberkitt“ bekannt) von der Consistenz eines dicken Breies, in die betreffenden Theile des Verschlusses eingekittet. Dieses Kittmittel, welches besonders für Apparate, welche bei hohen Temperaturen arbeiten sollen, empfohlen wurde, hat sich bei dem Gebrauche meines Apparates vorzüglich bewährt, da es ausserdem durch die angewendeten Heizflüssigkeiten in keiner Weise angegriffen wird. Andere gute Kittungsmittel, wie z. B. Schwefel mit Bimsstein, Wasserglas mit Kreide, Wasserglas mit Gyps u. dergl. mehr, sind, theils infolge ihrer Sprödigkeit, theils wegen ihrer Angreifbarkeit durch die Heizflüssigkeiten, für unseren Zweck nicht zu empfehlen. Es erübrigt noch, bei der Besprechung der mechanischen Details am Apparate, das Schmiermittel zu erwähnen, dessen ich mich mit grossem Erfolge bediente, um die gleitende Oberfläche des Bolzens f , sowie die Oberfläche des Schraubengewindes der Hülse h damit zu versehen. Als solches Schmiermittel gebrauchte ich fein pulverisirten weichen Graphit; es genügt, auf die mit Weingeist oder Metalllack befeuchtete Oberfläche, mittelst eines Pinsels, etwas Graphitpulver aufzutragen, und die bestrichene Stelle austrocknen zu lassen. Das so aufgetragene Graphitpulver haftet, besonders an den sich reibenden Stellen, ungemein fest und verleiht ihnen einen eigenthümlichen Glanz und Politur; ausserdem hat sich aus directen Versuchen ergeben, dass zwischen solchen Oberflächen die capillardepressiven Kräfte noch grösser als wie beim gewöhnlichen Eisen sind.

Der Beschreibung des Apparates reihe ich die Operation der Füllung desselben mit Quecksilber unmittelbar an. Der auseinandergeschraubte Apparat wird durch die Oeffnung der Röhre b mit trockenem Quecksilber gefüllt, wobei, behufs der Entfernung der an den Wänden haftenden Luftblasen, die bekannte Durchführung einer kleinen Luftblase durch die ganze Oberfläche des Quecksilbers vorgenommen wird, wobei selbstverständlich die Oeffnung der Röhre b verschlossen sein muss. Alsdann legt man den Apparat so, dass das Gefäss a horizontal, die Röhre b vertical liegt, und schreitet zur zweiten Operation, der Verschraubung der Verschlusses. Der zuerst in die Röhre b

hereindringende cylindrische Theil *o* des Bolzens *f* drückt auf das darin befindliche Quecksilber und bringt eine gewisse Menge desselben zum Ausfliessen; das dauert aber nur so lange, bis die Schraubenmutter in das Schraubengewinde eingegriffen hat: es fliesst weiter, infolge der Capillardepression zwischen den Schraubengewinden, kein Quecksilber aus, sondern das weitere Anziehen der Schraubenmutter treibt das Quecksilber durch die Bohrungen des Verschlusses weiter, bis es zum Ausfliessen bei der Mündung *m* der Capillaren *c* gelangt. Dabei wird selbstverständlich durch das hinaufsteigende Quecksilber zuerst sämtliche Luft aus den damit gefüllten inneren Theilen des Verschlusses vertrieben, und so gelingt es, den Apparat vollständig mit Quecksilber zu füllen.

Aber nicht nur diesen Zweck verfolgte die Construction des Verschlusses; es beginnt nämlich das Ausfliessen des Quecksilbers aus der Mündung der Capillare *c* noch weit bevor die Schraubenmutter vollständig angezogen ist¹⁾, und darin ist uns offenbar das Mittel in die Hand gegeben, einige Gramm Quecksilber vorrätig zu halten, was, wie wir sehen werden, von grosser Wichtigkeit ist.

Zur Bequemlichkeit des Hin- und Hertragens des Apparates, namentlich aber für einige kathetometrische Messungen, die man an demselben vornehmen muss, kommt er auf ein Specieell zu diesem Zwecke eingerichtetes Gestell, welches in Fig. 6 abgebildet und wohl keiner weiteren Beschreibung bedarf; zu erwähnen ist nur, dass man das Gestell auch auf die Seite *mno* legen kann, wobei also der Apparat horizontal zu liegen kommt, wie das z. B. bei der Füllung mit Quecksilber nothwendig ist. Ein Gummiband *g* dient zur Befestigung des cylindrischen Gefässes *a* des Apparates an das Tragegestell.

Dem Heizgefässe musste ich eine von den bisher gebrauchten Einrichtungen dieser Art abweichende Form geben.

1) Diesen Zustand will ich in der Folge mit dem Ausdruck „halb verschraubt“ bezeichnen.

Der bewegliche Theil des Verschlusses, musste, behufs der oben erwähnten Einstellung der capillaren Röhre *c*, ausserhalb des Heizgefässes sich befinden, wobei ich nicht vergessen will, vor auszuschicken, dass bei der Einstellung der Capillaren, welche weiter unten ausführlich beschrieben wird, wir das Gefäss *a* gar nicht zu sehen brauchen.

Die Fig. 8, 9—10 mögen die Einrichtung des Heizgefässes ersehen lassen. Das aus starkem Messingblech hergestellte cylindrische Gefäss ist oben mit einem starken breiten Rande *oo*, dem ein ebensolcher *kk* des Deckels *m* entspricht, und zwischen welchen (Rändern) ein Dichtungsring *g* aus geeignetem Material (z. B. Leder, Gummi, Carton u. s. w.) zu liegen kommt. Unten geht das Gefäss in ein schmäleres *sqr*, von ca. 200 ccm Inhalt über, welches vollständig mit der Heizflüssigkeit gefüllt und durch directe Feuerung von unten erhitzt wird. Die einzige Oeffnung des Gefässes *vv* dient dazu, die Hülse *h* des Apparates durchzulassen, ist aber, wie zu sehen, breiter als diese letztere, was zum leichten Einbringen des Apparates von Bedeutung ist. Der gewölbte Deckel des Gefässes ist mit drei auf einer Richtung liegenden Oeffnungen *f*, *y*, *j* versehen, von denen die mittlere *f* zur Verbindung mit dem Kühler *k*, die beiden Seitenöffnungen *j* und *y* zum Einbringen der Thermometer *TT* dienen.

Auf dem Boden des breiten Theiles des Heizgefässes, liegt ein kleines Drahtgestell *LPR*, welches auf der Fig. 9 eigens abgebildet ist und auf welchem mittelst des Korkes *Q* der ganze Apparat zu liegen kommt, sodass er in der Oeffnung *vv* durchaus nicht eingehengt ist, und sie ihm nicht als Stütze dient. Der Verschluss der Oeffnung *vv* wird dadurch hergestellt, dass der breite Rand der Hülse *h* sich an die inneren Wandungen des Gefässes anlegt; auf dem aus der Oeffnung hervorragenden Theile dieser Hülse befindet sich ein Dichtungsring *w* von geeignetem Material und von solcher Dicke, dass, nachdem der Verschluss „vollständig“ verschraubt, die Schraubenmutter den genannten Dichtungsring fest an die Ränder der Oeffnung *vv* andrückt. Als Dichtungsring sind am besten, für beinahe jede Heiz-

flüssigkeit, mehrere aufeinander liegende Papierringe, denen sich von der Seite der Schraubenmutter ein solcher von Eisenblech anreihet. Speciell für Wasser als Heizflüssigkeit ist jedoch ein Gummiring zu empfehlen. Ein kleiner Einschnitt d in dem Rande der Hülse h , dem ein an die Wand des Gefäßes angelöhteter Stift d' entspricht, sorgt dafür, dass der Apparat auf keiner Weise aus seiner verticalen Lage kommt. Nachdem der Apparat in angedeuteter Weise in das Heizgefäß eingebracht ist, stellt man über ihn einen Mantel $\alpha\beta\gamma\delta$ mit konischem Deckel, welcher unten Einschnitte für die Hülse h , sowie für die Drähte des Gestelles LPR besitzt; ebenso sind im Deckel des Mantels Oeffnungen y' und j' für die Thermometer, entsprechend den Oeffnungen y und j des Deckels m . Endlich befindet sich auf dem Deckel des Mantels eine Rinne DD angelöthet, durch welche die vom Kühler zurückkehrende Heizflüssigkeit beinahe bis zum Boden des Gefäßes abfließt.

xx ist eine runde, mit einem Ausschnitte versehene Platte aus starkem Eisenblech, die auf den Ring des das Heizgefäß tragenden Stativs aufgelegt ist und auf welche das letztere zu stehen kommt. $iii..$ sind Klemmschrauben, deren Zahl vier bis sechs ist, und mittelst welcher die Dichtung des Deckels bewerkstelligt wird.

Was die Fläschchen anlangt, worin ich die abgewogene Menge der zu untersuchenden Substanz in den Apparat brachte, so beabsichtigte ich zuerst, ähnlich wie es Hr. V. Meyer machte, gekrümmter Fläschchen mich zu bedienen. Allein durch directe Versuche, die der Hr. Glasfabrikant J. Greiner, welcher die Glastheile für meinen Apparat anfertigte, in gefälligster Weise für mich angestellt, hat es sich erwiesen, dass solche Fläschchen gern in der Biegung des Apparates stecken bleiben; infolge dessen gaben wir den Fläschchen die Form der Fig. 5. Ein solches Fläschchen darf so dick sein, dass es dem inneren Durchmesser der Krümmung entspricht, ohne dass es beim Durchgang irgend ein Hinderniss findet.

Zur Ermittlung der Grösse solch eines Fläschchens beschreibt man mit dem Radius der mittleren Krümmung

bei b zwei Bögen: $p m o$ und $p n o$, deren weiteste Entfernung $= m n =$ dem inneren Durchmesser der Röhre b ist.

Ich bediente mich bei meinen Versuchen stets eines und desselben Fläschchens (etwa 2,7 g Quecksilber bei gewöhnlicher Temperatur fassend); wurde dasselbe durch die Substanz nicht völlig gefüllt, so geschah dieses durch Hineinbringen einer entsprechenden Menge von Quecksilber, welches Verfahren, wie bekannt, schon von verschiedenen Forschern gebraucht wurde. Der Grund dafür ist einfach der, dass bei sämtlichen Bestimmungen der Constanten für den Apparat, das Fläschchen denselben stets begleitet, wodurch die sonst in der Rechnung vorzunehmende, unerquickliche Correction für das Fläschchen wegfällt. Selbstverständlich ist man aber an die Erfüllung dieser Bedingung nicht gezwungen und kann beliebige Fläschchen, Eimerchen etc. anwenden, ja sogar die Substanz, falls sie fest ist, in Stückchen einführen, wobei jedoch jedesmal eine Correction unentbehrlich ist.¹⁾

Ich wende mich nunmehr zur Beschreibung der einzelnen Manipulationen mit dem Apparate und zunächst zur:

Bestimmung der Constanten für den Apparat.

1. Bestimmung der Capillardepression δ_i für verschiedene Temperaturen. — Diese Operation ist die erste, welche am Apparate vorgenommen werden soll, und die einzige, bei welcher wir es mit Höhenmessungen zu thun haben. Zum Zwecke dieser Messung wird der Ballon a oben bei t (siehe Fig. 2_a und Fig. 2_b) mit einer kleinen capillaren Röhre versehen, welche später, nach Vollendung der Operation, zugeschmolzen wird. Man verschliesst diese Capillare mit einem Gummistöpsel, füllt den Apparat, wie oben angegeben, mit Quecksilber, befestigt ihn auf dem Tragegestelle, wie auf Fig. 6 zu sehen ist, und stellt ihn nun auf den Mess-

1) Das physikalisch-mechanische Institut von Böhm u. Wiedemann in München hat die Anfertigung und Lieferung meines „Dampfdichtedilatometers“ nebst allen dazu gehörigen Theilen: wie Tragegestell, Heizgefäß, Fläschchen etc. übernommen, wobei die dazu gehörigen Glas-theile in der „Fabrik für Präcisionsglasinstrumente“ von J. Greiner in München hergestellt werden.

tisch vor das Kathetometer. Nachdem man sich überzeugt hat, dass der Apparat fest und senkrecht steht, lüftet man den Gummistöpsel und lässt das Quecksilber aus der Mündung der Capillaren (welche irgend wie, also z. B. senkrecht steht) frei herausfliessen.

Ist dies Herausfliessen vollendet, so wird die Niveaudifferenz des Quecksilbers in a und c gemessen. Zur Controle wiederholt man das Verfahren einige mal und bei verschiedenen Stellungen der Röhre c , wobei natürlich gleiche Zahlen sich ergeben müssen. So kann man z. B., indem man die Capillare c im Anfange senkrecht eingestellt hatte, durch allmähliches Neigen derselben immer eine weitere Portion des Quecksilbers zum Herausfliessen bringen und 10 bis 15 Messungen rasch hintereinander ausführen, bis endlich das Niveau des Quecksilbers im Gefässe a das untere Ende des cylindrischen Theiles erreicht hat. So geschieht die Messung der Capillardepression bei gewöhnlicher Temperatur; von grösserer Bedeutung ist die Messung bei höheren Temperaturen, welche in folgender einfachen Weise bewerkstelligt wird. Der Apparat kommt in ein Sandbad, welches sich in einem von Blech hergestellten Kasten befindet, dessen Dimensionen und Form nahezu denen des unteren Theiles des Heizgefässes entsprechen, dessen Höhe jedoch nur halb so hoch wie die des letzteren ist, sodass etwa ein Drittheil des cylindrischen Gefässes a aus den Rändern des Sandbades hervorragt. Der Apparat wird, wie früher angegeben, gefüllt (wobei die Capillare bei t mittelst eines Gummistöpsels verschlossen), in das Sandbad hineingebracht, letzteres bis zum Rand mit Sand gefüllt und der aus dem Sandbade hervorragende Theil des Glasballons a mit Filz umgeben. Das so montirte Sandbad kommt auf die Eisenplatte xx (siehe Fig. 8 und Fig. 10) und wird nun allmählich bis 200° erhitzt. Ist diese Temperatur erreicht, und zeigt das Thermometer in den oberen und unteren Sandschichten gleiche Temperatur, so entfernt man den Filz, öffnet die Capillare bei t , lässt das Quecksilber frei aus der Mündung der Röhre c herausfliessen u. s. w., kurzum man macht die Messung genau so wie die früher beschriebene, mit dem Unterschiede, dass

wir nicht so viele Messungen hintereinander ausführen können. da nur, wie gesagt, ein Dritttheil des Gefässes *a* sichtbar, resp. der Messung zugänglich ist. Während der Abkühlung des Sandbades, welche, wie bekannt, nur höchst langsam vor sich geht, können noch beliebig viele Messungen für Zwischentemperaturen angestellt werden, wobei von Zeit zu Zeit das herausfliessende Quecksilber durch Zugiessen eines solchen durch die Capillare bei *t* ersetzt wird. Dass die dabei erhaltenen Zahlen nicht bedeutend voneinander differiren, ist vorauszusehen. Ich führe als Beispiel die Werthe von δ_t für den Apparat, mit welchen ich gearbeitet habe, an:

Temperatur	Capillardepression
$t = \text{gew. Temp.} = 17-20^\circ \text{C.}$	$\delta_t = 8,35 \text{ mm}$
$t = 100^\circ \text{C.}$	$\delta_t = 8,91 \text{ „}$
$t = 150 \text{ „}$	$\delta_t = 9,25 \text{ „}$
$t = 200 \text{ „}$	$\delta_t = 9,36 \text{ „}$

Da die Einrichtung des Sandbades uns ermöglicht, die Messung bei genau denselben Bedingungen vorzunehmen, wie wenn der Apparat sich im Dampfe einer Heizflüssigkeit befände, so können die gewonnenen Zahlen auf eine höchste Genauigkeit Anspruch machen, was durch Berechnung aus den für diesen Zweck existirenden Formeln niemals erreicht werden könnte. Was die Ablesung der Niveaus betrifft, so ist man berechtigt, in der Röhre *a* den oberen Theil des Meniscus, in der Röhre *c* den mittleren Theil desselben abzulesen.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich nicht unterlassen, auf einen Umstand hinzuweisen, durch den man leicht irre geführt werden kann; es kommt nämlich der Fall vor, dass der Quecksilberfaden in der Capillare, nach Beendigung des Ausfliessens, nicht unmittelbar an der Mündung *m* derselben abbricht, sondern in einiger Entfernung von derselben sich einstellt, sodass man glauben kann, es sei zu viel herausgeflossen. Allein der Versuch wird, bei denselben Bedingungen, immer dasselbe zeigen, weil diese Abnormität, als Folge der zu grossen Capillardepression im Schnabel der Capil-

laren, falls die Oeffnung derselben zu eng ist, stets stattfindet. Mit der Bestimmung der Capillardepression wird zugleich eine weitere Operation vorgenommen, nämlich die:

2. Anfertigung einer Tabelle, mittelst welcher man nach der Menge des aus dem Apparate herausgeflossenen Quecksilbers direct die entsprechende Einstellung der Capillaren in die „Normale Lage“ ablesen kann, welche Einstellung mit Hülfe eines getheilten Kreisbogens bewerkstelligt wird. Unter „Normaler Lage“ der Capillarenröhre c für eine gewisse Temperatur t^0 versteht man diejenige, bei welcher das Niveau des Quecksilbers in a und c auf gleicher Höhe sich befindet; haben wir unsere Capillare in diese Lage gebracht, so bleibt uns nur bei der Ausführung der Berechnung zu der während des Versuches gemessenen Barometerhöhe die der Temperatur t^0 entsprechende Capillardepression δ_t zu addiren, von dieser Summe die der Temperatur t^0 entsprechende Spannkraft des Quecksilberdampfes σ_t zu subtrahiren, um den Druck zu ermitteln, unter welchem sich das betreffende Dampfvolumen befindet.

Die Herstellung der genannten empirischen Tabelle geschieht am zweckmässigsten in folgender Weise. An die Capillare bei t wird ein kleiner Gummischlauch mit Quetschhahn angebracht, der Apparat mit Quecksilber gefüllt und vor dem Kathetometer aufgestellt, dabei die Capillare c in die senkrechte Stellung gebracht und unter der Mündung m derselben ein graduirter Messcylinder angebracht, der zur Aufnahme des herausfliessenden Quecksilbers dient.

Man öffnet alsdann den Quetschhahn und bringt, durch Hineinblasen mittelst des Schlauches, eine beliebige Portion des Quecksilbers zum Ausfliessen, wonach der Quetschhahn wieder geschlossen wird. Wir haben so denselben Fall, als ob eine gewisse Menge von Dampf sich im Apparate gebildet hätte und infolge dessen eine bestimmte Quantität von Quecksilber verdrängt wurde; diese Menge notiren wir uns und bringen alsdann¹⁾ durch Drehung die Capillare in die „Normale Lage“, wobei noch Quecksilber ausfliesst, welches

1) Mit Zuhilfenahme des Kathetometers.

in demselben Messcylinder aufgefangen wird. Nun beobachtet man auf einem beliebig eingetheilten Halbkreise, der hinter der Capillare angebracht wird, den Theilstrich, welcher der Lage der Capillare entspricht, und notirt sich diese Beobachtung neben der erstgenannten. Alsdann beginnt das Spiel von neuem: man bringt die Capillare wieder in die senkrechte Lage, bringt durch Einblasen von Luft eine weitere Portion von Quecksilber zum Ausfliessen u. s. w. Es genügen fünf bis zehn solche Beobachtungen, um durch Interpolation beliebig viele Zahlen für die Tabelle zu gewinnen. Wir erhalten dadurch etwa folgende Tabelle:

Cubikcentimeter des bei senkrechter Stellung der Capillaren heraus- geflossenen Quecksilbers: (Folgen Zahlen)	Stelle die Capillare auf den und den Theilstrich, um sie in die „Normale Lage“ zu bringen: (Folgen Zahlen)
---	--

Selbstverständlich kann nach dieser Tabelle die Einstellung der Capillaren mit dem höchsten Grade der Genauigkeit ausgeführt werden — ebenso als wenn wir das Gefäss *a* vor unseren Augen hätten. Ausserdem gibt das Auffangen des Quecksilbers in einen graduirten Cylinder ein bequemes Mittel, um uns zu überzeugen, ob sich im Apparate, dessen Volumen wir kennen, die zulässige Menge von Dampf gebildet oder diese Grenze überschritten, was dann der Fall ist, wenn das Niveau des Quecksilbers sich schon in der Krümmung der Röhre *b* befindet.

3. Bestimmung des Gewichtes des Quecksilbers im Apparate bei verschiedenen constanten Temperaturen. — Als solche constante Temperaturen gelten, wie schon oben erwähnt wurde, die der anzuwendenden Heizflüssigkeiten, zu ihnen gesellt sich ausserdem eine weitere, der Nullpunkt, bei welchem ebenfalls das Gewicht des Quecksilbers im Apparate bestimmt werden soll. Die Füllung des Apparates bei 0° geschieht in der einfachen Weise, dass man den mit abgekühltem, trockenem Quecksilber gefüllten Apparat, in welchem das ebenfalls mit Quecksilber gefüllte Fläschchen sich befindet, „halbverschraubt“ im zerstoßenen Eise ca. eine Stunde stehen lässt; alsdann wird

der Apparat im Eise selbst „vollständig“ verschraubt, rasch herausgenommen, über einem Gefässe von grösseren Dimensionen entleert und das Quecksilber auf einer grösseren chemischen Wage bis auf Centigramme genau gewogen. Was die Bestimmung der Gewichte des Quecksilbers bei allen übrigen Temperaturen anbelangt, so geschehen sie alle nach demselben Schema wie die eigentliche Bestimmung der Dampfdichte, d. h. der mit Quecksilber gefüllte Apparat wird in das Heizgefäss nach den angedeuteten Regeln hineingebracht und bis zur constanten Temperatur im Dampfe der Heizflüssigkeit erhitzt, wobei infolge der Erwärmung ein Theil des Quecksilbers aus der Capillare *c* ausfliesst. Nun lässt man alles langsam erkalten, entleert den Apparat wie früher und wägt das (in ihm zurückgebliebene) Quecksilber bis auf Centigramme genau. Bei sämmtlichen Füllungen des Apparates mit Quecksilber ist darauf zu achten, dass dasselbe vollkommen von Luft befreit sei. Um das zu erreichen, bediente ich mich stets folgenden Verfahrens.

Man bringt in den Apparat soviel trockenes Quecksilber, dass das Gefäss *a* bis zur Krümmung der Röhre *b* damit gefüllt ist, alsdann wird der Apparat in einem Sandbade bis auf 200° erhitzt, wobei nur der mit Quecksilber gefüllte Theil in Sand zu stehen kommt, die Röhre *b* dagegen aus demselben hervorragt. Nach einstündigem Erhitzen bringt man das Sandbad mit Apparat noch heiss unter die Luftpumpe und lässt nach dem Auspumpen das Ganze bis zum Abkühlen darin stehen.¹⁾ Diese scheinbar mühsame Operation ist jedoch nicht genug zu empfehlen, denn sogar Spuren von Luft, welche bei gewöhnlicher Temperatur kaum zu bemerken sind, beeinträchtigen bei höheren und hohen Temperaturen die Resultate beträchtlich.

Ich bemerke hierbei, dass auch ein wirkliches Auskochen des Quecksilbers im Apparate, wobei letzterer, wie beschrieben, in das Sandbad zu stehen kommt, vorgenommen werden kann; allein das Austreiben der Luft ist nach dem beschriebenen Verfahren so vollständig, dass die Operation des

1) Dabei ist das Quecksilber so gut wie ausgekocht zu betrachten.

eigentlichen Auskochens entbehrlich wird. Bis jetzt bin ich stillschweigend über den Umstand hinweggegangen, dass beim Erhitzen nicht der ganze Apparat in den Dämpfen der Heizflüssigkeit sich befindet, sondern dass das im beweglichen Theile des Verschlusses enthaltene Quecksilber sich ausserhalb des Heizgefässes und bei einer unbestimmten Temperatur sich befindet. Dieser Umstand wäre allerdings als schwache Seite des sonst in allen Punkten streng genauen Verfahrens zu bezeichnen. Allein es ist leicht zu beweisen, dass dieser Zweifel völlig unbegründet ist. Bedenken wir, dass das Gewicht des Quecksilbers im erwähnten Theile nur etwa $\frac{1}{200}$ des Gesamtgewichts des Quecksilbers im Apparate ausmacht; dass ausserdem von diesem geringen Theile beinahe die Hälfte (nämlich die Menge, welche sich innerhalb des Verschlusses befindet und durch Wärmefortpflanzung auf der Temperatur der Heizflüssigkeit erhalten wird), ausser Betracht fällt, so ist es wohl begreiflich, dass der Fehler so klein ist, dass er kaum auf die fünften Decimalen der Rechnung einen Einfluss haben kann.

Wie schon erwähnt, geschehen sämtliche Wägungen des Quecksilbers bis auf Centigramme genau und stets unabhängig vom Apparate in einem geeigneten Wägungsglase. Ich brauche nicht zu bemerken, dass die Correctionen der Thermometer und Gewichtssätze ebenfalls Gegenstand der vorbereitenden Arbeit ausmachen. Bezüglich der Zeit, die zur Ausführung dieser lange zu besprechenden, aber sehr einfachen Operationen erforderlich ist, bemerke ich aus eigener Erfahrung, dass sie im ganzen kaum 10—15 Arbeitsstunden überschreitet.

Beschreibung der Ausführung einer Dampfdichtebestimmung mit dem „Dampfdichtedilatometer“.

Diese Operation, welche, wie schon früher erwähnt, zwei Wägungen und einige Beobachtungen erforderlich macht und, inclusive aller Vorbereitungen, in der Zeit von 1—1 $\frac{1}{2}$ Stunde bequem erledigt werden kann, geschieht in folgender Weise. Der Apparat wird nach den angegebenen Regeln mit Quecksilber, beinahe bis an die

Mündung der Hülse gefüllt; das Fläschchen mit der abgewogenen Menge Substanz in die Oeffnung hereingedrückt. letztere mit dem Finger verschlossen, wobei das überflüssige Quecksilber herausfließt. Durch geeignetes Neigen steigt dann des Fläschchen in den Ballon *a*; man entfernt den verschliessenden Finger, nachdem der Apparat wieder in die horizontale Lage gebracht, und überzeugt sich, ob mit dem Fläschchen keine Luftblase in das Quecksilber des Gefässes *a* mitgerissen wurde. Hierauf wird das auseinander genommene Heizgefäss horizontal, mit der Oeffnung *vv* nach oben, auf den Arbeitstisch gelegt; die eine Hand bringt den mit der Korkunterlage versehenen Apparat, in geeigneter Lage, in dasselbe hinein; mittelst der anderen Hand wird auf das hervorragende Ende der Hülse der Dichtungsring *w* angebracht, alsdann der Apparat „halb verschraubt“ und das Heizgefäss aufrecht auf seiner Unterlage *xx* hingestellt. So montirt, wird das ganze einige Zeit sich selbst überlassen, damit das Quecksilber im Apparate die Temperatur des Ortes, welche an einem in das Heizgefäss hineingehängten genauen Thermometer abgelesen wird, und welche ich als „Anfangstemperatur“ *t* in der Folge bezeichnen will, annimmt. Durch Beobachtung des Quecksilberfadens in der capillaren Röhre *c* ist es leicht zu bestimmen, ob der Apparat die genannte Zimmertemperatur erreicht hat.¹⁾

Alsdann wird der Apparat „vollständig“ verschraubt²⁾ und die Capillare *c* in die senkrechte Stellung gebracht; alsdann bringt man unter die Mündung der letzteren eine unter dem Winkel von 120° gebrachte Röhre *S* (s. Fig. 10), mittelst welcher das aus dem Apparate ausfliessende Quecksilber in den graduirten Cylinder *G* fliesst. Es wird dann der Mantel $\alpha\beta\gamma\delta$ in geeignete Lage gebracht, der Deckel mit dem Dichtungsringe aufgesetzt und die Klemmschrauben angezogen. Durch die mittlere Oeffnung *f* des Deckels wird

1) Ich machte am liebsten die genannten Vorbereitungen am Schlusse des Tages, sodass, beim Beginne der Arbeiten am nächsten Tage, ich direct mit der nächst zu beschreibenden Operation anfangen konnte.

2) Die „vollständige“ Verschraubung erkennt man an der Lage eines kleinen Zeichens, welches auf der Schraubenmutter angebracht ist.

die abgemessene Menge der Heizflüssigkeit hineingegossen und dann diese Oeffnung, mittelst des Vorstosses *V*, mit dem Kühler *K* in Verbindung gebracht; endlich werden die Thermometer *TT* in den für sie bestimmten Oeffnungen befestigt, und es wird mit dem Erhitzen begonnen, gleichzeitig ein kleiner Schirm *H* zwischen dem Apparate und dem graduirten Cylinder hingestellt. Von jetzt bis zur vollständigen Vergasung der Substanz ist die Anwesenheit des Experimentators kaum nothwendig. Anfangs fliesst das Quecksilber tropfenweise aus der Mündung der Capillare *C* aus; ist der Siedepunkt der Substanz erreicht, so wird dies Herausfliessen ein lebhafteres, zuweilen in Form eines kleinen Strahles, endlich, wenn die Substanz verdampft, hört das Herausfliessen auf. — Nun umhüllt man das Heizgefäss mit einem Filzmantel, macht die Flamme möglichst gross und lässt die Heizflüssigkeit etwa 15 Minuten lang lebhaft sieden.¹⁾ Fliesst aus der Capillaren kein Quecksilber mehr aus, so ist die Dampfbildung vollendet; wir lesen am graduirten Cylinder das Volumen des herausgeflossenen Quecksilbers ab und suchen in unserer Tabelle die entsprechende Theilung der angefertigten Papierscheibe, auf welche man die Capillare einstellen muss, damit sie in die „Normale Lage“ kommt, wonach der Theilkreis angebracht wird und die Einstellung selbst geschieht. Man lässt den Apparat mit der neuen Stellung der Capillaren nicht länger als zehn Minuten stehen; das, bei der erwähnten Drehung der Capillaren, noch herausgeflossene Quecksilber wird wie früher in dem graduirten Cylinder aufgefangen und, nachdem es in ein geeignetes Gefäss übergegossen, bis auf Centigramme genau gewogen. Gleichzeitig wird bei der Einstellung der Capillaren in ihre letztere Lage der herrschende Barometerdruck abgelesen, sowie durch Ablesung der Thermometer²⁾ im Dampfe constatirt, ob sich etwa die Temperatur des Dampfes der Heizflüssigkeit durch irgend eine Ursache geändert hat.

1) Bei den Arbeiten mit Anilin wurde auch der Deckel des Gefässes mit Filz bedeckt.

2) Das eine von ihnen befindet sich im oberen, das andere im unteren Theile des mit Dampf erfüllten Raumes des Heizgefässes.

Damit sind alle Beobachtungen für die Bestimmung der Dampfdichte vollendet. Man befreit den Apparat vom Filzmantel und lässt ihn langsam abkühlen, wobei, infolge der Condensation des Dampfes, in den Apparat an Stelle dessen Luft eintreten wird; falls die Heizflüssigkeit vor Feuchtigkeit geschützt werden soll, wie z. B. das bei Anwendung von absolutem Alkohol der Fall ist, wird das offene Ende des Kühlers mit einer Chlorcalciumröhre verbunden. Nach der Abkühlung wird der Apparat auseinander genommen, wobei man den umgekehrten Weg wie bei seiner Zusammenstellung einschlägt. Die Heizflüssigkeit wird in das für sie bestimmte Gefäss ausgegossen und der Apparat zu einer neuen Dampfdichtbestimmung hergerichtet.

Das beschriebene Verfahren bleibt unter allen Umständen dasselbe.

Was die Heizflüssigkeiten anlangt, so gebrauchte ich die allgemein zu diesem Zwecke verwendete und von A. W. Hofmann eingeführten, Wasser und Anilin¹⁾, zu denen ich noch nach dem Beispiele von V. Meyer, das Xylol²⁾ und endlich für sehr niedrig siedende Körper (Aethyläther, Schwefelkohlenstoff, Chloroform) absoluten Alkohol³⁾ mit sehr gutem Erfolge angewendet.

Der absolute Alkohol hat sich bei vielen Versuchen, die ich damit angestellt habe, so gut bewährt, dass ich seine Anwendung als Heizflüssigkeit nur empfehlen kann, dabei möchte ich nur auf einige Bedingungen aufmerksam machen, deren Erfüllung sich aus der Erfahrung als nothwendig erwiesen hat. Der absolute Alkohol wird über Aetzkalk in Stücken aufbewahrt, ebenso wie dies bei der Wasserbefreiung desselben nach dem Verfahren von Mendelejeff geschieht; ausserdem ist es gut, in das Heizgefäss, und zwar auf dem Dache des Mantels, einige Stücke Aetzkalk zu bringen. Arbeitet man unter diesen Bedingungen, so ist es geradezu zu bewundern, wie man stundenlang eine vollkommen constante Temperatur unterhalten kann.

1) Siedepunkt 180—181°.

2) Siedepunkt 136—137°.

3) Siedepunkt 77,5—78°.

Die Füllung des Fläschchens wurde bei flüssigen Substanzen auf folgende Weise ausgeführt.

Das ausgetrocknete Fläschchen, in welches man unter Umständen neben der Substanz eine bekannte Menge von Quecksilber bringt, wird mit Filtrirpapier umgeben, dann mit der betreffenden Substanz gefüllt und sofort mit dem Stöpsel verschlossen. Alsdann ergreift man es mit einer Pincette und entfernt mittelst Filtrirpapier die etwa noch anhängende Flüssigkeit; nun wird das Fläschchen gewogen und nach der Wägung sofort in den Apparat nach den angedeuteten Regeln hineingebracht. Das Umwickeln mit Papier ist namentlich bei niedrig siedenden Flüssigkeiten nothwendig, damit diese nicht durch die Handwärme verdampfen, wodurch bei der später eingetretenen Abkühlung des Fläschchens die Entstehung von Luftblasen in der Flüssigkeit bedingt ist.

Die mit Sorgfalt rein hergestellten Flüssigkeiten, die mir zur Bestimmung der Dampfdichte dienten, wurden in Glashüllen von der Form Fig. 7 aufbewahrt. Zum Herausgiessen der Flüssigkeit werden beide zugeschmolzene Enden abgebrochen, und nach dem Ausgiessen der Flüssigkeit, was sehr bequem und tropfenweise geschieht, sofort wieder zugeschmolzen, sodass die Substanz kaum mit Luft in Berührung kommt.

Feste Körper, welche schmelzen, ohne sich dabei zu verflüchtigen, werden im Fläschchen selbst geschmolzen; man bringt es zu diesem Zweck in ein Sandbad von geeigneter Temperatur; beabsichtigt man einen Theil des Fläschchens mit Quecksilber zu füllen, so wird dieses zunächst in das Fläschchen hineingebracht und die Substanz im Fläschchen über dem Quecksilber geschmolzen. In beiden Fällen ist der Stöpsel des Fläschchens, noch während die Substanz halb geschmolzen ist, hineinzupressen. Feste Körper, welche nicht schmelzen ohne sich dabei zu verflüchtigen, können in ein abgewogenes Stückchen Bleipapier eingewickelt und dann in demselben fest zusammengedrückt werden, wonach die so eingewickelte Substanz in das Fläschchen hineingeschoben, gewogen und der frei gebliebene Raum im Fläschchen mit

Quecksilber erfüllt wird. Dieses letzte Verfahren habe ich auch, anstatt des Einschmelzens, beim Oxalsäuremethyläther angewendet und sehr bequem gefunden, da man dabei sicher sein kann, dass die Luft aus den Zwischenräumen der porösen Substanz vollkommen entfernt ist. — Jedenfalls ist ein solches Verfahren sicherer als das von einigen Experimentatoren angewendete und vorgeschlagene Eindrücken der Substanz in das Fläschchen. — Nachtheilig wäre dabei vielleicht die durch das Hineinbringen von Blei entstehende Verunreinigung des Quecksilbers, welche letztere übrigens nur sehr gering sein kann.

Die Reinigung des „Dampfdichtedilatometers“, welche unbedingt vor jeder neuen Dampfdichtebestimmung vorgenommen werden soll, wird auf folgende Weise bewerkstelligt. Die Oeffnung der Glasröhre *b* wird mittelst eines Gummistöpsels, durch welchen eine kleine, rechtwinklig gebogene, Glasröhre hindurchgeht, verschlossen; durch diese Röhre wird der Apparat unter der Luftpumpe mit der Waschflüssigkeit gefüllt und ebenso diese letztere daraus entfernt. Ferner wird die Stahlhülse, um jede Berührung mit Säuren und dergleichen zu vermeiden, mit einem Gummiüberzug versehen. Von den Metalltheilen des Apparates bedarf die Hülse natürlich keiner Reinigung, wohl aber müssen von Zeit zu Zeit die sich reibenden Oberflächen des Verschlusses mit Graphitpulver versehen werden.

Zum Auswaschen wurde concentrirte Salpetersäure und Wasser angewendet; zum Schlusse wird einmal mit absolutem Alkohol ausgepült, wodurch ein schnelleres Trocknen des Apparates¹⁾ erreicht wird.

Das Gesagte möge genügen, um die praktischen Manipulationen mit dem Apparate als hinreichend erklärt zu betrachten, und ich wende mich nunmehr zur:

Berechnung der Resultate.

Die Berechnung der Dampfdichte aus den Versuchsbeobachtungen geschieht nach der einfachen Formel:

1) Durchs Saugen von warmer Luft durch den sich im Trockenschranke befindlichen Apparat.

$$DD = \frac{m}{V_t} \cdot \frac{760 (1 + 0,003\,665 \cdot t)}{0,001\,292\,8} \cdot \frac{1}{b_0 + \delta_t - \sigma_t},$$

wo:

m das Gewicht der angewendeten Substanz in Grammen,

t die Temperatur des Dampfes der Heizflüssigkeit,

v_t das Volumen des Dampfes bei t° in Cubikcentimetern.

b_0 der auf 0° reducirte Barometerstand während des Versuches in Millimetern,

δ_t die der Temperatur t entsprechende Capillardepresion in Millimetern,

σ_t die Spannkraft des Quecksilberdampfes für die Temperatur t in Millimetern,

0,003 665 der Ausdehnungscoefficient der trockenen Luft,

0,001 292 8 die Dichtigkeit der trockenen Luft bei 0° und 760 mm Druck bedeuten.

Diese Formel, deren einfache Ableitung ich wohl nicht auszuführen brauche, enthält sämtliche Correctionen und ist daher auch die einzige, die für das Verfahren angegeben werden kann. Es erübrigt mir nur, die Berechnung von v_t , d. h. des Volumens des Dampfes bei t° näher zu besprechen, da die übrigen Glieder der Formel nur eine mechanische Rechnung erfordern.

Zur Bestimmung des Volumens des Dampfes ist, wie oben erwähnt, die Kenntniss der Menge des Quecksilbers erforderlich, welche anfangs im Apparate enthalten ist. Diese Bestimmung kann aber offenbar durch directe Wägung nicht ausgeführt werden, weil ja der Apparat dabei schon in das Heizgefäß eingebracht, resp. fest damit verbunden ist; sie wird nunmehr rechnerisch, und zwar viel genauer, als durch unmittelbare Wägung, ausgeführt. Da wir stets als Anfangstemperatur r die Zimmertemperatur nehmen, so genügt es offenbar, das Gewicht des Quecksilbers im Apparate bei 0° und bei einer weiteren constanten Temperatur t (also z. B. bei der Temperatur des siedenden Wassers) zu kennen, um aus diesen Daten einen Ausdruck abzuleiten, der uns das Gewicht des Quecksilbers im Apparate für jede beliebige, zwischen 0° und t° liegende Temperatur unmittelbar gibt. Bezeichnen wir mit

G_0 und G_t die Gewichte des Quecksilbers im Apparate bei 0° und bei t° , so lautet der oben genannte Ausdruck:

$$G_t = G_0 - \frac{G_0 - G_t}{t} \cdot \tau$$

gleich dem Gewichte des Quecksilbers im Apparate für die Anfangstemperatur τ .¹⁾ Dabei ist aber nur der mehrfach erwähnte Umstand nicht zu vergessen, dass bei sämtlichen Bestimmungen der Gewichte des Quecksilbers das Fläschchen sich im Apparate befindet und also ebenfalls mit Quecksilber gefüllt gedacht werden soll.

Haben wir nun, wie das bei der Bestimmung der Dampfdichte der Fall ist, im Fläschchen eine gewisse Menge Substanz, so muss aus dem Gewichte G_t diejenige Menge von Quecksilber subtrahirt werden, welcher der eingeführten Substanzmenge entspricht; dies ist aber ohne Schwierigkeit auszuführen. Denn in der That: wir kennen einerseits das Gewicht Q_f des Quecksilbers, welches das Fläschchen fasst, und andererseits die Menge des Quecksilbers, welches im Fläschchen neben der Substanz enthalten ist, Q_s ; folglich ist die Differenz der beiden Grössen Q_f und Q_s der gesuchte Subtrahend der Grösse G_t .

Haben wir nun das „Anfangsgewicht“ des Quecksilbers im Apparate, die Menge des durch die Bildung des Dampfes aus dem Apparate verdrängten Quecksilber G_t sowie das bekannte Volumen V_a des Apparates bei der Temperatur t der Heizflüssigkeit, so findet man ohne weiteres das gesuchte Volumen V_t des Dampfes.

Es möge folgendes Beispiel (Abschrift vom Versuchshefte) die Art der Berechnung der Dampfdichte aus den Versuchszahlen näher auseinandersetzen.

1) Für den Apparat, dessen ich mich bei meinen Versuchen bediente, war der Werth von G_t :

$$G_t = 790,3024 - 0,1477 t; \text{ wobei } \begin{cases} G_0 = 790,3024 \\ G_t = 775,7643 \dots (t = 98,4^\circ). \end{cases}$$

Beispiel.

Versuch Nr. 9.

Substanz, deren Dampfdichte zu bestimmen ist: Aethyl-
alkohol $C_2H_6O = 46$.

Ihre Dampfdichte $\left\{ \begin{array}{l} \text{berechnet } 1,5939, \\ \text{gefunden } 1,6072. \end{array} \right.$

Heizflüssigkeit: Wasser.

I. Beobachtungen.

Barometer bei $17^\circ = b = 720,5$ mm.

Barometer bei $0^\circ = b_0 = 718,38$ mm,

„Anfangstemperatur“ $= \tau = 17,2^\circ$,

Temperatur des Dampfes $= t = 98,43$.

II. Wägungen.

Substanz + Fläschch. + Quecksilb. + Uhrglas $= \alpha = 7,3668$,

Fläschch. + Quecksilb. + Uhrglas $= \beta = 7,3218$,

Fläschchen + Uhrglas $= \gamma = 5,9147$.

Daraus: $m = \alpha - \beta = 0,0450$; $Q_s = \beta - \gamma = 1,4071$.

Bei t° herausgefloss. Quecksilb. + Wägungsglas $= \eta = 453,281$,

Wägungsglas allein $= \zeta = 30\,631$.

Daraus: $Gt = \eta - \zeta = 422,650$.

III. Constante Zahlen für den Versuch.

δ_t = Capillardepression bei $t^\circ = 8,9$ mm,

σ_t = Spannkraft des Quecksilberdampfes bei $t^\circ = 0,72$ mm,

Q_f = Gewicht des Quecksilbers, welches das Fläschchen
bei gewöhnlicher Temperatur fasst, $= 2,577$ g,

G_s = Anfangsgewicht des Quecksilbers im Apparate für
die Temperatur $\tau = 787,763$ g,

V_a = Volumen des Apparates bei $t^\circ = 58,096$ ccm.

IV. Berechnungen.

Angefangen mit der Menge von Quecksilber: $787,763$ g,
vermindert um die Grösse: $Q_f - Q_s = 2,5770 - 1,4071 = 1,1699$ g.

also mit $787,763 - 1,1699 = 786,5931$ g Quecksilber.

Bei t° ist aus dem Apparate das Gewicht $G_t = 422,650$
von Quecksilber herausgeflossen.

Es bleiben im Apparate bei t° :

$786,5931 - 422,650 = 363,9431$ g Quecksilber.

welche das Volumen:

$$\frac{363,9431}{13,596 (1 - 0,0001815 \cdot 98,43)} = 27,255 \text{ ccm einnehmen.}$$

Es ist aber das Volumen des Apparates bei

$$t^0 = V_a = 58,096 \text{ ccm;}$$

folglich ist das gesuchte Volumen des Dampfes bei t^0 :

$$58,096 - 27,255 = 30,841 \text{ ccm} = V_1.$$

Setzen wir nun unsere Versuchszahlen in die oben angeführte Formel, so erhalten wir:

$$DD = \frac{0,0450}{30,841} \cdot \frac{760 (1 + 0,003665 \cdot 98,43)}{0,0012928} \cdot \frac{1}{718,38 + 8,9 - 0,72},$$

welcher Ausdruck uns, nach Berechnung, das oben schon angeführte Resultat: $DD = 1,6072$ ergibt.

Behufs bequemer Rechnung kann offenbar der Werth des Bruches:

$$\frac{760 (1 + 0,003665 \cdot t)}{0,0012928}$$

für jeden Siedepunkt der anzuwendenden Heizflüssigkeiten ein und für alle mal ausgerechnet werden, sodass die Rechnung eine höchst einfache wird.

Belegversuche.

Um das Verfahren der Dampfdichtebestimmung mit meinem Apparate einer Controle zu unterwerfen, habe ich eine grössere Reihe von Versuchen mit Körpern ausgeführt, deren Siedepunkte zwischen den Temperaturen 35—180° lagen, und die zu diesem Zwecke chemisch rein hergestellt wurden. Die dabei erhaltenen Zahlen stimmen sowohl untereinander als auch mit den theoretisch berechneten vortrefflich überein und beweisen zur Genüge, dass der Apparat den gestellten Anforderungen¹⁾ vollständig entspricht.

Ich gedenke diesen Apparat auch zu benutzen, um die Verhältnisse bei abnormen Dampfdichten sowie das Verhalten der Dämpfe bei verschiedenen Temperaturen genauer zu studiren.

1) Siehe den Anfang dieses Berichtes.

	S u b s t a n z			Heiz- flüssigkeit	D a m p f d i c h t e		Menge der bei jeder einzelnen Bestimmung an- gew. Substanz in g
	N a m e	Formel	Mol.-Gew.		Berechnet	Gefunden	
1	Aethyläther	$C_4H_{10}O$	74,0	34,5—35,0°	2,5641	2,591 2,602 2,586	0,0235 0,0125 0,0092
2	Schwefelkohlenstoff	CS_2	76,0	46,0°	2,6334	2,610 2,625 2,624	0,0177 0,0234 0,0276
3	Chloroform	$CHCl_3$	119,5	61,0—61,5	4,1407	4,120; 4,110 4,109*; 4,098*	0,1798; 0,3093 0,2772*; 0,2414*
4	Aethylalkohol	C_2H_6O	46,0	77,5—78,0	1,5939	1,613 1,607 1,611	0,0112 0,0450 0,0178
5	Benzol	C_6H_6	78,0	81,0—82,0	2,7027	2,713; 2,721 2,739; 2,728	0,0127; 0,0093 0,0089; 0,0082
6	Wasser	H_2O	18,0	98,2—98,4	0,6237	0,628 0,621	0,0072 0,0061
7	Toluol	C_7H_8	92,0	109,5—111,0	3,1878	3,127 3,141	0,0444 0,0379
8	Essigsäure	$C_2H_4O_2$	60,0	119,0—119,5	2,0790	1,983 1,977	0,0424 0,0217
9	Oxals. Methyläther	$C_2H_6O_4$	118,0	161,5	4,0887	4,106 4,115	0,1123 0,1205
10	Benzylchlorid	C_7H_7Cl	126,5	175,0—176,0	4,3832	4,411 4,409	0,1179 0,0982

- Bemerkungen. 1) Die bezeichneten Siedepunkte beziehen sich auf die von mir angewendeten Substanzen bei einem mittleren Barometerdrucke von 115—120 mm; ebenso für die Heizflüssigkeiten.
- 2) Beim Chloroform sind mit * die Resultate der Dampfdruckbestimmungen, bei welchen Wasser als Heizflüssigkeit angewendet wurde, bezeichnet.

In der beigegeführten Tabelle (p. 491) sind die Resultate beinahe sämtlicher Bestimmungen, die ich ausgeführt habe, eingetragen, die letzte Columne der Tabelle enthält die bei jedem Versuche angewendete Menge der zu untersuchenden Substanz.

Meine Absicht dabei war, daraus ersehen zu lassen, dass man mit einer sehr geringen Menge Substanz noch genaue Resultate erzielt, ja sogar erlaube ich mir zu behaupten, dass noch mit 5 mg, vorausgesetzt dass die Wägung der Substanz bis auf die vierte Decimale genau ist, scharfe Resultate erhalten werden können.

Bei den Arbeiten mit dem „Dampfdichtedilatometer“ braucht die manuelle Geschicklichkeit des Arbeitenden nicht grösser zu sein als wie bei der Bestimmung der Dampfdichte nach den anderen Verfahren, welche auf dem „Verdrängungsprincipe“ beruhen. Im Gegentheil, die Arbeit mit dem Apparate erfordert weder besondere Kunstgriffe, Nachhelfen und dergleichen, noch eine vorherige „Einübung“, sondern nur eine sorgfältige Ausführung.

Ich will nicht unterlassen darauf hinzuweisen, dass auch zur raschen und annähernden Untersuchung einer Substanz nach einer der „Vergleichungsmethode von Landolt¹⁾“ ähnlichen Methode, der Apparat sich sehr gut eignet. Man braucht nur ein und dasselbe Fläschchen zuerst mit einer „Normalsubstanz“²⁾ und dann mit der zu untersuchenden zu füllen und beide mal die Menge des Quecksilbers im graduirten Cylinder zu beobachten, welche infolge der Verdampfung der Substanzen, bei einer und derselben Temperatur, aus dem Apparate herausgeflossen ist.

München, den 1. Mai 1884.

1) Landolt, Chem. Ber. 5. p. 497. 1872.

2) Dient als Vergleichungssubstanz ein Körper von ungleicher chemischer Zusammensetzung, so werden beide Substanzen im Verhältnisse ihrer Moleculargewichte abgewogen.

II. Ueber ein neues Verfahren zur Bestimmung der Dampfdichte hochsiedender Körper; von Nik. von Klobukow.

Stud. chem. an der technischen Hochschule zu München.

(Hierzu Taf. VI Fig. 11–17.)

Nachdem es mir gelungen ist, mit Anwendung meines Apparates¹⁾ die Frage über die genaue Bestimmung der Dampfdichte für niedrigsiedende Körper in präziser und einfacher Weise zu lösen, bemühte ich mich, einen Apparat zu construiren, der, den Bedingungen der Einfachheit und Genauigkeit möglichst entsprechend, zur Bestimmung der Dampfdichte für hochsiedende Körper geeignet ist. Dabei fasste ich zunächst die Kategorie von Körpern ins Auge, deren Siedepunkt über 200° liegen, und welche die Wood'sche Legirung nicht angreifen. Zwar kann man dazu die präzise Dumas-Deville-Troost'sche Methode anwenden, da sie aber ziemlich schwierig (mit kleinen Mengen von Substanz gar nicht) auszuführen ist, so ist es begreiflich, wenn ich bestrebt war, sie durch eine leichter ausführbare zu ersetzen.

Dasselbe Ziel verfolgend, hat V. Meyer seine Methode der Dampfdichtebestimmung²⁾ mit Anwendung des von A. W. Hofmann herrührenden „Verdrängungsverfahren“ angegeben, welche unzweifelhaft als wichtiger Fortschritt im Gebiete der sonst dürftigen Methoden der Untersuchung der Dampfdichte hochsiedender Körper zu bezeichnen ist.

Allein im Bezug auf die Leichtigkeit der Ausführung lässt diese Methode noch manches zu wünschen übrig, abgesehen von einigen kleinen Fehlerquellen³⁾, die ihr anhaften, und einer durchaus nicht leichten Rechnung.

1) Siehe meine vorige Abhandlung.

2) V. Meyer, Chem. Ber. 9. p. 1216. 1876.

3) Ich verweise nur auf die Art und Weise, wie die wirksame Quecksilbersäule gemessen wird, auf die Füllung des Apparates und Einführung der Substanz, sowie auf den Umstand, dass die Capillardepression in der schmäleren Schenkelröhre nicht berücksichtigt worden ist.

Meinen Apparat gründete ich auf das Archimedische Princip und gab ihm die einfache Gestalt eines Aräometers. Dem entsprechend will ich den Apparat in der Folge als „Dampfdichtearäometer“ bezeichnen und gehe nunmehr zur Beschreibung desselben über.

Denken wir uns ein Aräometer, mit einer irgendwie angebrachten Vorrichtung zum Auflegen von Gewichten, in einer Flüssigkeit (sagen wir sogleich in der anzuwendenden Sperrflüssigkeit) schwimmen, und bei einer gewissen Temperatur t^0 (also z. B. bei der Temperatur des Dampfes) bis auf eine bestimmte Marke m in diese Flüssigkeit eintauchend, wobei ein Theil des Aräometerkörpers ebenfalls mit der Sperrflüssigkeit gefüllt ist. Bringen wir jetzt in den letztgenannten Theil des Aräometers eine abgewogene Menge der Substanz, deren Dampfdichte wir bestimmen wollen, und lassen sie darin verdampfen, so wird offenbar durch den gebildeten Dampf eine bestimmte Menge der Sperrflüssigkeit verdrängt; der ganze Apparat wird dadurch leichter werden und aufschwimmen. Um ihn nun wieder bis auf die früher genannte Marke m einzutauchen, wird eine bestimmte Belastung Q der Wagschale des Aräometers erforderlich sein, welche Belastung, mit Rücksicht auf den durch das Einbringen der Substanz bedingten Auftrieb des Apparates, uns unmittelbar das dem Volumen des Dampfes entsprechende Gewicht der verdrängten Sperrflüssigkeit angibt. Kennen wir ausserdem noch den Druck, unter welchem sich das gemessene Volumen des Dampfes befindet, so haben wir alle zur Bestimmung der Dampfdichte erforderliche Daten.

Es handelte sich nun vor allem darum, die Anwendbarkeit der neuen Methode durch passende Versuche einer strengen Prüfung zu unterwerfen, wobei es mir am zweckmässigsten erschien, diese Versuche bei möglichst ungünstigen Bedingungen auszuführen. Zu diesem Behufe operirte ich bei diesen vorläufigen Probeversuchen mit Quecksilber als Sperrflüssigkeit, und zwar bei einer Temperatur von 100^0 , womit offenbar gleichzeitig constatirt werden konnte, ob das Verfahren auch als solches, d. h. für niedrige Temperaturen anwendbar ist.

Die dabei erzielten, höchst befriedigenden Resultate veranlassen mich, schon heute darüber zu berichten.

Im Folgenden werde ich nur das bereits erprobte Verfahren mit Anwendung von Quecksilber als Sperrflüssigkeit besprechen und nur hier und da auf diejenigen Abänderungen hinweisen, welche ich bei den Arbeiten bei hohen Temperaturen, mit Anwendung der Wood'schen Legirung als Sperrflüssigkeit, vorzunehmen gedenke.

Der Apparat, dessen ich mich bei meinen Versuchen bediente, und welcher in den Fig. 11 und 12 schematisch abgebildet ist, besteht aus drei wesentlichen Theilen: 1) dem aräometerähnlichen Glasgefässe *abc*; 2) dem damit fest verbundenen Stahlrahmen *RR* und 3) der an letzterem angebrachten Wagschale *W*.

Der Aräometerkörper besteht aus dem cylindrischen dünnwandigen Gefässe *a* ($\frac{1}{2}$ mm Wandstärke), welches oben abgeschlossen ist, unten eine Oeffnung *o* besitzt, mittelst welcher es mit der Sperrflüssigkeit im Schwimmgefässe communicirt; das ist derjenige Theil des Apparates, in welchem die Bildung des Dampfes stattfindet. Am oberen Theile des Gefässes *a* ist der hohle Theil *b* in Form einer Kugel angeschmolzen, welcher durch die Röhre *c*, die gleichzeitig als Stiel des Apparates dient, mit der Luft communicirt; diesem Theile des Aräometerkörpers kommt lediglich die Function eines Schwimmers zu, dessen Dimensionen so berechnet werden müssen, dass er dem Gewichte sämtlicher Theile des Apparates, beim Eintauchen des Aräometers in die betreffende Flüssigkeit (welch' letztere dabei auch den Theil *a* des Aräometerkörpers erfüllt), das Gegengewicht hält.

Mit anderen Worten, es muss das Gewicht der durch den Schwimmer *b* verdrängten Sperrflüssigkeit grösser sein, als das Gewicht der sämtlichen Theile des Apparates, sodass er stets in der Flüssigkeit so zu schwimmen kommt, dass er nur durch nachträgliches Auflegen von Gewichten auf die Wagschale *W* bis an die Marke *m* einsinkt.

Der Rahmen *RR* aus hartem Stahl muss den Bedingungen einer geringen Biegsamkeit und eines kleinen

Gewichtes möglichst entsprechen; er ist mit der Eisenhülse *H* fest verbunden, und zwar in der Art, dass er in entsprechende Oeffnungen der letzteren hineingeschoben wird, sodass er, falls nothwendig, bequem von derselben getrennt werden kann. Die mittlere Oeffnung der Hülse *H* entspricht den Dimensionen des Aräometerstieles *c*, sodass durch einfaches Aufschieben der ersteren auf den Stiel bis an den kleinen Wulst *s* am Stiele die Verbindung dieser Theile bewerkstelligt wird.

Das eiserne¹⁾ Gefäss *mnpq* mit Quecksilber, in welchem der Apparat zu schwimmen kommt, befindet sich innerhalb eines entsprechend eingerichteten doppelwandigen Heizgefässes *efgh* (Fig. 12), welches von unten mittelst eines grossen, auf der Unterlage *M* stehenden Brenners *B* geheizt wird; auf dieser Unterlage ruht auch das Heizgefäss. Der Dampf der Heizflüssigkeit wird durch die Röhre *I* abgeleitet, oder, falls man eine Condensation des ersteren vornimmt, in das Heizgefäss zurückgeführt. Endlich dient der Ring *Q*, welcher selbst mit dem Heizgefässe in fester Verbindung steht, zur sicheren Führung des Aräometers.

In diesem Ring, dessen zweckmässigste Einrichtung auf der Fig. 14 angedeutet ist, bewegt sich der dünne Metalldraht *F*, welcher als Verlängerung des Aräometerstieles dient; er ist mit demselben durch blosses Hineinschieben in die Röhre verbunden.

Anstatt des Ringes, wie er auf Fig. 14 abgebildet ist, kann auch einfach eine Drahtschleife, wie Fig. 13 zeigt, gebracht werden. Durch diese Einrichtung wird ein etwaiges Anstossen oder eine Reibung des Aräometerkörpers an den Wandungen des Gefässes *mnpq* verhindert, ausserdem ist durch den Rahmen der Schwerpunkt des Apparates so tief verlegt, wodurch ein senkrechtesschwimmen desselben erzielt ist.

Das eine Ende eines Stromkreises, bestehend aus der Elemente *E*, dem Galvanometer *G* und dem Commutator

1) Ich bediente mich bei meinen ersten Versuchen sehr bequem eines Thongefässes, wie es bei den galvanischen Batterien angewendet wird.

ist mit dem Ringe Q und von da, mittelst der führenden Stange F , mit einem Drahte, der durch die Oeffnung des Aräometerstiels hindurchgeht und bei m endigt, leitend verbunden; ferner das andere Ende des Stromkreises mit dem Quecksilber des Gefässes $mnpq$ verbunden (eine Einrichtung, deren Zweck später klargelegt wird).

Ueber die praktische Ausführung dieses einfachen Apparates ist wohl nur wenig zu sagen. In der Fig. 13 ist der vollkommen montirte Apparat etwa in ein Viertel der natürlichen Grösse abgebildet, wobei die Bezeichnungen der Fig. 12 beibehalten sind.

Was die Dimensionen der einzelnen Theile anlangt, so können und brauchen darüber keine Angaben gemacht zu werden: es richten sich die Dimensionen des Rahmens und der Wagschale nach denen des Aräometers, und ebenso die des Gefässes $mnpq$.

Das mit Quecksilber gefüllte cylindrische Eisengefäss $mnpq$ ruht auf einer Holzunterlage iii , welche auf dem Boden des Heizgefässes angebracht ist; es ist auch nicht fest mit dem Deckel des Heizgefässes verbunden, sondern kommt in einer entsprechenden Oeffnung desselben zu stehen und wird durch Auflegen eines starken Gummibandes mit dem Rande der genannten Oeffnung dicht verbunden.

Im Deckel des Heizgefässes befinden sich weiter Oeffnungen zum Einbringen des Thermometers T , der Dampfableitungsröhre v und der Röhre r , die zum Hineinbringen der Heizflüssigkeit dient.

Endlich ist am Deckel die Stange y aus Glas, Holz oder einem anderen Isolator befestigt, welche die Klemmen K' und K trägt, mittelst welcher die Zuleitung in den führenden Ring Q , resp. in das Quecksilber des Gefässes $mnpq$ herzustellen wird. Von aussen werden die Wandungen des Deckels des Heizgefässes mit Filz oder Carton umgeben; die Oeffnung des Schwimmgefässes wird ausserdem nach der Einführung des Aräometergefässes durch einen aus zwei Hälften bestehenden Cartondeckel D verdeckt, so-

dass nur für den Stiel des Apparates eine Oeffnung zurückbleibt.¹⁾

Die Einrichtung des Gehäuses, innerhalb dessen die Wagschale *W* zu hängen kommt, und der anderen Theile, die aus der Zeichnung leicht zu ersehen sind, brauche ich nicht näher zu beschreiben und wende mich nunmehr zur:

Beschreibung der Ausführung einer Dampfdichtebestimmung mit dem „Dampfdichtearäometer“.

Zu diesem Zwecke ist zunächst die Ermittlung zweier constanten Grössen für den gegebenen Apparat erforderlich und zwar:

1) die Bestimmung des Gewichtes des Quecksilbers *G_a*, welches der Theil *a* des Aräometerkörpers bei der Temperatur t^0 , bei welcher die Dampfdichte genommen wird, fasst;

2) die Bestimmung der Belastung *Q* der Wagschale, unter welcher der gleichfalls mit Quecksilber gefüllte Apparat bei der Temperatur t^0 bis zur Marke *m* eintaucht. Es ist dies nichts anderes als der Auftrieb, welchem der Apparat ohne Dampf ausgesetzt ist.

Ich bemerke hierbei, um Wiederholungen zu vermeiden, dass bei den genannten und sämmtlichen nächstfolgenden Bestimmungen das Fläschchen, in welchem die zu untersuchende Substanz in den Apparat gebracht wird, sich stets in demselben befindet, wodurch die Correction für dasselbe von vornherein ausgeschlossen ist. Die Bestimmung des Gewichtes des Quecksilbers im Apparate bei der Temperatur t^0 geschieht in der einfachen Weise, dass man den Theil *a* des Aräometergefässes durch die Oeffnung *O* mit trockenem Quecksilber füllt, das mit Quecksilber gefüllte Fläschchen hineinbringt und das ganze (Oeffnung *O* nach oben gerichtet)

1) Bei den Arbeiten mit der Wood'schen Legirung bei hohen Temperaturen (Schwefeldampf u. dgl.) gedenke ich ein Gefäss aus emaillirtem Eisen zu gebrauchen, wobei das Schwimmgefäss mit dem Deckel des Heizgefässes in fester Verbindung stehen wird.

in einem geeigneten Gefässe der Temperatur t^0 im Dampfe der betreffenden Heizflüssigkeit aussetzt.

Nach etwa $\frac{1}{4}$ stündigem Erhitzen lässt man erkalten und wägt das im Apparate zurückgebliebene Quecksilber, welches man zu diesem Zwecke in ein geeignetes Gefäss ausgegossen hat. Dabei ist aber einiges über diese Manipulation zu bemerken. Die Oeffnung O wird mittelst einer kleinen schweren Eisenplatte zugedeckt, wodurch: erstens das Aufsteigen des Fläschchens vermieden, zweitens der Ungenauigkeit der Bestimmung infolge der Bildung einer Quecksilberkuppe in der Oeffnung O vorgebeugt ist. Das Aufhängen des mit Quecksilber gefüllten Apparates im Dampfe der Heizflüssigkeit geschieht in einer leicht begreiflichen Weise und bedarf keiner näheren Erklärung.

Um den Auftrieb des Apparates ohne Dampf bei der Temperatur t^0 zu bestimmen, füllt man das Aräometergefäss mit Quecksilber, bringt in dasselbe das ebenfalls mit Quecksilber gefüllte Fläschchen, verschliesst alsdann die Oeffnung O mit dem Finger und steckt den Apparat in das Quecksilber des Gefässes $mnpq$ ein. Alsdann wird der Stiel des Aräometers in die Hülse H des Rahmens RR hineingeschoben, resp. mit demselben in feste Verbindung gebracht, die Wagschale W an den letzteren angehängt. Hierauf wird der Stab F durch das spiralförmig gewundene Ende des Zuleitungsdrahtes in die Oeffnung des Stieles c gesteckt (siehe Fig. 11 und 12); ferner wird der führende Ring Q durch Verstellung der Klemmschraube K' (siehe Fig. 13) so weit heruntergeschoben, dass sich der Stab F in demselben auf und ab bewegt, wobei durch gegenseitige Berührung auch diese Theile miteinander leitend verbunden sind.

Zur Sicherheit des Contactes kann auch am führenden Ringe ein Streifen Kupferfolie X (siehe Fig. 13) angebracht werden, welcher sich alsdann an den Draht F federnd anlegt.

Der so vollständig montirte Apparat wird nun erwärmt, indem unter das Heizgefäss die Flamme eines grossen Brenners gestellt wird. Ist das Sieden der Heizflüssigkeit eingetreten, so überzeugt man sich, ob auch das Quecksilber im Schwimmgefässe die Temperatur des Dampfes angenom-

men hat; innerhalb 10—15 Minuten ist dies der Fall, und es zeigt das Thermometer in den oberen und unteren Schichten des Quecksilbers dieselbe Temperatur. Es erübrigt alsdann nur noch die Belastung der Wagschale zu bestimmen, bei welcher das Aräometergefäß bis zur Marke *m* in das Quecksilber eintaucht. Dieser letztere Moment wird sich durch einen Ausschlag des Galvanometers *g* kennzeichnen, da ja offenbar durch die Berührung des in *m* mündenden Drahtes mit dem Quecksilber des Gefäßes der Strom geschlossen wird. Die Wägung selbst geschieht auf dieser eigenartigen Wage genau so wie auf einer gewöhnlichen, nur in viel kürzerer Zeit. Auf die Wagschale wird ein bestimmtes Gewicht aufgelegt und einige Zeit abgewartet, bis die dabei stattfindenden verticalen Schwingungen des Apparates aufgehört haben, während der Strom mittelst des Commutators ausgeschaltet ist.

Nun schliesst man den Strom und beobachtet das Galvanometer; so fährt man fort, bis die richtige Zahl von Gewichten aufgelegt ist, d. h. bis der Moment erreicht ist, bei welchem von zwei benachbarten Gewichten das eine einen Ausschlag bewirkt, das andere nicht. Die experimentelle Erfahrung lehrt uns, dass die Gewichte, bei welchen dieses der Fall ist, überraschend klein sind, oder mit anderen Worten, dass die Empfindlichkeit dieser scheinbar groben Wage sehr gross ist. Es ist unser Apparat bis auf Decigramme empfindlich, d. h. die Wägung geht bis auf halbe Decigramme genau.

Andererseits ist aber auch klar, dass das Eintauchen bis zur Marke durch den galvanischen Strom sehr genau und in einfacher Weise signalisirt wird. Diese Einrichtung gestattet uns, die Wägung in der Weise auszuführen, indem der Arbeitende mit der einen Hand das Gewicht auf die Wagschale bringt, mit der anderen den Commutator, der Arretirung der Wage entsprechend, schliesst. Natürlich ist bei der Wägung dafür zu sorgen, dass die Rahmenstangen nicht etwa in Berührung mit den Rändern der Einschnitte im Deckel des Gehäuses kommen, was übrigens von selbst auch nicht geschieht, da keine drehenden Kräfte

vorhanden sind. Die Operation einer Dampfdichtebestimmung mit dem Apparate ist, nachdem die zwei vorbereiteten Bestimmungen ausgeführt sind, eine höchst einfache. Sie unterscheidet sich von der eben beschriebenen Bestimmung von Q lediglich dadurch, dass, anstatt das Fläschchen nur mit Quecksilber zu füllen, in dasselbe eine bestimmte Menge der zu untersuchenden Substanz kommt.

Ist die Temperatur t^0 erreicht und die Substanz vollkommen in Dampf umgewandelt, so wird das Gewicht Q_1 gleich dem „Auftriebe des Apparates mit Dampf“ bestimmt, welches auf die Wagschale gelegt werden muss, damit der Apparat bis zur mehrfach erwähnten Marke in die Flüssigkeit eintaucht. Der hierbei gebildete Dampf verdrängt aus dem Theile a des Apparates eine bestimmte Menge von Quecksilber, infolge dessen das Niveau im Gefässe $mnpq$ höher wird; man darf daher zum Anfang der Operation nur soviel Quecksilber in das Gefäss $mnpq$ giessen, dass dasselbe nach vollendeter Dampfbildung noch 2—3 cm unter dem Rande des Gefässes steht. Uebrigens kann nachträglich immer noch soviel Quecksilber als nöthig ist, aus dem Gefässe entfernt werden.

Es ist rathsam, während der ganzen Operation, dafür Sorge zu tragen, dass das Aräometergefäss bis an den Stiel in die Sperrflüssigkeit eintaucht, was durch Auflegen einer grösseren Last auf die Wagschale W leicht geschehen kann; damit hierbei das Aräometer nicht zu tief in das Quecksilber einsinkt, muss die Wagschale während dieser Operation unterstützt werden. Erst wenn man zur eigentlichen Wägung schreitet, nimmt man die Last von der Wagschale ab, entfernt den Gegenstand (Klotz, Arretirvorrichtung oder dergl.), welcher zur Unterstützung dieser letzteren diente, und ermittelt die nöthige Zahl von Gewichten, die zum Einsenken des Apparates bis an die Marke erforderlich ist.¹⁾ Die beschriebenen Operationen geben uns un-

1) Bei den Arbeiten mit der Wood'schen Legirung gedenke ich dem Aräometergefässe die Form der Fig. 16 zu geben, wobei der Theil b , welcher die Rolle eines Schwimmers spielt, das Gefäss a umschliesst. Die Wahl solch einer Form ist auf der Erfahrung gestützt, dass ein in dieser

mittelbar durch einfache Rechnung das Volumen V_1 des Dampfes. Es erübrigt nur noch, die Bestimmung des Druckes, unter welchem sich das gemessene Dampfvolumen befindet, zu besprechen. Dieser Druck setzt sich zusammen:

1) aus dem während des Versuches gemessenen Barometerstande, und 2) aus dem Drucke der wirksamen Quecksilbersäule, welche gleich ist der Höhe zwischen dem Quecksilberniveau im Aräometertheile a und jenem im Gefässe $mnpq$. Letztere Höhe kann natürlich nicht unmittelbar gemessen werden; man führt diese Messung bei gewöhnlicher Temperatur aus.

Zu diesem Behufe muss in den Theil a des Aräometers soviel Quecksilber hineingegossen werden, als in demselben bei der Temperatur t^0 des Dampfes sich befand (siehe darüber im Abschnitte „Berechnungen“).

Aus den, bei der gewöhnlichen Temperatur τ gemessenen, Höhen h' und h'' (siehe Fig. 15), wird nun durch Berechnung die wirksame Quecksilbersäule bestimmt. Die einfache Einrichtung, der ich mich zu dieser Messung bediente, ist auf der Fig. 15 abgebildet.

Nachdem in den Theil A des Aräometers die abgewogene Menge Quecksilber eingegossen ist, wird das Aräometergefäß mit dem Rahmen in Verbindung gebracht und die Oeffnung O mittelst einer kleinen Gummiplatte G , welche durch die Eisenplatte E und die Federn FF an diese Oeffnung fest angedrückt wird, verschlossen, sodass man alsdann das Gefäß in die Lage der Fig. 15 bringen kann, ohne dass dabei etwas herausfließt. Den so montirten Apparat stellt man auf den Messtisch von dem Kathetometer; hat er die Zimmertemperatur τ angenommen, welche man sich notirt, so misst man die Höhen h' und h'' .¹⁾

Art hergestelltes Glasgefäß bis zu sehr hohen Temperaturen erhitzt werden kann, ohne Gefahr des Zerspringens.

1) Die beschriebene Art der Messung wird ebenso bei Anwendung der Wood'schen Legirung ausgeführt, nur dass das verschlossene Aräometer in einem Gefässe mit Wasser von der Temperatur ca. 80—90° eingetaucht sich befindet und darin die Höhen gemessen werden.

Was endlich das Hineinbringen der Substanz¹⁾ anbelangt, so verweise ich auf meinen vorigen Bericht über das „Dampfdichtedilatometer“; die Form der Fläschchen kann beliebig genommen werden.

Ich wende mich nun zur Beschreibung der Art und Weise, wie die Berechnung der Resultate ausgeführt wird, und werde dieselbe durch ein Beispiel noch weiter erläutern.

Berechnungen.

Die Berechnung der Dampfdichte aus den Versuchszahlen geschieht nach der Formel:

$$DD = \frac{m}{V_t} \cdot \frac{760 (1 + 0,003665 \cdot t)}{0,0012928} \cdot \frac{1}{b_0 + h_0 - \sigma_t}$$

wobei:

m das Gewicht der angewendeten Substanz in Grammen,

t die Temperatur des Dampfes der Heizflüssigkeit,

v_t das Volumen des Dampfes bei t° in Cubikcentimetern,

b_0 den auf 0° reducirte Barometerstand während des Versuches in Millimetern,

h_0 die auf 0° reducirte wirksame Quecksilbersäule in Millimetern,

σ_t die Spannkraft des Quecksilberdampfes für die Temperatur t° in Millimetern,

1) Das Fläschchen kann bei Anwendung der Wood'schen Legirung leider nicht so leicht in den Apparat eingeführt werden, wie bei den Arbeiten mit Quecksilber. Mittelst der in Fig. 17 abgebildeten Vorrichtung geschieht dies indessen ohne Schwierigkeit. — K ist eine dünnwandige Glaskugel mit zwei lang ausgezogenen Spitzen S und S_1 , von denen S zur Füllung der Kugel mit Substanz dient, während S_1 an das Ende eines dünnen Glasstabes G angeschmolzen ist. Nachdem das mit warmer Wood'scher Legirung gefüllte Ariometergefäß in die ebenfalls warme Legirung des Gefäßes $mnpq$ bis auf 1–2 cm eingetaucht, wird der beschriebene kleine Apparat, dessen zugeschmolzene Spitze S etwa in der Mitte mit einem Feilstriche f versehen ist, wie auf Fig. 17 zu sehen, in das Gefäß eingeführt. Durch leichten Druck an eine der Wandungen wird die Spitze abgebrochen, und nun verbleibt die beschriebene Einrichtung im Apparate, bis die Verdampfung der Substanz geschehen; alsdann entfernt man sie aus dem Apparate und arbeitet im weiteren wie oben beschrieben.

0,003 665 den Ausdehnungscoëfficient der trockenen Luft,
 0,001 292 8 die Dichtigkeit der trockenen Luft bei 0°
 und 760 mm Druck,

Die Ableitung dieser einfachen Formel braucht nicht weiter auseinandergesetzt zu werden und es wird nur nöthig sein, die Bestimmung der Grössen v_t und h_0 zu besprechen.

a) Bestimmung des Volumens des Dampfes V_t . — Sind, wie oben bezeichnet, Q_1 und Q die Auftriebe des Apparates mit und ohne Dampf (resp. mit und ohne Substanz) bei t° , so ist offenbar $Q_1 - Q$ der Auftrieb, welcher durch das Hineinbringen der Substanz und durch die Bildung des Dampfes bedingt ist. Ich nenne ihn „Gesamtauftrieb“ A_{+a} ; den Auftrieb durch das Hineinbringen der Substanz, den ich durch A_s bezeichnen will, kann man aber sehr leicht finden. Wir kennen das Gewicht m der Substanz (in der Luft), kennen ferner aus den Wägungen das Gewicht μ des Quecksilbers, welches durch die Substanz verdrängt wird, und daraus ergibt sich $\mu - m = A_s$ = Auftrieb durch das Hineinbringen der Substanz. Subtrahiren wir die Grösse A_s von dem Gesamtauftriebe A_{+a} , so erhalten wir:

$A_{+a} - A_s = A_d$ = dem Auftriebe, der durch die Bildung des Dampfes zur Wirkung kommt oder = dem Gewichte des Quecksilbers, welches dem Volumen V_t des Dampfes entspricht; daraus ergibt sich auch unmittelbar das Volumen V_t des Dampfes selbst.

b) Bestimmung von h_0 . — Ist τ die Zimmertemperatur bei welcher die Messung der Höhen h' und h'' (Fig. 15) ausgeführt wurde, so erhalten wir die wirksame Quecksilbersäule durch folgende einfache Ueberlegung. Man reducirt die gemessene Höhe h'' auf die Temperatur t° des Dampfes, und zwar mit Zuhülfenahme des Coëfficienten der scheinbaren Ausdehnung des Quecksilbers in cylindrischen Gefässen von gewöhnlichem Glase, wodurch die Einführung des cubischen Ausdehnungscoëfficienten des Gefässes sowie des wahren Ausdehnungscoëfficienten des Quecksilbers gänzlich vermieden sind. Bekanntlich ist der Coëfficient der scheinbaren Ausdehnung des Quecksilbers in cylindrischen

Glasgefässen $\alpha_s = 0,000\,154$, sodass die bei τ gemessene Höhe h' des Quecksilbers im Gefässe a bei t^0 die Grösse:

$$H = h''(1 + 0,000\,154(t^0 - \tau))$$

haben wird, und es ist also $h' - H = h =$ wirksame Quecksilbersäule bei t^0 , woraus auch unmittelbar h_0 , d. h. die Grösse dieser Säule bei 0^0 , bestimmt werden kann.

Streng genommen ist $h' - H = h$ ebenfalls auf t^0 zu reduciren, d. h. mit dem Factor $(1 + 0,000\,008\,5(t^0 - \tau))$ zu multipliciren, da sich dieser Theil linear ausgedehnt hätte; allein es ist wohl begreiflich, dass eine solche Correction gar nicht nothwendig ist, da sie kaum auf die vierten bis fünften Decimalen der Rechnung einen Einfluss haben könnte.

Was die Capillardepression im breiten Gefässe $mnpq$, sowie im Theile a des Aräometergefässes anbelangt, so sind diese beide sehr klein und einander gleich anzunehmen, daher fallen sie aus der Rechnung gänzlich aus, ebenso ist es mit der Capillardepression, welche am Stiele des Aräometers stattfindet: da sie bei sämmtlichen Beobachtungen dieselbe bleibt, so eliminirt sie sich von selbst. Die Spannung der Quecksilberdämpfe σ_t wird aus den betreffenden Tabellen von Regnault entnommen.

Beispiel.

Bestimmung der Dampfdichte mittelst des
„Dampfdichtearäometers“.

Substanz, deren Dampfdichte zu bestimmen ist: Chloroform $\text{CHCl}_3 = 119,5$.

Ihre Dampfdichte $\left\{ \begin{array}{l} \text{berechnet } 4,1407 \\ \text{gefunden } 4,0971. \end{array} \right.$

Heizflüssigkeit: Wasser.

I. Beobachtungen.

Barometer bei $16^0 \text{ C.} = b = 717,5$,

Barometer bei $0^0 = b_0 = 715,51$,

Temperatur des Dampfes $= t^0 = 98,3$,

Zimmertemperatur während der Messung der Höhen
 h' und $h'' = \tau = 16,1^0 \text{ C.}$

II. Wägungen.

Substanz + Fläschchen + Quecksilb. + Uhrglas = $\alpha = 8,4956$

Fläschchen + Quecksilb. + Uhrglas = $\beta = 8,3809$

Fläschchen + Uhrglas = $\gamma = 6,6445$

$m = \alpha - \beta = 0,1147$ = Gewicht der angewendeten Substanz

$\beta - \gamma = 1,7364$ = Gewicht des neben der Substanz im Fläschchen sich befindlichen Quecksilbers.

Belastung der { Apparat mit Dampf = $Q_1 = 403,680$

Wagschale bei t^0 { Apparat ohne Dampf = $Q = 25,640$

Gesamtauftrieb = $A_{s+d} = 378,040$

NB. In beiden Fällen befand sich das Fläschchen im Apparat.

III. Höhenmessungen.

$h' = 112,1$ mm, $h'' = 33,2$ mm.

IV. Constante Zahlen für den Versuch.

$\sigma_t = 0,75$ = Spannung des Quecksilberdampfes bei t^0 ,

$G_q = 602,454$ = Gewicht des Quecksilbers im Apparat
bei der Temperatur t^0 ,

$Q_f = 2,7827$ = Gewicht des Quecksilbers, welches das Fläschchen bei gewöhnlicher Temperatur fasst.

$\alpha_s = 0,000154$ = Coëfficient der scheinbaren Ausdehnung des Quecksilbers in Gefäßen von gewöhnlichem Glase.

V. Berechnungen.

1) Bestimmung des Volumens V_t .

Der Gesamtauftrieb = $A_{s+d} = 378,040$.

Der Auftrieb durch das Hineinbringen der Substanz
= $A_s = Q_f - (\beta - \gamma) - m = 2,7827 - 1,7364 - 0,1147 = 0,9316$.

Folglich ist der Auftrieb durch die Bildung des Dampfes

= $A_d = A_{s+d} - A_s = 378,040 - 0,9316 = 377,11$.

Daraus ist das Volumen des Dampfes bei t^0

$$= V_t = \frac{377,11}{13,596 (1 - 0,0001815 \cdot 98,3)} = 28,241 \text{ ccm.}$$

2) Bestimmung von h_0 .

In das Aräometergefäß wurde die Menge:

$G_q - A_d = 602,454 - 377,11 = 225,344$

von Quecksilber hineingebracht und die Höhen h' und h'' gemessen.

Die bei $\tau = 16^{\circ}$ C. gemessene Höhe $h'' = 33,2$ mm verwandelt sich bei t^0 in:

$$H = h''(1 + 0,000154(t - \tau)) \\ = 33,2(1 + 0,000154 \cdot 82,3) = 33,6872 \text{ mm.}$$

Daher ist die wirksame Quecksilbersäule bei t^0

$$= h = h' - H = 112,1 - 33,69 = 78,41 \text{ mm,}$$

und diese letztere Höhe auf 0° reducirt $= h_0 = 78,19$ mm.

Setzen wir die gefundenen Versuchszahlen in die oben angeführte Formel ein, so erhalten wir den Ausdruck:

$$DD = \frac{0,1147}{28,241} \cdot \frac{760(1 + 0,003665 \cdot 98,3)}{0,0012928} \cdot \frac{1}{715,5 + 78,19 - 0,75},$$

welcher nach Berechnung den Werth 4,0971 ergibt, d. h. die gesuchte Dampfdichte der Substanz ist $= 4,0971$.

Belegversuche.

Bei diesen Versuchen wurden die mir zur Verfügung stehenden chemisch reinen Substanzen: Aethylalkohol, Benzol und Chloroform angewendet, sämmtlich, wie gesagt, bei der Temperatur des Wasserdampfes untersucht. Die Resultate beinahe sämmtlicher Versuche sind in der beistehenden Tabelle angeführt. In der letzten verticalen Columnne ist die Menge der zur Bestimmung der Dampfdichten angewendeten Substanz angegeben.

Die untereinander, sowie mit der Theorie übereinstimmenden Zahlen bedürfen wohl keiner weiteren Besprechung.

Was die Ausführung der Methode selbst anlangt, so ist sie eine höchst einfache und kann mit Leichtigkeit, nachdem man sie zwei bis dreimal eingeübt hat, einschliesslich der Vorbereitungen in der Zeit von dreiviertel bis eine Stunde und weniger bewerkstelligt werden, wobei die Anwesenheit des Experimentators nur bei den Wägungen erforderlich ist.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, dass die Messungen am Kathetometer bei jedem einzelnen Versuche, falls man dergleichen überhaupt nicht gern ausführt, gänzlich weggelassen, resp. durch ein indirectes Verfahren zur Bestimmung der wirklichen Quecksilbersäule ersetzt werden können.

Zusammenstellung der Resultate der Dampfdichtebestimmungen mit dem „Dampfdichtearäometer.“

	S u b s t a n z	Ihre Dampfdichte		Menge der bei jeder einzelnen Bestimmung angewandten Substanz in g
		Berechnet	Gefunden	
1	Chloroform CHCl_3	4,1407	$\left\{ \begin{array}{l} 4,231 \\ 4,211 \\ 4,097 \\ 4,093 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,1132 \\ 0,1622 \\ 0,1147 \\ 0,1357 \end{array} \right.$
2	Aethylalkohol $\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$	1,5939	$\left\{ \begin{array}{l} 1,627 \\ 1,631 \\ 1,607 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,0523 \\ 0,0608 \\ 0,0424 \end{array} \right.$
3	Benzol C_6H_6	2,7027	$\left\{ \begin{array}{l} 2,730 \\ 2,718 \\ 2,687 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,0557 \\ 0,0823 \\ 0,0311 \end{array} \right.$

Bemerkungen.

1) Bei der Untersuchung sämtlicher Substanzen wurde als Heizflüssigkeit Wasser angewendet.

2) Die zur Bestimmung der Dampfdichte angewendeten Substanzen waren dieselben wie bei meiner ersten Arbeit mit dem „Dampfdichtedilatometer“.

Dieses Verfahren, welches alsdann den Gegenstand der vorbereitenden Arbeiten bildet, besteht einfach darin, dass man sich eine empirische Tabelle aufstellt, mittelst welcher die Höhe h'' aus der Menge des durch den Dampf verdrängten Quecksilbers direct gefunden werden kann. Man braucht also nur den Auftrieb durch die Bildung des Dampfes A_d zu kennen, um daraus in der genannten Tabelle die entsprechende Höhe der wirksamen Quecksilbersäule (schon auf 0° reducirt) abzulesen. Die Aufstellung dieser Tabelle wird namentlich von besonderem Nutzen bei den Arbeiten mit der Wood'schen Legirung sein, weil wir uns dabei die leichte aber immerhin zeitraubende Procedur der Füllung des Apparates und Messung in warmem Wasser am Kathetometer ersparen.

Auch die einfache Ausführung des ganzen Apparates, bei welchem nur das Aräometergefäß einer präzisen Ausführung bedarf, sowie die Möglichkeit, mit demselben Apparat viele Bestimmungen ausführen zu können, möchte ich

ich als nicht zu unterschätzende Vorthelle des „Dampfdichtearäometers“ hervorheben.¹⁾

Nachträglich möchte ich noch erwähnen, dass zur Bestimmung des specifischen Gewichtes der Wood'schen Legirung bei verschiedenen hohen Temperaturen ich den Apparat selbst, als einfaches Aräometer, in einer leicht zu begreifenden Weise anwenden werde. Als Nachtheil des Verfahrens wäre vielleicht die ziemlich grosse Menge von Quecksilber, resp. der Wood'schen Legirung, die zur Füllung des Schwimmgefässes erforderlich ist²⁾, zu bezeichnen, was freilich nur derjenige, welcher ausserhalb eines chemischen oder physikalischen Laboratoriums seine Arbeit auszuführen gedenkt, zu beklagen den Grund hat.³⁾

Ich behalte mir vor, mit meinem Apparate Versuche bei höheren Temperaturen (Joddampf, Schwefeldampf u. s. w.) auszuführen und über deren Resultate genauer zu berichten.

Zum Schlusse meiner beiden Arbeiten sei es mir gestattet, meinem hochgeehrten Lehrer, dem Hrn. Prof. Dr. W. v. Beetz, in dessen Laboratorium ich meine Arbeit ausführte, für sein mir hierbei bezeugtes Wohlwollen meinen wärmsten Dank auszudrücken. Ebenso bin ich verpflichtet, dem Hrn. Dr. A. Lipp, Assistent am chemischen Laboratorium unserer Hochschule, für seine treffliche Unterstützung durch Rath und That während der ganzen Arbeit, ferner den Herren Assistenten am physikalischen Laboratorium Hrn. Dr. E. Pfeiffer und Hrn. L. Weber, meinen besten Dank auszusprechen.

München, den 10. Mai 1884.

1) Die Anfertigung meiner „Dampfdichtearäometer“ mit sämmtlichen dazugehörigen Vorrichtungen hat das physikalisch-mechanische Institut von Böhm u. Wiedemann in München übernommen. Dabei werden die Aräometergefässe in der Fabrik für Präcisionsglasinstrumente von J. Greiner in München hergestellt.

2) Ca 5–6 kg Quecksilber, resp. 3–4 kg der Wood'schen Legirung.

3) Dabei ist noch zu bemerken, dass das Quecksilber oder die Legirung im Schwimmgefässe fasst nie einer Reinigung bedürfen, weil sie mit den Dämpfen der zu untersuchenden Substanz gar nicht in Berührung kommen.

III. Ueber den Einfluss des Druckes auf die Viscosität der Flüssigkeiten, speciell des Wassers; von W. C. Röntgen.

(Hierzu Taf. VII Flg. 1 u. 1a.)

Die nachstehend mitgetheilte Untersuchung wurde bereits vor mehreren Jahren (Mai 1880) angefangen; dieselbe blieb aber bis jetzt unvollendet, da ich an einer Fortsetzung durch den Mangel an geeigneten Apparaten, deren Anschaffung aus den geringen dem hiesigen Institut zur Verfügung gestellten Mitteln auf einmal nicht möglich war, verhindert wurde. Ich bin kaum über die Vorversuche hinausgekommen; dieselben genügten aber, um darzuthun, dass es sich entschieden lohnen würde, die Untersuchung zu Ende zu führen; es wurden deshalb die nöthigen Apparate, unter denen zunächst eine bis auf 1000 Atmosphären gehende Cailletet'sche Pumpe zu nennen ist, allmählich angeschafft, und ich hoffte bald in der Lage zu sein, die Arbeit wieder aufnehmen zu können. Da erhielt ich von Hrn. Warburg einen Brief, worin derselbe mir schreibt, dass in seinem Laboratorium eine Untersuchung ausgeführt wäre, welche u. a. zu dem Resultat geführt hätte, dass die Viscosität des Wassers mit zunehmendem Druck abnähme. Hr. Warburg erinnert mich daran, dass ich ihm im Jahre 1881 bei Gelegenheit eines Gespräches über die damals noch nicht veröffentlichte, von ihm in Gemeinschaft mit Hrn. v. Babo unternommene Untersuchung: „Ueber den Zusammenhang zwischen Viscosität und Dichtigkeit bei flüssigen, insbesondere gasförmigflüssigen Körpern“, mittheilte, ich hätte bei den erwähnten Vorversuchen eine Abnahme der Viscosität des Wassers mit zunehmendem Druck gefunden. Hr. Warburg stellt mir anheim, meine Versuche in den Annalen vor der in seinem Laboratorium ausgeführten Arbeit zu veröffentlichen, und ich mache von diesem freundlichen Vorschlag um so eher Gebrauch, als eine Fortsetzung meiner Arbeit mir vorläufig nicht indicirt zu sein scheint.

Der Apparat, mit welchem meine Versuche angestellt wurden, ist in Fig. 1 abgebildet. *AB* ist ein Oersted'sches Piëzometer Magnus'scher Construction; der starkwandige Glaszylinder ist 5,5 cm weit und 62 cm hoch.

Die zu den Reibungsversuchen verwendete Capillare *ab* ist in folgender Weise frei beweglich im Piëzometer aufgehängt; das obere Ende *a* ist in eine Messingfassung *ac* eingekittet, die gelenkig mit dem Querstück *df* verbunden ist. Dieses wie eine stumpfe Schneide geformte Stück liegt auf einer in den Hals des Piëzometers eingeschraubten Messingplatte und kann nach einer Drehung um 90° aus der gezeichneten Lage durch die in der Platte befindliche rechteckige Oeffnung heruntergelassen werden; dies geschieht mit Hülfe eines zu diesem Zweck besonders einzuschrauben- den Stieles *C* (Fig. 1_a). Zwei kleine, auf der Platte befestigte Zäpfchen *d* und *f* verhindern, dass das Querstück mit dem daran hängenden Reibungsapparat sich durch Erschütterungen etc. aus der gezeichneten Lage entfernt. Alle Theile der Aufhängung sind aus Messing gefertigt und sorgfältig gearbeitet, sodass die Unveränderlichkeit der Aufhängung von Versuch zu Versuch gesichert ist.

Die Mündung der Capillare bei *a* ist mit einem dachförmig gebogenen, kleinen Messingschirm überdeckt, damit herunterfallende Stäubchen etc. nicht so leicht in die Capillare hinein gelangen. Das andere Ende *b* mündet in eine 4 cm weite Glaskugel, diese communicirt mit einer zweiten, gleich grossen Kugel, und letztere steht mit einer 0,4 cm weiten, 14 cm langen Glasröhre in Verbindung; bei *g* und *h* sind die Canäle bis auf ungefähr 0,06 cm Weite eingeschnürt.

In dem unteren Theil des Piëzometers befindet sich gut gereinigtes, staubfreies Quecksilber, und der übrige Inhalt desselben, sowie auch der Reibungsapparat ist mit destillirtem Wasser gefüllt; jede Luftblase ist sorgfältig entfernt.

Der Apparat stand in einem grossen, auf zwei gegenüberliegenden Seiten mit Glasplatten verschlossenen Blechgefäss, welches bis zum Rande mit Wasser gefüllt war. Da das Ganze in einem Kellerraum aufgestellt war, der nur für die kurze Zeit einer Ablesung betreten und mit einer Kerze

beleuchtet wurde, so blieb die Temperatur des Piézometers während eines Versuches, auch wenn derselbe über zwei Stunden dauerte, ziemlich constant. Dieselbe wurde durch in Zehntelgrade getheilte Thermometer gemessen.

Der Druck wurde durch eine auf das Piézometer aufzuschraubende Compressionspumpe erzeugt, und die Messung desselben geschah durch ein in das Piézometer eingehängtes Luftmanometer. Leider durften nur Drucke bis zu etwa 25 Atmosphären angewendet werden, und sogar diese geringen Drucke hatten verschiedene mal ein Platzen des Glascyinders und ein Zertrümmern des ganzen Apparates zur Folge, weshalb die Untersuchung dann auch schliesslich aufgegeben werden musste. Das Piézometer hält viel eher einen höheren, aber nur kurz dauernden, als einen geringeren, zwei bis drei Stunden anhaltenden Druck aus.

Die Reibungsversuche theilen sich in zwei Gruppen; die erstere enthält die Versuche bei Atmosphärendruck, die andere die bei höherem Druck. In beiden Fällen wurde die Zeit bestimmt, die ein Volumen Wasser, welches dem Inhalt der unteren Kugel entspricht, braucht, um durch die Capillare zu fliessen. Die zum Fliessen benöthigte Druckdifferenz wird vor Anfang eines jeden Versuches dadurch erzeugt, dass die untere Kugel ganz, die obere ungefähr bis zur Hälfte mit Quecksilber gefüllt wird; das Füllen geschieht durch Einsenken des Reibungsapparates in das Quecksilber des Piézometers mit Hülfe des zu diesem Zweck aufgeschraubten Stieles C; wenn eine genügende Menge Quecksilber in die Kugeln eingedrungen ist, so wird der Reibungsapparat gehoben und wieder in die gezeichnete Lage gebracht. Von diesem Augenblicke an strömt das Wasser durch die Capillare in die Kugeln hinein, und das Quecksilber sinkt im Reibungsapparat. Man bestimmt nun die Zeit, zu welcher die Quecksilberoberfläche in die zweite Kugel eintritt, resp. zu welcher dieselbe die Kugel verlässt; beide Momente lassen sich auf Bruchtheile einer Secunde genau bestimmen, da die Bewegung der Oberfläche infolge der geringen Weite der Verbindungsanäle an diesen Stellen eine verhältnissmässig rasche ist.

Die Zeit, welche das Quecksilber braucht, um aus der oberen Kugel auszufließen, d. h. die Zeit, die zwischen dem Aufhängen des Reibungsapparates und der ersten Zeitbestimmung vergeht, genügt vollständig, um während dessen die Thermometer abzulesen und bei den Versuchen mit höherem Druck die Compressionspumpe aufzuschrauben, den gewünschten Druck herzustellen und diesen am Manometer zu beobachten. Nach der zweiten Zeitbestimmung wird abermals die Temperatur bestimmt, und überzeugt man sich davon, dass der Druck constant geblieben ist; hat sich der Druck merklich geändert, so muss der Versuch verworfen werden.

Die zwei folgenden Tabellen enthalten die Beobachtungsergebnisse von zwei Versuchsreihen mit zwei verschiedenen Capillaren. Eine genaue Messung der Dimensionen der Capillaren hat nicht stattgefunden, weil es sich bei den in Rede stehenden Versuchen zunächst darum handelte, die durch Druck erzeugte relative Aenderung der Viscosität zu bestimmen; die erste Capillare wurde beim Platzen des Piézometers vollständig zertrümmert; von der zweiten wurde vor den Versuchen der Durchmesser zu ungefähr 0,024 cm, die Länge zu 20,6 cm bestimmt.

Tabelle I.

Versuchs- Nummer	Anfangs- temperatur	Erste Zeit- bestimmung	Zweite Zeit- bestimmung	End- temperatur	Druck in Atmosph.
1	5,85	3 ^h 24 ^m 58 ^s	4 ^h 19 ^m 40 ^s	5,88	1
2	5,90	5 21 10	6 15 39	5,90	1
3	6,00	7 34 21	8 28 47	6,00	1
4	6,00	9 30 30	10 24 44	6,00	1
5	6,00	12 50 49	1 44 58	6,00	1
6	6,04	3 27 54	4 21 53	6,07	1
7	6,10	1 19 36	2 13 36	6,11	1
8	6,15	3 20 12	4 14 2	6,20	1
9	6,20	5 14 27	6 7 57	6,20	1
10	6,28	7 41 27	8 35 13	6,27	1
11	6,27	10 12 38	11 5 49	6,27	19
12	6,69	7 17 36	8 10 15	6,96	27
13	6,50	2 42 6	3 35 10	6,50	29
14	6,47	8 6 16	8 59 30	6,48	1
15	6,50	12 50 38	1 44 4	6,50	1
16	6,43	12 1 30	12 54 34	6,46	21
17	6,50	3 37 41	4 30 49	6,50	27

Beim 18. Versuche, am 9. Tage seit Anfang der Versuchsreihe, platzte das Piëzometer.

Tabelle II.

Versuchs- Nummer	Anfangs- temperatur	Erste Zeit- bestimmung	Zweite Zeit- bestimmung	End- temperatur	Druck in Atmosph.
1	10,97	10 ^h 29 ^m 13 ^s	12 ^h 59 ^m 45 ^s	11,08	1
2	11,19	4 43 16	7 12 45	11,20	1
3	11,17	7 47 13	10 17 0	11,18	1
4	11,25	2 27 10	4 56 15	11,29	1
5	11,38	8 2 23	10 30 10	11,49	21
6	11,60	3 40 25	6 8 20	11,60	23
7	11,60	8 3 53	10 31 25	11,60	21
8	11,68	4 56 30	7 23 40	11,68	23
9	11,63	7 56 30	10 23 50	11,66	24
10	11,84	3 17 20	5 44 10	11,88	1
11	11,41	8 8 15	10 37 10	11,39	1
12	11,32	8 35 0	11 4 15	11,32	1
13	11,42	3 50 32	6 19 20	11,44	1

Beim 14. Versuche, am 9. Tage seit Anfang dieser Versuchsreihe, platzte das Piëzometer.

Die bei den drei letzten Versuchen dieser Tabelle angegebenen Temperaturen sind die Mittel aus den an drei in verschiedener Höhe neben dem Piëzometer aufgehängten Thermometern gemachten Ablesungen.

Aus diesen beobachteten Werthen ergeben sich nun folgende Ausflusszeiten in Secunden.

Versuchsreihe I.

1) Versuche bei Atmosphärendruck.

Versuchs-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	14	15
mittl. Temp.	5,87	5,90	6,00	6,00	6,00	6,05	6,11	6,18	6,20	6,23	6,48	6,50
Aus- flusszeit	beob. 3232	3269	3266	3254	3249	3239	3240	3230	3227	3226	3194	3206
	ber. 3269	3266	3256	3256	3256	3251	3245	3238	3236	3228	3208	3206
Differenz	+13	+3	+10	-2	-7	-12	-5	-8	-9	-2	-14	0

2) Versuche bei höherem Drucke.

Versuchs-Nr.	11	12	13	16	17
mittlere Temp.	6,27	6,69	6,50	6,45	6,50
Druck in Atmos.	19	27	29	21	27
Ausfluss- zeit	beob. 3191	3159	3184	3184	3172
	ber. 3229	3189	3206	3211	3206
Differenz	-38	-30	-22	-27	-34

Versuchsreihe II.

1) Versuche bei Atmosphärendruck.

Versuchs-Nr.	1	2	3	4	10	11	12	13
mittlere Temp.	11,03	11,19	11,18	11,27	11,86	11,40	11,32	11,43
Ausfluss- { beob.	9032	8969	8987	8945	8810	8935	8955	8928
zeit { ber.	9028	8985	8991	8968	8823	8935	8955	8928
Differenz	+4	-16	-4	-23	-13	0	0	0

2) Versuche bei höherem Druck.

Versuchs-Nr.	5	6	7	8	9
mittlere Temp.	11,44	11,60	11,60	11,68	11,65
Druck in Atmos.	21	23	21	23	24
Ausfluss- { beob.	8867	8855	8852	8830	8840
zeit { ber.	8925	8886	8886	8867	8874
Differenz	-58	-31	-34	-37	-34

Aus diesen Versuchen kann man nun mit ziemlicher Sicherheit schliessen, dass die Compression des Wassers eine Verminderung der Ausflusszeit zur Folge hat; sowohl eine graphische Darstellung derselben, in welcher die Temperaturen den Abscissen, die Ausflusszeiten den Ordinaten proportional sind, als eine Berechnung führt zu diesem Resultat.

Bei der Berechnung habe ich angenommen, dass das Mittel aus den drei bei gleicher Temperatur (6,00°) beobachteten Ausflusszeiten der Versuche 3, 4 und 5 der ersten Versuchsreihe, sowie die beim 13. Versuche der zweiten Versuchsreihe gefundene Ausflusszeit richtig sind; letztere deshalb, weil bei diesem Versuch die Temperaturen besonders sorgfältig beobachtet wurden.

Mit Hülfe dieser Werthe berechnete ich zunächst für jede Versuchsreihe die Constanten b und c der von Hrn. Slotte angegebenen, bequemen Formel:¹⁾ $(t + a)(z + b) = c$, wo t die Temperatur und z die Ausflusszeit bedeutet, und a den Werth 40,1, das Verhältniss b/c den Werth $^{66}_{21591}$ hat.

1) Slotte, Wied. Ann. 14. p. 21. 1881.

Dann wurde für jede einzelne Versuchstemperatur die Ausflusszeit berechnet, sowohl für die Versuche bei gewöhnlichem Druck als für die bei höherem Druck. Die sich ergebenden Differenzen zwischen den beobachteten und den so berechneten Ausflusszeiten können verursacht sein erstens durch die Fehlerhaftigkeit der erwähnten Formel und der Beobachtungen, zweitens aber auch durch den Einfluss, welchen der höhere Druck auf die Ausflusszeit ausübt; letztere Ursache ist selbstverständlich nur bei den Versuchen mit höherem Druck zu suchen. Nun lehrt ein Blick auf die obigen Tabellen, dass diese Differenzen bei den Versuchen mit höherem Druck die durch die Versuche mit gewöhnlichem Druck bestimmten Fehlergrenzen beträchtlich überschreiten, folglich werden die Ausflusszeiten durch die Compression verändert und zwar verringert.

Bevor man nun aus diesem Ergebniss den Schluss zieht, dass die Viscosität des Wassers durch den Druck abgenommen hat, ist es nöthig, dass man untersucht, ob nicht andere Ursachen der beobachteten Abnahme der Ausflusszeiten zu Grunde liegen. Durch die Compression wird

1. das Volumen der zweiten Kugel des Reibungsapparates, folglich das Volumen des während der beobachteten Ausflusszeit durchgeströmten Wassers geändert;

2. werden die Dimensionen der Capillare geändert;

3. wird die Dichte des Wassers und des Quecksilbers und somit die das Strömen erzeugende Druckdifferenz geändert;

4. ändert sich die Temperatur des Wassers infolge der Compression;

5. wird das Niveau des Quecksilbers im Piézometercylinder durch den Druck tiefer gelegt und dadurch die Druckdifferenz, unter welcher das Wasser fliesst, vergrößert.

Eine Berechnung der Grösse dieser Fehlerquellen ergibt, dass nur die zuletzt genannte einen merklichen Einfluss ausüben kann; es wurde nämlich mit dem Kathetometer direct gefunden, dass das Quecksilberniveau im Cylinder durch einen Druck von 24 Atmosphären um 0,010 cm sinkt, und dass die mittlere Druckdifferenz bei der zweiten Versuchs-

reihe ungefähr 10 cm beträgt. Die Compression auf 24 Atmosphären wird somit zur Folge haben, dass die Druckdifferenz um ungefähr 0,1 Proc. zunimmt, folglich die Ausflusszeit um denselben Betrag abnimmt.¹⁾ Diese bei der zweiten Versuchsreihe sich auf neun Secunden belaufenden Aenderung der Ausflusszeit ist aber viel geringer als die wirklich beobachtete, und man wird deshalb den grösseren Theil dieser Aenderung auf Rechnung der durch den Druck verminderten Viscosität des Wassers zu bringen haben.

Ich habe mich durch directe Beobachtung auch noch davon überzeugt, dass der Reibungsapparat durch die angewendeten Drucke nicht merklich aus dem Quecksilber herausgehoben wurde, was sonst ebenfalls eine Verkürzung der Ausflusszeit bewirkt haben würde.

Dass die mitgetheilten Vorversuche nicht geeignet sind, um mit ihrer Hülfe die genaue quantitative Beziehung zwischen Dichte und Viscosität abzuleiten und so die weitere, interessante Frage zu beantworten, wie die Viscosität bei constant bleibender Dichte sich mit der Temperatur ändert, braucht wohl kaum bemerkt zu werden.

Auch mit Schwefeläther habe ich einige Versuche angestellt und zu denselben einen besonders construirten Reibungsapparat benutzt, der ebenso wie der oben beschriebene in das Piëzometer eingesetzt wurde; der Schwefeläther war durch Quecksilber vollständig von dem im Piëzometer enthaltenen Wasser abgesperrt. Ein bald nach Anfang dieser Versuche eingetretener Bruch des Piëzometers verhinderte aber die Fortsetzung derselben, und ihre Anzahl ist zu gering, um darüber weitere Mittheilung machen zu können.

Nachschrift. Hr. Warburg hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass er bereits im Jahre 1870 das von mir zur Construction eines Vorlesungsapparates benutzte Princip der Strömung von Flüssigkeiten durch zwei hinter-

1) Die besprochene Niveauänderung des Quecksilbers im Piëzometercylinder würde bedeutend geringer ausgefallen sein, wenn das Quecksilber in einem besonders in den Cylinder eingesetzten Gefäss enthalten gewesen wäre.

einander gelegene Capillaren zur Controle seiner Versuche über die Viscosität des Quecksilbers angewendet habe.¹⁾ Leider war mir dies nicht bekannt, als ich die auf p. 268 von Bd. 20 dieser Annalen abgedruckte Notiz schrieb, sonst hätte ich selbstverständlich davon Mittheilung gemacht.

Giessen, Frühjahr 1884.

IV. *Ueber den Einfluss der Dichtigkeit auf die Viscosität tropfbarer Flüssigkeiten; von E. Warburg und J. Sachs.*²⁾

Schon Coulomb³⁾, welchem man die ersten grundlegenden Versuche über die Reibung tropfbarer Flüssigkeiten verdankt, hat sich die Frage vorgelegt, ob dieselbe vom Druck abhängig sei. Er liess eine Scheibe in Wasser unter der Glocke der Luftpumpe drehende Schwingungen ausführen und fand die Dämpfung dieser Schwingungen ungeändert, als er evacuirte. Coulomb schloss daraus, dass die Wasserreibung unabhängig vom Druck sei, ein Resultat, das durch die Versuche von Poiseuille u. A. bestätigt wurde.

Bei einer Untersuchung über die Reibung der Kohlensäure⁴⁾ hat sich indessen ergeben, dass die Viscosität der tropfbaren Kohlensäure bei 25,1° durch eine Druckerhöhung von etwa 70 auf 105 Atmosphären im Verhältniss von 628:800 vergrössert wird. Die Compressibilität der Kohlensäure ist unter diesen Umständen 3140/10⁶, etwa achtzehnmal so gross, als die des Aethers bei derselben Temperatur.

Aus der genannten Untersuchung scheint ferner hervorzugehen, dass die Aenderung der Viscosität mit dem Druck wesentlich bedingt ist durch die Dichtigkeitsänderung, welche die Druckänderung begleitet. Wenn nun bei anderen tropf-

1) Warburg, Pogg. Ann. 140. p. 367. 1870.

2) Auszug aus der Inauguraldissertation von Dr. J. Sachs.

3) Coulomb, Mém. de l'institut national an IX.

4) Warburg u. v. Babo, Wied. Ann. 17. p. 390. 1882.

baren Flüssigkeiten die Aenderung der Viscosität mit der Dichte von derselben Ordnung ist, wie für die tropfbare Kohlensäure, so erklärt sich einerseits, dass bei den bisherigen, innerhalb enger Druckgrenzen angestellten Versuchen mit anderen Flüssigkeiten eine Aenderung der Viscosität mit dem Druck nicht bemerkt wurde, ist aber andererseits ein sehr merklicher Einfluss des Druckes zu erwarten, wenn derselbe von 1 bis auf 100—150 Atmosphären gesteigert wird.

Da der zu der genannten Untersuchung benutzte Apparat erlaubte, innerhalb solcher Druckgrenzen zu arbeiten, so forderte ich Hrn. Lehramtspraktikanten J. Sachs auf, andere Flüssigkeiten der Untersuchung zu unterziehen.

Es wurden mit dem erwähnten Apparat, welcher in diesen Annalen¹⁾ ausführlich beschrieben ist, im Hinblick auf den veränderten Zweck einige Abänderungen vorgenommen.

Das Stickstoffmanometer wurde durch ein Blancke'sches Federmanometer ersetzt, dessen Genauigkeit hier hinreichte, und welches den Vortheil grösserer Bequemlichkeit bot.

Die Druckerhöhung wurde bei den neuen Versuchen durch eine mit Glycerin oder Wasser gefüllte hydraulische Presse hervorgebracht. Der Druck wirkte unmittelbar auf Glycerin in dem äusseren Theile einer Vorlage und pflanzte sich auf den inneren, mit der Versuchssubstanz gefüllten Theil fort, wobei die beiden Theile durch Quecksilber von einander getrennt waren.

Endlich war bei den Versuchen mit der Kohlensäure der gläserne Haupttheil *defg* des Apparates²⁾ durch ein Stückchen Kautschukschlauch *i* mit dem Kopftheil verbunden. Da bei den hier beabsichtigten Versuchen mit Aether und Benzol die Anwendung des Kautschuks unstatthaft war, so musste eine andere Verbindung gewählt werden. Kork hielt nicht dicht, und es war nicht möglich, durch

1) Warburg u. v. Babo, Wied. Ann. 17. p. 393. 1882. Taf. III Fig. 2 u. 2A.

2) l. c. Taf. III Fig. 2.

einen Ueberdruck von aussen das Quecksilber in der Messröhre zu heben. Es gelang schliesslich, den Kork dicht zu machen durch eine mit chromsaurem Kali versetzte Leimschicht, welche, auf die Endflächen warm aufgetragen, nach Belichtung durch die Sonne sich undurchdringlich und unlöslich erwies.

Nachdem die Brauchbarkeit des Apparates durch Verifizierung einiger bekannter Reibungsindices erwiesen war, wurde zu den eigentlichen Versuchen übergegangen. Es wurden fünf Capillaren benutzt, deren Radien 0,00613; 0,00523; 0,00521; 0,00454; 0,00394 cm und deren Längen bezüglich 8; 12; 7,93; 7,42; 6,33; 6,19 cm betrugen.

Die Gültigkeit des Poiseuille'schen Gesetzes wurde, wie in der Arbeit über die Kohlensäure, durch Beobachtung zwischen vier Marken, d. h. bei verschiedenen Druckdifferenzen an den Enden der Capillare controlirt.

Indem wir bezüglich der ausführlichen Mittheilung der Versuchsergebnisse auf die Dissertation verweisen, beschränken wir uns hier auf die Angabe der definitiven Resultate. Wir setzen den Reibungsindex μ :

$$\mu = \mu_0 (1 + \alpha \cdot p),$$

wo μ den Reibungsindex bei Atmosphärendruck, p den zugefügten Ueberdruck bedeutet, indem als Einheit des Ueberdruckes der Druck von 1 kg auf den Quadratcentimeter (Einheit des Blancke'schen Manometers) gilt. Setzen wir ferner:

$$\mu = \mu_0 (1 + \beta \cdot s),$$

wo s die durch den Ueberdruck erzeugte Compression bedeutet, so ist:

$$\beta = \frac{\alpha}{z},$$

wenn z die Zusammendrückbarkeit ist.

Da die totale Aenderung der Strömungszeit durch den Druck im günstigsten Fall bis zu 14% der Strömungszeit bei dem Ueberdruck 0, im ungünstigsten Fall nur bis zu 2 $\frac{1}{2}$ % anstieg, und ausserdem die Versuche durch mancherlei Fehlerquellen beeinflusst wurden, so ist die Genauigkeit, mit welcher die Grösse α bestimmt werden konnte, im allgemeinen nur eine geringe, obgleich eine grössere Zahl von Ver-

suchsreihen erhalten wurde. In der folgenden Tabelle sind für die drei untersuchten Substanzen — Aether, Benzol, Wasser — die Werthe von α verzeichnet, welche als die wahrscheinlichsten aus den Versuchen hervorgehen dürften. Zur Berechnung von β wurden die Werthe von z für Aether und Benzol aus den Versuchen von Amagat¹⁾, für Wasser aus den Versuchen von Grassi²⁾ entnommen; durch Interpolation finden wir für 20°, wenn als Einheit des Druckes der Druck von 1 kg auf den Quadratcentimeter gilt, die in die Tabelle aufgenommenen Werthe von z . Die auf die Kohlensäure bezüglichen Zahlen sind der eingangs citirten Arbeit entnommen. Die Angaben über die kritischen Temperaturen t_1 sind für Kohlensäure nach Andrews, für Aether und Benzol nach Sajotschewsky³⁾ gemacht. Endlich sind die den Versuchstemperaturen entsprechenden reducirten Temperaturen θ verzeichnet, welche man nach v. d. Waals durch Division der absoluten Versuchstemperaturen durch die absoluten kritischen Temperaturen erhält.

	Kohlensäure $t = 25,1^\circ$ $t_1 = 30,9$ $\theta = 0,98$	Aether $t = 20^\circ$ $t_1 = 190$ $\theta = 0,63$	Benzol $t = 20^\circ$ $t_1 = 280,6$ $\theta = 0,53$	Wasser $t = 20^\circ$
$\alpha \cdot 10^6$	7470	730	930	— 170
$z \cdot 10^6$	3040	173	91	45
β	2,5	4,2	10,2	— 3,8

Die Viscosität nimmt nach dieser Tabelle mit zunehmender Dichte für Kohlensäure, Aether, Benzol zu, für Wasser ab.⁴⁾ Für die drei ersten Flüssigkeiten entspricht einer grösseren reducirten Versuchstemperatur jedesmal ein kleineres β .

Eine eigenthümliche Erscheinung wurde bei den Ver-

1) Amagat, Ann. de chim. et de phys. (5) 11. p. 520. 1877. Beibl. 1. p. 488.

2) Grassi, Wüllner's Lehrbuch der Experimentalphys. 1. p. 230.

3) W. Sajotschewsky, Beibl. 3. p. 742. 1879.

4) Im Einverständniss mit Hrn. Prof. Röntgen bemerke ich, dass dieser schon im Jahre 1881 mir Versuche mitgetheilt hat, aus denen eine Abnahme der Viscosität mit zunehmendem Druck für Wasser hervorgeht.

suchen bemerkt und beim Wasser genauer studirt, da sie die Untersuchung dieser Substanz wegen der Kleinheit der Wirkung, die der Druck hier ausübt, zuerst sehr erschwerte. Es zeigte sich nämlich die Strömungszeit bei Atmosphärendruck dauernd verändert, und zwar beim Wasser verkleinert, wenn vorher ein grösserer Druck angewandt war. Bei Wasser, das möglichst luftfrei gemacht oder mit Kohlensäure oder Ammoniak gesättigt war, zeigte sich diese Erscheinung kaum, bei Schwefelwasserstoffwasser in hohem Grade. Wenn nicht eine Fehlerquelle übersehen ist, so würde danach die Constitution gewisser, bei Atmosphärendruck gesättigter Gaslösungen durch eine vorübergehende Druckerhöhung eine permanente Aenderung erfahren, d. h. eine Aenderung, welche nicht verschwindet, wenn die Druckerhöhung aufgehoben wird. Ehe indessen diese Thatsache durch andere Versuche bestätigt ist, möchten wir sie nicht als verbürgt hinstellen.

Freiburg i. Br., 23. Febr. 1884.

V. *Zur Wärmeleitungsfähigkeit des Turmalins;* *von Franz Stenger.*

(Hierzu Taf. VII Fig. 2—4.)

Theoretische Ueberlegungen über die Ursachen der pyroelectrischen Erscheinungen führten S. P. Thompson und O. J. Lodge¹⁾ auf die Vermuthung, dass Turmalin in der Richtung der Hauptaxe eine unilaterale Leitung für Wärme zeigen werde, dass also das Leitungsvermögen in der Richtung vom analogen Pol zum antilogen ein anderes sei, als in der entgegengesetzten. Zur Verification ihrer Annahme führten sie Versuche nach zwei verschiedenen Methoden aus. Einmal beobachteten sie nach der Sénarmont'schen Methode die Curven, bis zu welchen die auf den parallel der Axe

1) S. P. Thompson u. O. J. Lodge, Phil. Mag. (5) 8. p. 18. 1879. Beibl. 4. p. 198.

geschnittenen Krystallplatten erzeugte dünne Wachsschicht schmolz, wenn durch einen heissen Draht ein Punkt der Platte erwärmt wurde; sie fanden dann, wie sie erwartet hatten, dass die entstandenen Curven keine regelmässig ausgebildeten Ellipsen waren, sondern dass sie von dem erwärmten Punkte gegen den analogen Pol hin verlängert erschienen.

Derartige Beobachtungen ergaben im Mittel das Verhältniss der in der Hauptaxe liegenden Halbaxen der Curve $= \frac{100}{129}$.

Bei einer zweiten Reihe von Versuchen wurde eine senkrecht zur Axe geschnittene Turmalinplatte zwischen zwei Glasröhren eingekittet, in das obere Rohr eine bestimmte Menge Quecksilber gegossen, in das untere Wasserdampf eingeblasen. Beobachtet wurde die Zeit, die verfloss, bis das Quecksilber sich um eine bestimmte Zahl von Graden erwärmt hatte.

Auch nach dieser Methode wurde eine Verschiedenheit des Leitungsvermögens gefunden, je nach der Richtung, in der die Turmalinplatte vom Wärmestrom durchsetzt wurde, und zwar verhielten sich die Mittelwerthe der Zeiten, die zu einer gleichen Temperaturerhöhung erforderlich waren, wie 100 zu 119.

Die wenigen Beobachtungen, welche Thompson und Lodge angestellt haben, zeigen untereinander so grosse Abweichungen, dass aus diesen Versuchen eine unilaterale Leitung mit Sicherheit nicht gefolgert werden kann; vor allen Dingen hätte man sich ausserdem darüber Gewissheit verschaffen müssen, ob die benutzten Platten völlig homogen waren, ob also nicht eine Anzahl von Krystallindividuen derartig durcheinander gewachsen war, dass auf einer zur Axe senkrechten Schnittfläche analoge und antiloge Pole verschiedener Krystalle nebeneinander lagen. Es war daher wünschenswerth, durch Versuche nach einer besseren Methode zu entscheiden, ob eine solche abnorme Wärmeleitung dem Turmalin zukommt oder nicht.

Die zu dem Zwecke von mir gemachten Beobachtungen wurden an zwei senkrecht zur Axe geschnittenen Krystallplatten ausgeführt. Die eine, etwa 5,8 mm dick, war aus

einem dem hiesigen mineralogischen Institute gehörigen und mir von Hrn. Prof. Bücking zur Verfügung gestellten Krystalle aus Brasilien geschnitten; die zweite, etwa 3,2 mm dick, stammt aus einem Geschiebestück von Ceylon. Beide liessen keine Spur von stängeligem Gefüge erkennen, und eine genaue pyro-electrische Untersuchung nach der von Kundt¹⁾ angegebenen Bestäubungsmethode zeigte, dass in der That beide Platten absolut homogen waren; eine der beiden Flächen der auf etwa 65° erhitzten und während der Abkühlung bestäubten Platte erschien völlig gelb, die andere völlig roth gefärbt.

Die Untersuchung des Wärmeleitungsvermögens geschah nach einer Methode, die der von F. Weber²⁾ für Flüssigkeiten angewandten nachgebildet ist. Man lässt die Krystallplatte und die in einem auf ihr ruhenden Kupfercylinder angebrachte Löthstelle eines Thermoelementes die Temperatur des Arbeitszimmers annehmen, bringt dann die untere Fläche der Platte durch Contact mit glatten Eisflächen auf die Temperatur 0° und beobachtet den Temperaturverlauf des Thermoelementes mit Spiegel und Scala an einem empfindlichen Galvanometer. Das von mir benutzte (Fig. 2, G) hatte geringen Widerstand (0,8 S.-E., wenn, wie im Folgenden, alle Windungen hintereinander geschaltet waren), astatisches Nadelsystem und kräftige Dämpfung.

Die eine Löthstelle *a* des Thermoelementes — ein etwa 4 mm hoher Kupfercylinder, in dessen obere Fläche ein Platindraht und ein Eisendraht eingelöthet waren — befand sich, um sicheren Contact zu erhalten, in einer auf der Turmalinplatte *f* befindlichen dünnen Quecksilberschicht *b*; die beiden Löthstellen, welche der Eisen- und der Platindraht mit den nach dem Galvanometer führenden Drähten bildeten, befanden sich in einem Glasgefäß *c* mit Terpentinöl, das in einen mit Watte ausgekleideten hölzernen Kasten eingesetzt war, um die Temperatur möglichst constant zu erhalten. Die Ablesung der Temperaturen des Terpentinöls geschah an einem Geissler'schen Thermometer, an dem man ein Hundertel eines Grades ablesen konnte.

1) Kundt, Wied. Ann. 20. p. 592. 1883.

2) Fr. Weber, Wied. Ann. 10. p. 103. 1880.

Das von F. Weber angewandte Verfahren, beim Beginn eines Versuches die untere Fläche der untersuchten Substanz auf die Temperatur 0° zu bringen und darauf zu erhalten, dadurch dass er die Flüssigkeitslamelle mit den beiden sie umhüllenden Metallmassen und die darauf befindliche Löthstelle direct auf eine glatte Eisfläche setzte, konnte ich nicht anwenden. Es war eben das Gewicht von Krystallplatte und Kupfercylinder zu gering, um das auf dem Eise gebildete Schmelzwasser zu verdrängen und einen beständigen Contact mit dem Eise zu sichern. Ich habe es daher vorgezogen, die Turmalinplatte während der Beobachtungsreihen unverändert in ihrer Lage im Raume zu lassen und durch eine besondere Vorrichtung die planparallele Eisplatte *d* ihr von unten her zu nähern und so fest anzupressen, dass das Schmelzwasser beständig am Umfang der Turmalinplatte herausgetrieben wurde.

Zu dem Ende war die Platte *f* mit ein wenig Wachs und Colophonium auf eine mit einem kreisförmigen Loch von entsprechender Grösse versehene Ebonitplatte *e* und diese auf ein kurzes Glasrohr *g* aufgekittet; das Glasrohr wurde in einem Stativ festgeklemmt.

Vertical unter der Platte befand sich der eine Schenkel eines communicirenden Rohres *h*, der mit dem zweiten längeren Schenkel durch ein dünneres mit einem Hahn versehenes Zwischenstück verbunden war. Im kürzeren Schenkel konnte sich mit leichter Reibung ein Probirglas *i* verschieben, auf dessen oberes unter dem Turmalin befindliches Ende eine Glasplatte *k* gekittet war. Das ganze Rohr wurde mit Quecksilber gefüllt, sodass die Glasplatte etwa 2 cm unter der Krystallfläche sich befand, sodann der Hahn geschlossen und der längere Schenkel bis zum Rande mit Quecksilber gefüllt. Sollte nun die Turmalinplatte an ihrem unteren Ende auf 0° abgekühlt werden, so wurde auf die Glasplatte ein planparalleles Stück Eis (etwa 1 cm dick) gelegt und der Hahn geöffnet; das Quecksilber im längeren Schenkel hob dann Probirrohr nebst Eisplatte nach oben und presste sie gegen den Krystall an.

Um eine Vergleichung der aus den einzelnen Versuchen

folgenden Resultate ermöglichen zu können, habe ich die Temperatur des Zimmers möglichst constant erhalten; wurde die Temperatur im Laufe des Nachmittags zu hoch, so unterbrach ich die Beobachtungen und nahm sie erst am nächsten Tage wieder auf. Es wurde ausserdem mit jeder Messung so lange gewartet, dass man sicher sein konnte, dass die Krystallplatte in ihrer ganzen Ausdehnung dieselbe Temperatur besass, wie α und die Luft des Zimmers.

Vor und nach jedem Versuch vergewisserte ich mich ferner, dass keine electromotorische Kraft ausser der durch die Temperaturdifferenz zwischen dem Kupfercylinder und den im Terpentinöl befindlichen Löthstellen bedingten vorhanden war. Endlich zeigte sich, dass die Eisplatte sich so schnell dem Turmalin näherte, dass vor der Berührung ein Sinken der Temperatur von α nicht merklich war.

Der einzelne Versuch wurde danach in folgender Weise ausgeführt: Zuerst beobachtete ich die Ruhelage des Nadelsystems bei ungeschlossenem Stromkreise, stellte sodann unter Ausschliessung der drei Löthstellen kurzen Schluss her, um mich zu überzeugen, dass keine electromotorische Kraft ausserhalb des Thermoelements existirte; darauf wurde die Temperatur des Terpentinöls abgelesen und nach Entfernung des kurzen Schlusses die Einstellung der Magnetnadeln beobachtet. Sodann wurde die Eisplatte auf die Glasplatte des communicirenden Röhrensystems gelegt, der Hahn geöffnet und mit Hülfe einer Secundenuhr vom Moment der Berührung von Eis- und Turmalinplatte an der Temperaturverlauf des Kupfercylinders am Fernrohr beobachtet. Um aus den für die verschiedenen aufeinander folgenden Zeitpunkte gemachten Ablesungen die zugehörigen Temperaturen in Scalentheilen ausgedrückt zu erhalten, wurde α sodann in Eis gepackt und die Einstellung notirt. Den Schluss jedes Versuches machte die Controle, ob Temperatur des Terpentinöls, Einstellung der Nadel bei ungeschlossenem Strome und bei kurzem Schlusse dieselben waren, wie zuvor.

Auf diese Weise wurde für die beiden Krystallplatten eine Reihe von Versuchen gemacht, und zwar wurde bald das analoge, bald das antiloge Ende der Krystalle mit der

Eisplatte zur Berührung gebracht. Die Resultate stellte ich graphisch dar durch Curven, deren Abscissen die Zahl der Secunden vom Beginn des Contacts der Turmalinplatte mit dem Eise an gerechnet sind und deren Ordinaten die zugehörigen Temperaturen von a in Scalentheilen ausgedrückt bilden. Dabei war die Empfindlichkeit des Galvanometers so gewählt, dass einer Temperaturdifferenz von einem Grad etwa 60 Scalentheile entsprachen.

Von den so erhaltenen Curven wurde für die weitere Betrachtung nur das mittlere Stück benutzt; das erste Stück zeigt nothwendig einen weniger regelmässigen Verlauf, das letzte ist ebenfalls unbrauchbar, weil die Temperaturänderung in den Endstadien des Versuches langsam vor sich geht, und daher die Beobachtungsfehler grösser werden. Für die dickere Platte berücksichtigte ich für die Constructionen das Stück der Curven zwischen den Abscissen $t = 20$ Secunden und $t_1 = 200$ Secunden; für die dünnere, wo der Temperaturverlauf sich rascher vollzieht, von $t = 20$ bis $t_1 = 150$ Secunden.

Infolge der unvermeidlichen Schwankungen in der Temperatur des Arbeitszimmers sind die Anfangsordinaten der den einzelnen Versuchen entnommenen Temperaturcurven nicht gleich, sondern variiren etwas; die grösste Differenz, die ich zugelassen habe, beträgt 3 Proc. Um nun aus allen Versuchen für eine und dieselbe Lage einer der Platten den wahrscheinlichen Temperaturverlauf zu erhalten, habe ich für jede Curve alle Ordinaten in demselben Verhältniss vergrössert oder verkleinert derart, dass für $t = 20$ Secunden die Ordinaten aller Curven einen und denselben Werth erhielten. Für die späteren Zeitpunkte werden dann die einzelnen Curven etwas verschiedene Gestalt besitzen, und man wird für die gewählte Anfangstemperatur die wahrscheinlichste Temperaturcurve erhalten, wenn man als Ordinaten derselben die Mittelwerthe der Ordinaten der in der angegebenen Weise reducirten Curven wählt. Es ist dieses Verfahren nicht streng richtig; da indess die Versuche zeigten, dass die verschiedenen Anfangstemperaturen entsprechenden Curven sich einander mehr und mehr nähern, wenn man zu grösseren Abscissen fortschreitet, und ausserdem die Abweichungen

der einzelnen Curven voneinander gering sind, kann der begangene Fehler nur unbedeutend sein.

Was die derselben Lage einer Platte entsprechenden, auf dieselbe Anfangstemperatur reducirten Curven betrifft, beschränke ich mich auf die Angabe, dass die Abweichungen derselben sich auf höchstens 3 Proc. belaufen. Ich füge dagegen in den Figuren 3 und 4 die auf die angegebene Weise für die beiden Platten erhaltenen wahrscheinlichsten Temperaturcurven bei; darin ist mit *A* die Linie bezeichnet, die man erhält, wenn der Wärmestrom vom analogen zum antilogen Pol geht, mit *B* die der entgegengesetzten Richtung entsprechende.

Wie man sieht, fallen für jede der beiden Platten die Curven *A* und *B* sehr nahe zusammen; die grösste Differenz zwischen zwei zusammengehörigen Ordinaten ist etwa 1 Proc., also jedenfalls nicht grösser als die Differenzen, die sich für verschiedene Versuche bei derselben Lage der Platte ergeben hatten.

Man kann daraus also den Schluss ziehen, dass eine unilaterale Leitung der Wärme im Turmalin entweder nur einen sehr geringen Betrag erreicht oder, was mir wahrscheinlicher ist, gar nicht vorhanden ist.

Phys. Inst. der Univ. Strassburg i. E., Mai 1884.

V. *Die Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme; von Eug. Blasius.*

(Hierzu Taf. VII Fig. 5–8.)

Die Theorie von der Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme ist von sehr grosser Bedeutung für die Krystallographie, ihre Behandlung ist aber wegen der Rechnungen, die dabei angewandt wurden, keine leichte gewesen, und obwohl Gelehrte, wie F. E. Neumann¹⁾, Grailich und v. Lang²⁾

1) F. E. Neumann, Pogg. Ann. 27. p. 240. 1833.

2) Grailich u. v. Lang, Wien. Ber. 33. p. 369. 1859.

und C. Neumann¹⁾ sich mit dem Gegenstande beschäftigt, war es möglich, dass bis in die neueste Zeit recht unklare und verkehrte Meinungen darüber vorkamen. Das Verdienst L. Fletcher's²⁾ ist es, in den letzten Jahren nicht nur auf die dunkeln Punkte der Theorien aufmerksam gemacht, sondern auch die ganze Lehre aufs neue aufgebaut und erweitert zu haben.

Die einzige Voraussetzung, die man in dieser Theorie macht, ist nach unseren heutigen Anschauungen über die Krystalle eine sehr sichere, nämlich die, dass alle Geraden des Krystalles (alle Kanten) Gerade bleiben, und dass parallele Gerade parallel bleiben, wenn die Temperatur sich ändert. Diese Grundlage ist ausserordentlich einfach, dagegen sind die Rechnungen schon ziemlich complicirt.

Da die Verhältnisse bei der Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme, sowie wir sie jetzt kennen, in der That der Auffassung manche Schwierigkeiten darbieten, ist es angebracht, jede Bestätigung einer bezüglichen Theorie anzuführen, um so mehr, wenn die Methode, wie die im Folgenden gegebene, es erlaubt, neue Resultate zu den in einfacher Weise abgeleiteten bekannten Thatsachen hinzuzufügen.

Die Grundlage der ganzen Lehre von der Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme ist, wie oben erwähnt, die Annahme, dass alle Punkte, die bei einer Temperatur in einer Geraden liegen, auch bei jeder anderen Temperatur in einer Geraden liegen, und dass parallele Gerade für alle Temperaturen parallel bleiben.

Daraus folgt:

1. Die verschiedenen Configurationen, in die ein Krystall bei Aenderung der Temperatur übergeht, sind alle untereinander affin.

Für den Geometer ist mit diesem Satze die ganze Theorie von der Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme gegeben. Dass auf denselben nicht schon früher hingewiesen

1) C. Neumann, Pogg. Ann. 114. p. 492. 1861.

2) L. Fletcher, Phil. Mag. 9. p. 81. 1880. Uebersetzt: Groth's Zeitschr. f. Kryst. 4. p. 337. 1880. Phil. Mag. 16. p. 275, 344, 412. 1883. Uebersetzt: Groth's Zeitschr. f. Kryst. 8. p. 455. 1884.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXII.

wurde, liegt daran, dass sich wenige Geometer mit krystallographischen Fragen und wenige Krystallographen mit neuerer Geometrie beschäftigen. Aus demselben Grunde sehe ich mich im Folgenden zuweilen genöthigt, auf beiden Gebieten elementare Erläuterungen zu geben. Da aber unsere Methode die Anwendung auch solcher Sätze gestattet, die nicht zu den allerleichtesten der Geometrie gehören, so muss ich es allerdings auch oft bei einer Angabe der Stelle bewenden lassen, wo der Beweis gegeben ist.

Endlich möchte ich noch bemerken, dass sogar die Bewegungen solcher Systeme, die sich in affine Systeme verwandeln, Bearbeiter gefunden hat, freilich ohne dass dabei auf die Ausdehnung der Krystalle Bezug genommen wurde. Hr. Durrande¹⁾ hat diesen Fall analytisch, Hr. Burmester²⁾ synthetisch behandelt. Ich fand die betreffenden Abhandlungen erst, nachdem ich mit meiner Arbeit fertig zu sein glaubte.

Wir haben es also bei unserem Thema mit der merkwürdigen Erscheinung zu thun, dass fertige mathematische Entwicklungen einer einfachen Anwendung auf die Beantwortung ziemlich verwickelter praktischer Fragen harren.

Der Einfachheit halber fangen wir mit der Ausdehnung in der Ebene an. Die Sätze gelten für alle ebenen Krystallflächen.

I. Die Ausdehnung in der Ebene.

2. Nach der Lehre von den affinen Ebenen verwandeln sich bei einer Ausdehnung Ellipsen in Ellipsen, Hyperbeln in Hyperbeln und Parabeln in Parabeln. Ein auf die Krystallfläche gezeichneter Kreis verwandelt sich demnach im allgemeinen in eine Ellipse. Die Axen der letzteren entsprechen als conjugirte Durchmesser zwei aufeinander senkrecht stehenden Durchmessern des Kreises, sie sind die Linien der grössten und kleinsten Ausdehnung, und man hat sie in einer

1) Durrande, *Compt. rend.* 74. p. 1243. 1872; 75. p. 1177. 1872; 78. p. 1036. 1874. *Ann. scient. de l'école normale supérieure* (2) 2. p. 81. 1873.

2) Burmester, *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* 23. p. 108. 1878.

Zeit, als man ihre Bedeutung überschätzte, „thermische Axen“ genannt.

3. Denkt man sich einen Kreis aus der Krystallfläche herausgeschnitten und seinen Mittelpunkt festgehalten, so verwandelt sich der Strahlenbüschel S , der aus allen durch den Mittelpunkt gehenden Strahlen besteht, in einen zu S projectivischen Strahlenbüschel S_1 , wie wir ebenfalls aus der Theorie der affinen Ebenen wissen.

4. Von dem Strahlenbüschel S_1 fallen höchstens zwei Strahlen auf die entsprechenden Strahlen des Büschels S . Wirken nur die durch Temperaturänderung hervorgebrachten inneren Kräfte, so sind, wie Fletcher bewiesen hat, die zwei Strahlen reell, und Fletcher nennt dieselben „atropische“ Linien.

Da wir durch Messung der Winkel des Krystalles erst bei einer Temperatur, dann bei der anderen nur wissen, in welchen Strahlenbüschel S_1 der Strahlenbüschel S übergegangen ist, aber nicht, wie wir den Büschel S_1 zu S stellen müssen, um anzudeuten, dass nur innere Kräfte gewirkt haben, so ist auch nichts über die Lage der atropischen Linien aus solchen Winkelmessungen zu erfahren.

5. Um die atropischen Linien wirklich zu finden, ist es nöthig, dass man die Lage eines Strahles von S im Raum, bei einer Temperatur beobachtet, dann den Krystall ohne Einwirkung äusserer Kräfte sich ausdehnen lässt, und schliesslich den Winkel misst, den die neue Lage des Strahles mit der früheren einschliesst. Dadurch wäre die Lage des Strahlenbüschels S_1 gegen S völlig bestimmt, und infolge dessen auch die atropischen Linien.

Da solche Messungen, wie die beschriebene, noch von niemand gemacht sind, steht es uns frei, den Strahlenbüschel S_1 zu dem Büschel S zu legen, wie wir wollen. Es gilt dann der oben schon erwähnte Satz, dass höchstens zwei Strahlen des einen Büschels auf die entsprechenden Strahlen des anderen fallen. Legen wir S_1 so auf S , dass irgend ein bestimmter Strahl a auf den ihm entsprechenden Strahl a_1 zu liegen kommt, so haben die Büschel S und S_1 im allgemeinen noch einen Strahl b , resp. b_1 entsprechend gemein,

und es folgt daraus, da der Winkel, den a und b einschliessen, derselbe sein muss wie der, den a_1 und b_1 einschliessen:

6. Zu irgend einem Strahl a lässt sich im allgemeinen ein und nur ein Strahl b finden, dessen Neigung zu a vor der Ausdehnung dieselbe ist, wie nachher.

Diese Verhältnisse lassen sich am leichtesten übersehen, wenn wir Gebrauch machen von einer der wichtigsten Eigenschaften der projectivischen Strahlenbüschel, nämlich derjenigen, dass sie sich in perspectivische Lage bringen lassen. Sei a die Punktreihe, deren Schein die Büschel S und S_1 beide sind. Legen wir dann durch die Punkte S und S_1 irgend einen Kreis, der u schneidet, und verbinden die Schnittpunkte A und B desselben mit den Punkten S und S_1 , so entsprechen den Strahlen SA und SB beziehungsweise die Strahlen S_1A und S_1B , zugleich muss der Winkel ASB gleich dem Winkel AS_1B sein.

7. Daraus lernen wir zu irgend einem Strahl a des ersten Büschels denjenigen Strahl zu construiren, der vor und nach der Ausdehnung mit a denselben Winkel einschliesst. Wir brauchen nur durch S, S_1 und den Punkt A , in dem a die Gerade u schneidet, einen Kreis zu legen, und S mit dem zweiten Schnittpunkte B des Kreises mit u zu verbinden. Die Gerade SB ist die gesuchte.

8. Um die „thermischen Axen“, d. h. die Geraden, die sowohl vor wie nach der Ausdehnung aufeinander senkrecht stehen, zu finden, ist ein Kreis durch S und S_1 zu legen, dessen Mittelpunkt M auf u liegt (Fig. 5). Verbinden wir dann die Schnittpunkte A und B des Kreises und der Geraden u sowohl mit S wie mit S_1 , so sind SA, SB , resp. S_1A und S_1B die thermischen Axen. Der Mittelpunkt M wird gefunden, indem man in dem Halbirungspunkte der Strecke SS_1 auf dieser ein Loth errichtet, welches u in M schneidet.

Statt nun wie bisher nur zwei Phasen der Aenderung unseres Systems zu beobachten, ziehen wir jetzt eine dritte Phase hinzu und untersuchen also den Fall von zwei Ausdehnungen. Der Strahlenbüschel S möge durch die eine Ausdehnung in S_1 , durch die andere in S_2 übergeführt werden.

Wir können S und S_1 wie oben in perspectivische Lage zu einer und derselben Punktreihe u bringen. S_2 ist dann projectivisch auch zu u und lässt sich ebenfalls zu der Punktreihe u in perspectivische Lage bringen. Durch die Centra der drei Büschel S , S_1 und S_2 kann ein einziger Kreis gelegt werden. Verbindet man dann die Punkte A und B , in denen der Kreis u schneidet, mit den Punkten S , S_1 und S_2 , so sind die Winkel ASB , AS_1B und AS_2B alle gleich, und die Strahlen SA und SB sind die einzigen im Büschel S , die nach beiden Ausdehnungen dieselbe Neigung gegeneinander haben als vorher; sie sind daher die einzigen Linien, die für beide Ausdehnungen atropisch sein könnten. Es folgt:

9. Bei zwei Ausdehnungen des Systems gibt es nur zwei Linien, die nach beiden Ausdehnungen dieselbe Neigung zu einander haben wie vorher. Ferner:

10. Sind bei zwei Ausdehnungen die atropischen Linien dieselben, so müssen die thermischen Axen bei den beiden Ausdehnungen verschiedene sein. Sind die thermischen Axen bei zwei Ausdehnungen dieselben, so müssen die atropischen Linien für diese Ausdehnungen verschieden sein. Eine Ausnahme von diesem Satz ist der Fall, in welchem die atropischen Linien selbst die thermischen Axen sind.

Haben wir es nicht mit drei Phasen, sondern mit beliebig vielen zu thun, und sollen die atropischen Linien immer dieselben sein, so liegen alle Mittelpunkte der Strahlenbüschel S_1 , S_2 , S_3 etc., in die der Strahlenbüschel S übergeht, wenn man die Strahlenbüschel alle in perspectivische Lage zu einer Punktreihe u gebracht hat, auf der Peripherie eines Kreises K .

11. Betrachten wir dann unter derselben Voraussetzung, dass die atropischen Linien immer dieselben sein sollen, stetige Aenderungen des Systems, so muss, wenn wir die verschiedenen Phasen des Strahlenbüschels S in perspectivische Lage zu einer und derselben Punktreihe bringen, das Centrum dieses Strahlenbüschels sich stetig auf dem Kreise K bewegen. Dann lässt sich auf folgende Weise die

Lage der thermischen Axen in jedem Moment der stetigen Aenderung des Systems angeben. Man sucht den Kreis K_1 , der durch die beiden sehr nahe aneinander liegenden Punkte S und S_1 auf K geht, und dessen Mittelpunkt auf der Punktreihe u liegt. Im Grenzfalle (Fig. 6) wo S_1 mit S zusammenfällt, construirt man die Tangente in S und errichtet in S auf dieser eine Normale, bis letztere u in M_1 schneidet, d. h. einfacher, man verlängert den durch S gehenden Radius MS von K bis zum Schnitte M_1 mit u und beschreibt mit dem Radius M_1S einen Kreis K_1 . Dieser schneidet u in zwei Punkten X und Y , die, mit S verbunden, die thermischen Axen ergeben.

12. Für den Fall, dass bei stetiger Aenderung des Systems die atropischen Linien nicht immer dieselben bleiben, beschreibt das Centrum des Strahlenbüschels S , wenn wir wieder alle seine Phasen in perspectivische Lage zu einer Punktreihe u bringen, nicht mehr, wie eben, die Peripherie eines Kreises, sondern dasselbe bewegt sich auf irgend einer Curve. Diese Curve gibt uns zusammen mit der Punktreihe u ein Bild von den thermischen Aenderungen des Systems. Beispielsweise würde für eine jede Ebene eines regulären Krystalles, wo keine Winkeländerungen auftreten, und daher die verschiedenen Phasen des Strahlenbüschels S lauter projectivisch gleiche Büschel sind, die Curve aus einem einzigen Punkte bestehen. Für den Fall einer Symmetrieebene im rhombischen System, wo die beiden Axen zugleich constante thermische Axen und atropische Linien sind, ist die Curve ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf u liegen muss.

13. Ist die für die Ausdehnung charakteristische Curve C gegeben und die Punktreihe u , so lässt sich auch wieder sehr leicht die Lage der thermischen Axen für jede Phase des Systems finden, wenn wir unter den thermischen Axen für eine Phase des Systems diejenigen thermischen Axen verstehen, die für die Aenderung von der betreffenden in eine unendlich benachbarte Phase gelten. Wir construiren wieder denjenigen Kreis K , der C in dem die Phase bestimmenden Punkte S tangirt, und dessen Mittelpunkt auf u liegt. Sind

X und Y die Schnittpunkte von K mit u , so sind SX und SY die thermischen Axen.

14. Wir wenden uns jetzt zu der Aufgabe, durch Construction die atropischen Linien zu finden. Damit dieselben bestimmt seien, forderten wir oben (unter 5.) als nothwendige und hinreichende Angaben die beiden Phasen des Strahlenbüschels S und ihre gegenseitige Lage. Angenommen wurde noch, dass dieselben concentrisch seien. Wir verfahren nach Reye¹⁾ folgendermassen. Durch S werde ein Kreis gelegt (Fig. 7). Derselbe schneide drei Strahlen des ersten Büschels in A , B und C , die entsprechenden Strahlen des zweiten Büschels in A_1 , B_1 und C_1 . Verbinden wir dann durch die Gerade u den Schnittpunkt von AB_1 und A_1B mit dem Schnittpunkte von BC_1 und B_1C und bringen u mit dem Kreise zum Durchschnitt in M und N , so sind SM und SN die gesuchten atropischen Linien.

Sollen für eine Reihe weiterer thermischer Veränderungen dieselben Krystalllinien atropische Linien bleiben, so ist nothwendig, dass sich (Fig. 8) AB_2 und A_2B , AB_3 und A_3B , AB_4 und A_4B auf MN schneiden, wobei A_2 , B_2 , C_2 , A_3 , B_3 , C_3 und A_4 , B_4 , C_4 die Schnittpunkte der Krystalllinien SA , SB , SC in ihren neuen Lagen nach jeder Ausdehnung mit dem oben erwähnten Kreis sind. Ebenso ist ferner nothwendig, dass sich auf MN schneiden BC_2 und B_2C , BC_3 und B_3C , BC_4 und B_4C . Daraus folgt, dass der Strahlenbüschel $A_{(B_1 B_2 B_3 B_4)}$ perspectivisch zum Büschel $B_{(A_1 A_2 A_3 A_4)}$ ist. Da nun $A_{(B_1 B_2 B_3 B_4)}$ projectivisch ist zu $S_{(B_1 B_2 B_3 B_4)}$ und $B_{(A_1 A_2 A_3 A_4)}$ projectivisch ist zu $S_{(A_1 A_2 A_3 A_4)}$, so ist endlich der Büschel $S_{(A_1 A_2 A_3 A_4)}$ projectivisch zu $S_{(B_1 B_2 B_3 B_4)}$. Es folgt demnach der Satz:

15. Wenn die atropischen Linien bei einer Reihe von thermischen Aenderungen dieselben bleiben, so beschreiben die durch ihren Schnittpunkt S gehenden Strahlen SA , SB , SC etc. zu einander projectivische Strahlenbüschel.

Die entsprechend gemeinen Strahlen aller dieser Strahlen-

1) Reye, Geometrie der Lage. 2. Aufl., 1. p. 140—141. 1882.

büschel sind die atropischen Linien SM und SN , wovon man sich leicht an der Figur überzeugt.

Wir nennen mit Seydewitz die Punkte und Geraden eines Systems, welche auf die ihnen entsprechenden Gebilde eines affinen Systems fallen, Situationspunkte und Situationsgeraden. Dieselben hängen natürlich von der gegenseitigen Lage der beiden Systeme ab. Zu den Situationslinien zweier affinen Systeme gehört immer die unendlich ferne Gerade, ausserhalb dieser haben zwei affine Systeme im allgemeinen noch einen Punkt gemein und zwei durch diesen gehende Gerade. Nehmen wir an, dass ein System eine Wärmeausdehnung erfahre, ohne dass äussere Kräfte mit zur Bewegung beitragen, so müssen diejenigen beiden Linien, die ihre Lage im Raume beibehalten, also die beiden Situationslinien für diesen Fall die atropischen Linien Fletcher's sein. Verschieben wir dagegen willkürlich das System, nachdem es sich ausgedehnt hat, so können wir irgend zwei Gerade, die ihre Neigungen bei der Ausdehnung nicht verändert haben (vgl. oben 6.), zu Situationslinien machen. Da die atropischen Linien im Sinne Fletcher's in geometrischer Beziehung nichts vor den übrigen möglichen Situationslinien voraus haben, so lassen sich verschiedene von den obigen Sätzen, in denen die atropischen Linien vorkommen, erweitern, indem man an die Stelle der atropischen Linien die Situationslinien setzt. Dasselbe gilt auch für das Folgende.

Eine Punktreihe g , deren Träger einer atropischen Linie a_1 parallel ist, verwandelt sich in eine zu ihr parallele und projectivische Punktreihe g_1 . Verbinden wir einen beliebigen Punkt von g mit dem entsprechenden Punkte von g_1 , und verlängern die Verbindungslinie v bis zum Schnittpunkt P mit der anderen atropischen Linie a_2 , so gehen durch P die Verbindungsgeraden von drei einander entsprechenden Punkten der Geraden g und g_1 ; nämlich die Gerade v , die atropische Linie a_2 und eine Gerade parallel zu a_1 , welche die unendlich fernen einander entsprechenden Punkte von g und g_1 projicirt. Es folgt, dass g zu g_1 perspectivisch liegt. P ist dabei das Centrum der Projection. Also:

16. Eine Punktreihe g , deren Träger einer atropischen Linie parallel läuft, verwandelt sich in eine dazu perspectivische und parallele Punktreihe, wobei das Centrum der Projection auf der anderen atropischen Linie liegt.

Wir betrachten wieder mehrere Ausdehnungen, bei denen die atropischen Linien dieselben sein sollen, und nehmen an, dass der Punkt A in allen Phasen dieser Ausdehnungen sich auf einer geraden Linie bewegen soll. Die Punktreihe g , die man durch A parallel zur atropischen Linie a_1 legt, ist nach dem vorigen Satz perspectivisch zu allen Punktreihen g_1, g_2 etc., in die sie bei den Ausdehnungen übergeht. Weil die Verbindungslinien des Punktes A mit seinen entsprechenden Punkten alle in v zusammenfallen, wie man aus der Voraussetzung sieht, so muss der Schnittpunkt von v mit der atropischen Linie a_2 Mittelpunkt eines Strahlenbüschels sein, zu welchem alle Punktreihen g, g_1, g_2 etc. perspectivisch liegen. Daraus folgt, dass jeder Punkt der Geraden g in allen Phasen der Ausdehnung sich auf einer Geraden des Raumes befinden muss. Dieselbe Beweisführung lehrt uns, dass das Gleiche für alle Punkte einer Punktreihe q der Fall ist, die durch den Punkt A parallel zur zweiten atropischen Linie gelegt wird. Durch jeden Punkt dieser letzten Geraden q legen wir nun Punktreihen parallel zur ersten atropischen Linie a_1 . Auch alle Punkte dieser Punktreihen, d. h. alle Punkte der Ebene besitzen die Eigenschaft, die wir zuerst nur bei A vorausgesetzt haben, und es gilt der Satz:

17. Bewegt sich ein Punkt infolge thermischer Ausdehnungen, bei denen die atropischen Linien dieselben bleiben, auf einer Geraden, so beschreiben auch alle übrigen Punkte der Krystallebene gerade Linien.

Ein Parallelstrahlenbüschel verwandelt sich durch eine Ausdehnung wieder in einen Parallelstrahlenbüschel. Die unendlich ferne Gerade haben beide gemein, daher sind sie perspectivisch. Eine Gerade des ersten Büschels wird im Schnittpunkte der atropischen Linien von der entsprechenden Geraden des zweiten Büschels geschnitten, und daraus folgt,

dass die Punktreihe, deren Schein beide Strahlenbüschel sind, durch den besagten Punkt geht. Also:

18. Alle Strahlen eines Parallelstrahlenbüschels schneiden sich mit ihren entsprechenden Strahlen auf einer durch den Schnittpunkt der atropischen Linien gehenden Geraden.

Ein Strahlenbüschel S , dessen Mittelpunkt auf einer atropischen Linie a_1 liegt, geht in einen Strahlenbüschel S_1 über, dessen Mittelpunkt ebenfalls auf a_1 liegt. Durch den Schnittpunkt P zweier entsprechender Strahlen legen wir eine Parallele g zur anderen atropischen Linie a_2 , dann haben die projectivischen Punktreihen, in denen g von S und S_1 geschnitten wird, drei Punkte entsprechend gemein; nämlich P und die beiden Schnittpunkte von g mit den beiden atropischen Linien, wovon der eine im Unendlichen liegt. Infolge dessen sind S und S_1 perspectivisch zu g .

19. Ein Strahlenbüschel, dessen Centrum auf einer atropischen Linie liegt, und sein entsprechender Strahlenbüschel sind perspectivisch und Scheine einer Punktreihe, deren Träger der anderen atropischen Linie parallel läuft.

Ein einziger Strahl eines solchen Strahlenbüschels S bestimmt mit seinem entsprechenden Strahl die Punktreihe, zu der sowohl dieser Strahlenbüschel S als sein entsprechender perspectivisch sind. Nun sollen bei mehreren Ausdehnungen die atropischen Linien constant bleiben; ausserdem wollen wir annehmen, dass die verschiedenen Geraden des Systems, in die eine gewisse Gerade a des Krystalles übergeht, sich alle in einem Punkte des Raumes schneiden.

Die Gerade a schneidet die atropische Linie a_1 in einem Punkte S . Der Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt S ist, liegt perspectivisch zu den sämtlichen Strahlenbüscheln, in die er übergeht, und zwar sind sie sämtlich perspectivisch zu einer Punktreihe g , die durch den Schnittpunkt von a mit den entsprechenden Geraden a_1, a_2, a_3 etc. parallel zur anderen atropischen Linie gelegt wird. Sämtliche Strahlen des Büschels S haben infolge dessen dieselbe Eigenschaft wie a , jeder schneidet sich mit allen Geraden, in die er über-

geht, in einem Punkte von g . Alle Strahlen eines Büschels S_1 , dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt einer der Strahlen des Büschels S mit der zweiten atropischen Linie a_2 ist, haben dieselbe Eigenschaft wie a . Ein jeder dieser Büschel enthält nämlich eine Gerade SS_1 , welche die Eigenschaft hat, und daraus ergibt sich, wie wir eben für S gesehen haben, dass alle Strahlen des Büschels S_1 die Eigenschaft haben. Damit ist der Satz bewiesen:

20. Geht eine Gerade a in mehreren Phasen der Ausdehnung, bei denen die atropischen Linien dieselben sind, durch einen Punkt P des Raumes, so geht auch jede andere Gerade b des Systems bei diesen Phasen durch denselben Punkt Q .

Für den Fall, dass die Bedingungen des vorigen Satzes bei einer Aufeinanderfolge von stetigen Aenderungen des Systems erfüllt sein sollen, ist noch der Weg zu untersuchen, den ein Punkt des Krystalles beschreibt. Der Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt ein beliebiger Punkt P der Ebene ist, geht in einen projectivischen Büschel über. Bei der ersten Ausdehnung mag der Büschel, dessen Mittelpunkt P ist, in einen Büschel P_1 übergehen. Entsprechende Strahlen von P und P_1 schneiden sich, wenn die atropischen Linien reell sind, auf Punkten einer Hyperbel H , die durch den Schnittpunkt der atropischen Linien geht, und deren Asymptoten den letzteren parallel laufen. Bei der folgenden Ausdehnung gehe P_1 in einen Büschel P_2 über. Aus unseren Bedingungen folgt, dass jeder Strahl von P_2 durch den Punkt der Hyperbel H geht, in dem sich die entsprechenden Strahlen von P und P_1 schneiden. Dies ist, da P_2 zur Hyperbel projectivisch ist, nur möglich, wenn P_2 selbst auf der Hyperbel liegt.¹⁾ Es folgt also:

21. Bleiben bei stetigen Ausdehnungen des Systems die (reellen) atropischen Linien dieselben, und ist die Bedingung erfüllt, dass eine und folglich jede Gerade des Krystalles in allen Phasen der Ausdehnung durch denselben Punkt geht, so

1) Reye, Geometrie der Lage. 1. p. 108. 1882.

bewegt sich im allgemeinen ein jeder Punkt des Systems auf einer Hyperbel.

Die Sätze 16, 18 und 19 sind nur Specialfälle einiger von Seydewitz¹⁾ für die Situationslinien und Situationspunkte ausgesprochener Sätze.

Da eine Punktreihe a bei einer Ausdehnung in eine zu a projectivische Punktreihe a_1 verwandelt wird, so bilden die Verbindungslinien entsprechender Punkte einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung, und da a und a_1 ähnlich sind, so umhüllt dieser Strahlenbüschel zweiter Ordnung eine Parabel. Also:

22. Bei einer unendlich kleinen Ausdehnung umhüllen die Bewegungsrichtungen aller Punkte einer Geraden eine Parabel. Bei einer endlichen Aenderung des Systems umhüllen die Verbindungen aller Punkte, die vor der Ausdehnung auf einer Geraden liegen, mit den entsprechenden Punkten nach der Ausdehnung eine Parabel.

Ausnahmefälle, wo die einander entsprechenden Punktreihen perspectivisch liegen, wo also die Bewegungsrichtungen der Punkte einer Geraden alle durch einen Punkt gehen, haben wir schon früher (vgl. Satz 16) kennen gelernt.

Nun mag noch hier der Satz Burmester's²⁾ seinen Platz finden:

23. Der geometrische Ort der Systempunkte einer Phase eines affin veränderlichen ebenen Systems, welche gleiche Geschwindigkeiten besitzen, ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Geschwindigkeitspol ist.

„Geschwindigkeitspol“ nennt Hr. Burmester den sich selbst entsprechenden Punkt der beiden Systeme. Da bei der Ausdehnung der Krystalle die Zeit keine Rolle spielt, so habe ich den Ausdruck Geschwindigkeitspol sonst nicht gebraucht. An die Stelle von „Geschwindigkeiten“ kann man in dem obigen Satz „Verschiebungen“ setzen.

1) Seydewitz, Grunert's Arch. 8. p. 25. 1846.

2) Burmester, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 23. p. 123. 1878.

Hiermit ist die Reihe leicht abzuleitender Sätze für die Ausdehnung in der Ebene nicht abgeschlossen. Wir verlassen aber jetzt diese einfachere Theorie und wenden uns zu der Lehre von der Ausdehnung der Krystalle als affinveränderliche räumliche Systeme.

II. Die Ausdehnung im Raume.

Für die asymmetrischen Krystalle ist die thermische Ausdehnung im Raume von hoher Bedeutung. Die Anwendung der Geometrie der Lage auf diesen allgemeinen Fall zeigt sich noch nützlicher, als ihre Anwendungen auf die thermischen Veränderungen in der Ebene. Hier, wo die rechnenden Methoden sehr hohe Anforderungen an das Anschauungsvermögen stellen, lässt sich am ehesten der Vortheil der geometrischen Methode würdigen.

Wir haben es jetzt also mit affinen räumlichen Systemen zu thun. Es lässt sich fast alles, wie bei den ebenen Systemen wiederholen. Ausser der unendlich fernen Situationsebene besitzen zwei affine Systeme im allgemeinen einen Situationspunkt im Endlichen. Durch diesen gehen dann noch höchstens drei Situationsebenen und drei Situationsstrahlen, wenn wir nicht den besonderen Fall der perspectivischen Lage haben.

Zu den Situationsebenen gehören die atropischen Ebenen Fletcher's, und zwar sind dies diejenigen Situationsebenen, die wir erhalten, wenn die gegenseitige Lage der beiden Systeme der thermischen Ausdehnung ohne Einwirkung äusserer Kräfte entspricht. Wie schon für die Ausdehnung in der Ebene bemerkt wurde, haben wir im allgemeinen noch keine Beobachtungen über die Lage der atropischen Ebenen. In besonderen Fällen allerdings, nämlich für die regulären und optisch einaxigen, sowie für die rhombischen Krystalle lassen sich die Verhältnisse schon ohne weiteres übersehen. Für das reguläre Krystallsystem müssen alle Ebenen atropisch sein, für die einaxigen Krystalle alle durch die Hauptaxe gelegten Ebenen und die zu ihr senkrechte Symmetrieebene, und für die rhombischen Krystalle die drei Symmetrieebenen. In letzterem Falle sind die thermischen

Axen zugleich atropische Linien. Bei den Krystallen des monosymmetrischen Systems lässt sich noch eine atropische Linie und eine atropische Ebene angeben; nämlich die Symmetrieaxe und die Symmetrieebene. Ueber die atropischen Ebenen im asymmetrischen System lässt sich nichts sagen, weil keine experimentellen Angaben vorliegen; für die beiden atropischen Ebenen, die im monosymmetrischen Systeme noch unbekannt sind, lässt sich nur behaupten, dass sie senkrecht auf der Ebene der Symmetrie stehen müssen.

24. Von einem Büschel paralleler Ebenen im ersten System und dem ihm entsprechenden Büschel im anderen System schneiden sich je zwei homologe Ebenen auf einer durch den Situationspunkt gehenden Ebene.

Die beiden Büschel sind nämlich projectivisch und haben ihre unendlich ferne Ebene entsprechend gemein, liegen also perspectivisch. In dem Situationspunkt aber schneiden sich zwei homologe Ebenen der Büschel.

25. Hiernach ergibt sich die Construction des Situationspunktes, wenn vier Paar homologe Punkte oder Ebenen der affinen Systeme gegeben sind. Dieselben bilden zwei einander entsprechende Tetraëder. Ist s die Schnittlinie von zwei einander entsprechenden Tetraëderflächen und s_1 diejenige der zu ihnen beziehungsweise parallelen Ebenen, welche durch die gegenüberliegenden Tetraëderecken gehen, so liegen s und s_1 mit dem gesuchten Situationspunkte in einer Ebene ε . Man erhält auf diese Weise vier Ebenen ε , welche sich in dem Situationspunkte schneiden.

26. Einer Kugel im einen affinen System entspricht ein Ellipsoid im anderen. Den drei Hauptaxen des Ellipsoides entsprechen als conjugirte Durchmesser drei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser der Kugel. Dies sind die Linien der grössten, kleinsten und mittleren Ausdehnung oder die thermischen Axen.

Jeder Strahlenbündel des einen Systems geht in einen collinearen Strahlenbündel des anderen Systems über, und es gilt der Satz:

In zwei collinearen Strahlenbündeln gibt es allemal ein

paar homologe rechtwinklige Dreikante, d. h. es gibt drei zu einander rechtwinklige Strahlen des einen, welchen drei ebensolche Strahlen des anderen entsprechen.¹⁾ Diese Tripel von rechtwinkligen Strahlen sind die thermischen Axen.

Zwei collineare räumliche Systeme erzeugen im allgemeinen einen Strahlencomplex zweiten Grades. Zwei einander entsprechende Ebenen der collinearen Systeme schneiden sich in einem Strahl desselben, und zwei einander entsprechende Punkte werden durch einen seiner Strahle verbunden. Die entsprechend gemeinen Punkte und Ebenen der beiden collinearen Räume nennt man Hauptpunkte und Hauptebenen des Complexes. Sind diese alle reell, so gibt es im allgemeinen höchstens vier Hauptpunkte und vier Hauptebenen. Diese sind die Ecken und Flächen des sogenannten Haupttetraëders. Zwei affine Räume erzeugen einen Strahlencomplex, dessen eine Hauptebene die unendlich ferne Ebene ist. Wir nennen mit Hrn. Burmester diesen tetraëdralen Strahlencomplex, dessen eine Hauptebene im Unendlichen liegt, einen triëdralen Strahlencomplex. Den im Endlichen liegenden, sich selbst entsprechenden Punkt oder Situationspunkt der beiden affinen Systeme nennt Burmester den Geschwindigkeitspol. Wir wollen ihn im Folgenden den „Verschiebungspol“ nennen. Bei einer thermischen Aenderung des Krystalles von einer Temperatur zu einer um eine endliche Differenz davon verschiedenen Temperatur wird jeder Punkt des Krystalles eine Curve beschreiben. In den folgenden Sätzen nennen wir die Strecke, die die Anfangslage eines Punktes mit seiner Endlage verbindet, die Verschiebung des Punktes. Für eine verschwindend kleine Temperaturdifferenz ist diese Verschiebung der wirkliche Weg des Punktes. In denjenigen der folgenden Sätze, die von Burmester entlehnt sind, ersetzen wir die „Geschwindigkeiten“, welche Burmester braucht, durch „Verschiebungen.“ Die Beweise der nächsten Sätze ergeben sich ohne weiteres.

27. Die Gesammtheit aller Geraden in einer Phase eines affin veränderlichen Systems, deren

1) Vgl. Seydewitz, Grunert's Arch. 9. p. 170. 1847.

Punkte in einer Ebene liegende Verschiebungsrichtungen besitzen, bilden einen triëdralen Strahlencomplex; und die in einer Ebene liegenden Verschiebungsrichtungen umhüllen eine Parabel.¹⁾

28. Die Verschiebungsrichtungen der Punkte einer Geraden des affin veränderlichen Systems erfüllen ein hyperbolisches Paraboloid.²⁾

29. Die Verschiebungsrichtungen der Punkte jeder durch den Verschiebungspol gehenden Geraden sind parallel.³⁾

30. Der geometrische Ort der Systempunkte eines affin veränderlichen Systems, deren Verschiebungsrichtungen durch einen Punkt gehen, ist eine Raumcurve dritter Ordnung, welche diesen Punkt und den Verschiebungspol enthält, und diese Richtungen erfüllen eine Kegelfläche zweiter Ordnung.⁴⁾

„Zwei entsprechende Ebenenbüschel in zwei affinen Systemen erzeugen ein durch die selbstentsprechenden Punkte gehendes Hyperboloid“, daraus folgt:

31. Bei einer verschwindend kleinen Aenderung des Krystalles durch die Wärme drehen sich alle, durch eine Gerade desselben gehenden Ebenen um Gerade eines Hyperboloids. Ferner:

32. Der geometrische Ort der Punkte eines affin veränderlichen Systems, deren Verschiebungsrichtungen eine Gerade schneiden, ist ein durch diese Gerade und den Verschiebungspol gehendes Hyperboloid, und die Gesammtheit dieser Richtungen umhüllt eine Complexfläche.⁵⁾

Ein Parallelebenenbüschel u verwandelt sich in einen Parallelebenenbüschel u_1 . Die entsprechenden Ebenen der beiden Büschel schneiden sich auf einer durch den Verschie-

1) Burmester, l. c. Satz 30.

2) Burmester, l. c. Satz 31.

3) Burmester, l. c. Satz 32.

4) Burmester, l. c. Satz 33.

5) Burmester, l. c. Satz 34.

biegungspol gehenden Ebene ε . Alle Punkte, deren Verschiebungen in den Ebenen des Büschels u_1 stattfinden, müssen auf der Ebene ε liegen. Diese Verschiebungen sind alle senkrecht zu der Normalen auf dem Büschel u_1 ; daraus folgt:

33. Alle Punkte in einer Phase eines affin veränderlichen Systems, deren Verschiebungsrichtungen senkrecht zu einer Geraden sind, liegen in einer durch den Biegungspol gehenden Ebene.

Dieser Satz ist von Hrn. Durrande¹⁾ analytisch abgeleitet worden. Der synthetische Beweis rührt von Hrn. Burmester²⁾ her.

Eine Ebene E_1 im affinen System S_1 gehe bei einer gewissen Aenderung der Temperatur in die Ebene E_2 im System S_2 über. Der Schnittgeraden von E_1 und E_2 im System S_2 entspricht eine auf E_1 liegende Gerade im System S_1 . Projiciren wir die Punkte der Ebene E_2 senkrecht auf die erste Ebene E_1 , so sind das ursprüngliche ebene System E_1 und die auf E_1 liegende Projection von E_2 zu einander affin und haben einen im Endlichen liegenden Punkt und zwei durch diesen gehende Gerade, die nicht reell zu sein brauchen, entsprechend gemein; hieraus folgt:

34. In jeder Ebene E_1 einer Phase eines affin veränderlichen Systems gibt es einen Punkt, dessen Verschiebungsrichtung senkrecht zu dieser Ebene E_1 ist, und zwei durch diesen Punkt gehende reelle oder imaginäre Gerade, die solche Punkte tragen, deren Verschiebungsrichtungen in senkrecht auf E_1 stehenden Ebenen liegen, und ferner eine Gerade, für deren Punkte die Verschiebungsrichtungen in der Ebene E_1 selbst liegen.

Ausgeschlossen sind bei diesem Satz die sich selbst entsprechenden (atropischen) Ebenen von S_1 und S_2 . Satz und Beweis sind von Hrn. Burmester.³⁾

Ohne den Beweis führen wir hier den zu 23. analogen Satz an:

1) Durrande, Compt. rend. 74. p. 1243. 1872.

2) Burmester, l. c. Satz 35.

3) Burmester, l. c. Satz 36.

35. Der geometrische Ort der Systempunkte einer Phase eines affin veränderlichen Systems, welche gleiche Verschiebungen erleiden, ist ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt der Verschiebungspol ist.¹⁾

Ein tetraëdraler Strahlencomplex ist bestimmt, wenn das Haupttetraëder gegeben ist und ausserdem ein Strahl des Complexes. Ein triëdraler Strahlencomplex ist daher bestimmt, wenn die drei im Endlichen liegenden Hauptebenen und ein Strahl gegeben sind. Für unseren Fall heisst das: Der Complex von Verschiebungsrichtungen aller Punkte ist gegeben durch die atropischen Ebenen und die Verschiebungsrichtung eines Punktes. Wenn wir annehmen, dass bei stetigen Aenderungen des Systems zwischen verschiedenen Temperaturen die atropischen Ebenen dieselben bleiben sollen, und entweder:

1. ein Punkt sich immer auf einer Geraden des Raumes bewegen soll, oder:

2. eine Ebene immer durch eine Gerade des Raumes gehen soll,

so muss bei einer Ausdehnung aus irgend einer der betrachteten Phasen in irgend eine andere immer derselbe triëdrale Strahlencomplex entstehen, und es ergibt sich²⁾:

36. Bleiben die atropischen Ebenen für eine Reihe von stetigen Aenderungen eines Krystalles dieselben, und bewegt sich ein Punkt dabei immer auf einer Geraden, so bewegt sich jeder andere Punkt ebenfalls auf einer Geraden, und jede Ebene beschreibt einen Ebenenbüschel dritter Ordnung.

37. Bleiben die atropischen Ebenen für eine Reihe von stetigen Aenderungen eines Krystalles dieselben, und schneidet sich eine Ebene E mit allen ihr entsprechenden in einer Geraden g des Raumes, so schneidet sich auch jede andere Ebene E_1 des Krystalles mit ihren entsprechenden in einer Geraden g_1 , und jeder Punkt beschreibt eine Raumcurve dritter Ordnung.

1) Burmester, l. c. Satz 38. p. 127.

2) Reye, Geometrie der Lage. 2. p. 144. 1882.

Betrachten wir drei Phasen S_1 , S_2 und S_3 eines Strahlenbündels S . Dieselben sind collinear, von ihren homologen Ebenen schneiden sich je drei in einem Punkte, und der Ort dieser Punkte ist eine Fläche dritter Ordnung. Es gibt¹⁾ im allgemeinen höchstens sechs Gerade, in denen je drei homologe Ebenen der Bündel sich schneiden.

38. Von allen Ebenen, die durch einen Punkt eines Krystalles gehen, drehen sich im allgemeinen höchstens sechs bei zwei aufeinanderfolgenden verschwindend kleinen Ausdehnungen je um dieselbe Gerade des Raumes.

Man bezeichnet in der Krystallographie als zu einer „Zone“ gehörig, solche ebene Flächen, die derselben Geraden parallel laufen. Es ist von besonderem Interesse, zu erfahren, wie die gegenseitige Neigung solcher in einer Zone liegenden oder tautozonalen Flächen sich mit der Temperatur ändert. Bei unseren Betrachtungen repräsentirt der Ebenenbüschel I. Ordnung, der aus allen durch eine Gerade gehenden Ebenen besteht, soweit Neigungen zwischen den verschiedenen Ebenen in Betracht kommen, die Zone im krystallographischen Sinne.

Jeder Ebenenbüschel I. Ordnung verwandelt sich bei der Ausdehnung in einen zu ihm projectivischen Ebenenbüschel. Schneiden wir beide Ebenenbüschel durch Ebenen senkrecht zu den Axen, so erhalten wir zwei Strahlenbüschel, die ebenfalls zu einander projectivisch sind. Zwei Strahlen eines dieser Strahlenbüschel schliessen den Neigungswinkel der entsprechenden Ebenen ein. Indem wir die beiden Strahlenbüschel in perspectivische Lage bringen, lassen sich leicht die folgenden Sätze beweisen, für die wir auch nur auf die Sätze 6, 7, 8, 9 und 10 des ersten Theiles hinzuweisen brauchen.

39. Zu jeder Ebene einer Zone lässt sich eine andere Ebene finden, die vor und nach der Ausdehnung mit jener denselben Winkel einschliesst.

40. Es lassen sich immer zwei Ebenen finden,

1) Reye, Geometrie der Lage. 2. p. 216. 1882.

die vor und nach der Ausdehnung einen gegebenen Winkel einschliessen.

41. Es gibt in einer Zone zwei Ebenen, die vor und nach der Ausdehnung aufeinander senkrecht stehen.

42. In einer Zone gibt es nur zwei Ebenen, die in drei Phasen des Systems denselben Winkel einschliessen.

43. In einer Zone gibt es im allgemeinen gar keine Ebenen, die in vier oder mehr Phasen des Systems denselben Winkel einschliessen.

Es kann unter besonderen Umständen aber eintreten, dass alle Ebenen einer Zone ihre gegenseitige Neigung bei der Ausdehnung beibehalten. Für das reguläre Krystallsystem haben alle Zonen diese Eigenschaft, bei den optisch-einaxigen nur die Zone, deren Axe Hauptaxe ist. Nach einem Satze, der wohl unter den neuen, durch Anwendung der synthetischen Methode gefundenen Sätzen der wichtigste ist, müssen auch bei der Ausdehnung von Krystallen, die den anderen Systemen angehören, solche Zonen vorhanden sein. Wenn die Winkel zwischen allen Ebenen einer Zone in zwei Phasen der Ausdehnung die gleichen sein sollen, so müssen zwei homologe projectivisch gleiche Ebenenbüschel vorhanden sein. In zwei collinearen Strahlenbündeln S und S_1 sind aber in der That zwei Paar homologe projectivisch gleiche Ebenenbüschel vorhanden. Dieselben lassen sich nach Reye¹⁾ finden. Wir können sie die „isogonalen“ Zonen nennen.

44. Es gibt für je zwei Phasen der Ausdehnung zwei „isogonale“ Zonen, d. h. zwei Zonen, in welchen alle Ebenen nach der Ausdehnung dieselben Winkel einschliessen, wie vorher.

Aus der Construction der Axen dieser Zonen ergibt sich, dass dieselben in einer der Symmetrieebenen desjenigen Ellipsoides der zweiten Phase liegen, in welches eine Kugel der ersten Phase übergeht, und dass sie zu den beiden

1) Reye, Geometrie der Lage. 2. p. 267. 1882.

anderen Symmetrieebenen desselben Ellipsoides symmetrisch liegen. Also:

45. Die Axen der isogonalen Zonen liegen in der Ebene zweier thermischen Axen und symmetrisch zu denselben.

Im rhombischen Systeme liegen also die beiden Axen der isogonalen Zonen ähnlich wie die optischen Axen, d. h. in einer Symmetrieebene und symmetrisch zu den beiden anderen. Ebenso wie die thermischen Axen und atropischen Linien für verschiedene Temperaturintervalle nicht dieselben zu sein brauchen, ist es auch nicht nöthig, dass bei verschiedenen Ausdehnungen eines Krystalles die isogonalen Zonen dieselben seien.

Schluss.

Manche der oben aufgeführten neuen Sätze können nicht den Anspruch machen, für die Krystallographie von Wichtigkeit zu sein. Aber auch sie dürften beweisen, wie werthvoll die Beachtung der Beziehung der Affinität für eine klare Einsicht in die verwickelten Verhältnisse bei der Ausdehnung der Krystalle ist. Denselben Zweck erfüllen auch die einfachen Herleitungen schon bekannter Sätze durch unsere Methode. Am besten hat sich aber die Methode bewährt bei der Ableitung einiger neuer Sätze, die auch krystallographisches Interesse besitzen, so des Satzes von den „isogonalen“ Zonen. Endlich ist zu bemerken, dass von der Fülle leicht abzuleitender Sätze nur einige hier ihre Aufnahme gefunden haben. Es ist selbst nicht unwahrscheinlich, dass von den übrigen Sätzen, die sich auf diese Weise ableiten lassen, manche die hier gegebenen an Wichtigkeit übertreffen. Der Zweck dieser Arbeit ist ja nur, darauf hinzuweisen, wie sich die ganze Lehre von der Ausdehnung der Krystalle mit der bekannten Lehre von den affinen Systemen deckt.

Physik. Inst. d. Univ. Strassburg, Juni 1884.

VII. *Ueber das Eindringen der Electricität in Gase; von F. Narr in München.*

§ 1. Fassen wir die Gase als Dielectrica auf, so haben wir nach der allgemeinen Annahme¹⁾ in dem Vorgange, den die Einführung eines electrischen Körpers in einem Gasraume hervorruft, zwei Processe voneinander zu unterscheiden, nämlich die in sehr kurzer Zeit erfolgende und mit der Entladung des eingeführten Körpers wieder schnell verschwindende Polarisation der Gastheilchen und den Uebergang, das Eindringen der Electricität in die Gasmasse. Die folgende Mittheilung bezieht sich auf den letztgenannten Process.

Ich habe schon bei einer früheren Gelegenheit²⁾ betont, dass die electrischen Vorgänge in den Gasen durch besondere sättigende Ladungen eigenthümliche Abänderungen erleiden, die ich als sehr wichtig für die Deutung jener Vorgänge selbst anzunehmen geneigt war. Ich habe nun in den beiden verflossenen Wintern diese Versuche wieder aufgenommen, nachdem sich einige Verbesserungen, die ich an meiner Versuchsanordnung anbrachte, bewährt hatten.

Ein Sinuselectrometer, das trotz mancher Mängel bei richtiger Behandlung doch ein recht passendes Messinstrument bei derartigen Versuchen bildet, wurde durch einen über einen Meter langen, feinen Platindraht mit einem Quecksilbernäpfchen aus Schellack verbunden; aus einem zweiten solchen Näpfchen, das mit dem ersten durch einen kleinen Metallbügel jederzeit sicher in leitende Verbindung gesetzt werden konnte, führte ein zweiter, ungefähr gleich langer Platindraht wohl isolirt durch einen grossen, mit der Erde verbundenen Metallcylinder, einen electrischen Schirm, dessen Raum vollständig abgeschlossen und durch Chlorcalcium vollkommen trocken erhalten war. Innerhalb dieses Schirmes war endlich auf einem ausgezeichnet isolirenden Glase eine hohle Metallkugel von 16 cm Durchmesser, die Metallhülle, aufgestellt, in die der letzterwähnte Draht in der früher an der

1) G. Wiedemann, Die Lehre von der Electricität. 2. p. 8.

2) Narr, Wied. Ann. 16. p. 560. 1882.

oben angegebenen Stelle beschriebenen Weise luftdicht und wohl isolirt hineinging; derselbe trug an seinem Ende, in der Mitte der Metallhülle, eine kleine Messingkugel von $2\frac{1}{2}$ cm Durchmesser, die Versuchskugel.

Durch diese Anordnung war ich zunächst in den Stand gesetzt, immer eine bestimmte Electricitätsmenge vom Electrometer auf das übrige, durch den Bügel damit in Verbindung zu setzende System, insbesondere auf die Versuchskugel zu übertragen und die Abänderung der damit eintretenden Ladung des Systemes in verschiedenen dichten und verschiedenartigen Gasen, mit denen der Raum der isolirten oder auch mit der Erde verbindbaren Metallhülle gefüllt wurde, zu verfolgen. Der Schirm gestattete, nicht blos den Raum, in dem die Metallhülle sich befand, vollkommen trocken und damit diese letztere gleichmässig isolirt zu erhalten, sondern vor allem auch die Metallhülle und ihren Inhalt vor äusseren Influenzeinflüssen zu sichern. Vermitteltst besonderer Quecksilberverschlüsse konnte ich die Metallhülle mit der Erde und mit der Luftpumpe in Verbindung setzen, ohne die Trockenheit der Luft im Schirme zu gefährden und zugleich die vollständige Isolirung der Metallhülle bei den übrigen Versuchen in Frage zu stellen. Seit dieser Isolirung und Beschirmung der Metallhülle habe ich niemals wieder die früher¹⁾ berührte plötzliche Entladung der Versuchskugel in sehr dünnen Gasen (bei isolirter Metallhülle) beobachtet, die ich daher äusseren Einflüssen zuschreiben muss.

§ 2. Zunächst theile ich neun Versuchsreihen mit, bei denen ich insofern eine Sättigung eintreten liess, als die Metallhülle während einer jeden einzelnen Reihe stets isolirt blieb. Die Zahlen in den einzelnen Horizontalreihen bedeuten die Ladungen, die infolge einer stets gleich grossen Ladung des Electrometers auf dem damit verbundenen Systeme in fünf aufeinander folgenden Versuchen beobachtet wurde, wobei das System immer dazwischen kurz, aber vollständig entladen und vier Minuten pausirt wurde. Zwischen

1) Narr, Wied. Ann. 11. p. 153. 1880.

den einzelnen Reihen verfloßen anderer Versuche und der Neufüllung wegen acht bis zehn Tage.

Gas	I	II	III	IV	V
200 mm Luft	577	594	596	595	598
200 mm H	567	586	591	593	596
30 mm H	492	582	591	594	595
20 mm H	471	572	580	584	585
10 mm H	414	533	532	554	564
10 mm Luft	495	528	579	589	589
10 mm CO ₂	499	585	589	593	592
5 mm Luft	415	522	539	529	563
H Vacuum	382	440	436	440	435

Diese Tabelle lässt erkennen, dass der Einfluss der in dieser Weise durchgeführten Sättigung von der Natur und Dichte des Gasmediums abhängig ist; eine allgemeine Erklärung desselben durch eine Sättigung der isolirenden Stützen ist daher vollkommen unzulässig.

Die Anfangsladungen nehmen mit abnehmendem Drucke ab, die folgenden Ladungen steigen aber nach besonderen, durch die Natur und Dichte des Gases bedingten Gesetzen. Während bei höherem Drucke durch die Sättigung schliesslich ungefähr dieselbe Ladung wieder herbeigeführt wird, ist dies bei geringem Drucke nicht mehr der Fall; in einem Luftvacuum habe ich z. B. die Anfangsladung 377 durch acht folgende Versuche nur auf 475 steigern können. Daraus folgt aber, dass die grosse Verschiedenheit der Anfangsladungen in verschiedenartigen und verschieden dichten Gasen nicht ihre Erklärung in einer Verschiedenheit in der Capacität der kleinen Versuchskugel finden könne; wir werden sie daher nothwendigerweise zu suchen haben in einem verschieden grossen Uebergang von Electricität in die Gesamtgasmasse, der eine Sättigung derselben und damit eine Steigerung der folgenden Ladungen herbeiführt. Die Gesamtgasmasse besteht aber aus dem Gase selbst, aus Quecksilberdampf und endlich aus Staub.

Ich habe schon in meinen früheren Abhandlungen dargelegt, dass der in der Metallhülle enthaltene Staub solche regelmässige Electricitätsverluste nicht herbeiführen könne.

Die gewöhnliche Anschauung über die mögliche Rolle des Staubes bei diesen Vorgängen führt eben zu Schlüssen, die meinen Versuchsergebnissen direct widersprechen. Legt man aber das Hauptgewicht nicht auf die Quantität des im Gase suspendirten Staubes, sondern auf die mit abnehmendem Drucke wachsende Beweglichkeit desselben, so ist die Möglichkeit, obige Resultate dadurch zu erklären, wenigstens nicht so ohne weiteres zu leugnen; aber die Regelmässigkeit der Zahlen, die ich mit der Metallhülle in ihrem jetzigen Zustande bei einem bunten Wechsel von Art und Dichte der Gasfüllung erhielt, würde zu einer aus der kinetischen Gastheorie herausconstruirten kinetischen Staubtheorie führen müssen, wobei man aber doch schliesslich nicht begreifen würde, warum gerade den Staubtheilchen, nicht aber den Gastheilchen die massgebende Rolle zufallen solle. Dass gegen diesen Schluss nicht etwa Versuche sprechen können, bei denen der Staub künstlich vermehrt und in heftige Bewegung versetzt wird, scheint mir keines besonderen Nachweises zu bedürfen; die heterogene Masse, die wir Staub nennen, kann selbstverständlich einem geladenen Leiter, mit dem sie in Berührung kommt, Electricität entziehen und wird, da sie nie ganz auszuschliessen ist, der Gewinnung theoretisch verwertbarer Zahlen immer grosse Hindernisse in den Weg legen.

Gegen die Annahme, dass der Quecksilberdampf die beobachteten Erscheinungen bewirkt habe, sprechen, abgesehen von den früher¹⁾ schon erhobenen Einwänden, die bei 10 mm Druck und nahezu gleicher Temperatur in den drei verschiedenen Gasen angestellten Versuche, die durch die Tabelle von Versuchsergebnissen, die ich am Schlusse dieser Mittheilung geben werde, für die verschiedensten Druckgrössen ihre Bestätigung finden.

Hiernach bleibt uns aber nur noch die Annahme übrig, dass wir es hier mit einem Uebergange der Electricität in das Gas selbst zu thun haben, der mit der Verdünnung wächst und in H grösser ist, als in Luft und CO_2 ; aus demselben entspringt eine Sättigung des Gases mit Electricität.

1) Narr, Wied. Ann. 8. p. 266. 1879.

§ 3. Um diesen Schluss mit weiteren Bestätigungen zu versehen und gleichzeitig das Eindringen der Electricität näher zu verfolgen, habe ich die oben angeführten Versuche nur mit der Modification wiederholt, dass ich am Schlusse eines jeden einzelnen Versuches einer Reihe die Metallhülle mit der Erde in leitende Verbindung brachte, die ich, nachdem das System entladen war, nach dem ersten Versuche 15 m, nach dem zweiten Versuche 45 m und nach dem dritten Versuche 90 m bestehen liess. Hierdurch erhielt ich folgende Resultate.

Gas	* I	II	III	IV
200 mm H	558	591	598	608
30 mm H	513	519	523	547
20 mm H	474	498	518	492
10 mm H	409	417	483	480
10 mm Luft	501	512	512	487
10 mm CO ₂	498	522	512	521
H Vacuum	374	396	398	395

Aus dieser Tabelle folgen zunächst wieder im allgemeinen die früheren Schlüsse. Zugleich ersieht man hieraus aber auch, dass nur bei 200 mm Druck wieder die gleiche Sättigung eintritt; schon bei 30 mm ist dieselbe nicht mehr erreicht, und in noch höherem Grade ist dies bei grösserer Verdünnung der Fall. Die zwischen den Versuchen eingeschaltete Erdverbindung der Metallhülle bewirkt also, insbesondere bei geringer Dichte des Gases, ein Schwinden der Sättigung, wie es von dem von mir vertretenen Standpunkte aus nothwendig genannt werden muss. Der Einfluss der Dauer der Erdverbindung weist zwar auch eine unverkennbare charakteristische Abhängigkeit von der Natur und Dichte des Gases auf; erschwert wird aber immerhin der Einblick in denselben durch den Umstand, dass das Eindringen der Electricität in das Gas im allgemeinen physikalische, vielleicht auch chemische Aenderungen herbeiführt, welche ebenfalls von der Zeit abhängig sind.

Dieses Resultat habe ich noch durch weitere Versuchsreihen zu controliren gesucht, indem ich die erst angeführ-

ten nur mit der Abänderung wiederholte, dass ich die Metallhülle, die bei jenen stets isolirt geblieben war, nun immer mit der Erde in leitender Verbindung hielt. Die folgende Tabelle enthält die unter diesen Umständen beobachteten Ladungen, welche den eben gezogenen Schluss vollkommen bestätigen.

Gas	I	II	III	IV	V
200 mm H	556	585	592	592	595
30 mm H	372	410	409	403	402
20 mm H	331	336	334	332	332
10 mm H	211	213	212	212	211
H Vacuum	0	0	0	0	0

§ 4. Mit den vorstehenden Versuchen sind wir nun zu einer neuen, für den betrachteten Process wichtigen Frage gekommen, woher nämlich die Unterschiede in den Ladungen kommen, die das System unter sonst gleichen Verhältnissen durch eine und dieselbe Electrometerladung erhält, wenn wir das eine mal die Metallhülle isoliren, das andere mal aber mit der Erde verbinden.

Wenn wir zunächst von einem Uebertritte der Electricität in den Gasraum absehen, so könnte die Ursache dieses Unterschiedes nur in einer entsprechenden Aenderung der Capacität der kleinen Versuchskugel gesucht werden; geben wir aber ersteren zu, so kann nicht geleugnet werden, dass die Erdverbindung der Metallhülle den Uebertritt und das Weiterführen der Electricität durch den Gasraum begünstigt (ich bediene mich mit Absicht dieses allgemeinen Ausdruckes) und mithin jenen Unterschied wenigstens jedenfalls theilweise erklärlich macht. Gegen die Annahme, dass der erstgenannte Umstand, der auch für den Uebertritt der Electricität in den Gasraum von Belang wäre, eine ausreichende Erklärung darbiere, spricht nun aber eine Reihe von Wahrnehmungen in einer so nachdrücklichen Weise, dass wir sie ausschliessen müssen.

Zunächst sind die Sättigungen, die auch bei der beständigen Verbindung der Metallhülle mit der Erde in ganz ähnlicher Weise, wie bei der intermediären eintreten, nur

durch einen Uebertritt der Electricität in den Gasraum, nämlich durch ein Eindringen derselben in das Gas erklärlich.

Vergleichen wir sodann die Ladungen

Gas	bei isolirter Hülle und Maximal- sättigung	bei Zwischenverbindung der Hülle mit der Erde von			bei Ladung in Erdver- bindung der Hülle
		5 m	15 m	1 Tag	
200 mm H	596	592	591	567	556
30 mm H	595	546	519	492	372
20 mm H	585	505	498	471	331
10 mm H	564	420	417	414	211
H Vacuum	435	403	396	382	0

miteinander, so sehen wir, dass die Zwischenerdverbindung der Metallhülle, die auf die Capacität der Versuchskugel keinen Einfluss ausüben konnte, doch den gleichen, wenn auch quantitativ geringeren Einfluss auf die Ladung ausübt, wie die bei der Ertheilung der Ladung vorhandene Erdverbindung.

Ferner haben meine älteren und neueren Versuche ergeben, dass der „Verlust“, den die Ladung des Systemes bei Erdverbindung der Hülle gegenüber der Ladung desselben bei isolirter Hülle aufweist, auch in letzterem Falle in ungefähr gleichem Betrage nicht bloß durch eine nachfolgende längere Erdverbindung überhaupt, sondern auch allmählich durch successive kurze Erdverbindungen herbeizuführen ist.

Endlich haben ebensolche Versuche gezeigt, dass, wenn wir überhaupt einmal die Verbindung der Metallhülle mit der Erde genügend lange Zeit haben eintreten lassen, im allgemeinen eine Auflösung derselben ein leichtes Sinken des Potentials, eine Wiederherstellung derselben ein leichtes Steigen des Potentials auf dem Systeme bewirkt, das ungefähr von dem Range der Zerstreuung ist.

Aus allen diesen Thatsachen werden wir aber schliessen müssen, dass die grossen Differenzen zwischen den Ladungen bei isolirter und mit der Erde verbundener Metallhülle nicht sowohl durch entsprechende Differenzen in der Capacität der Versuchskugel, als vielmehr durch einen von der Natur und

Dichte des Gases abhängigen Uebertritt der Electricität in den Gasraum bedingt sind.

§ 5. Meine Versuche mit isolirter Metallhülle, wie ich sie in den § 2 und 3 dargelegt habe, lassen wohl nur die Deutung zu, dass der bei ihnen constatirte Uebergang der Electricität in das Gas durch die Bewegungen der geladenen Gastheilchen vermittelt wird. Dieser Schluss erhält eine besondere Stütze durch die nachstehende Tabelle von Versuchsergebnissen, die ich mit einer etwas kleineren Electrometerladung schon vor einem Jahre bei isolirter Metallhülle erhalten habe.

Druck	Ladung des Systemes in			Druck	Ladung des Systemes in		
	CO ₂	Luft	H		CO ₂	Luft	H
200 mm	541	545	539	20 mm	540	509	487
50 mm	541	543	539	15 mm	535	497	468
40 mm	541	542	524	10 mm	497	484	422
30 mm	541	542	500	5 mm	440	426	405

Die durch das verschieden starke Eindringen der Electricität differentiirten Ladungen in den drei verschiedenen Gasen ordnen sich genau so an, wie es einer convectiven Entladung gemäss der kinetischen Gastheorie entspricht.

Bei den Versuchen, in denen die Metallhülle mit der Erde verbunden war, habe ich zunächst, um die unmittelbaren Folgerungen aus meinem Erfahrungsmaterial von Hypothesen möglichst frei zu halten, nur von einem Uebertritte der Electricität in den Gasraum gesprochen. Indess wird man, wenn man den eben gezogenen Schluss annimmt, auf Grund meiner Gesamtergebnisse nicht zu leugnen vermögen, dass auch hier die Annahme einer convectiven Entladung sehr viel Wahrscheinlichkeit für sich hat; eine wesentliche Bestärkung aus dem gleichen Grunde erfährt dieselbe aber auch hier durch die nachfolgende Tabelle von Versuchsergebnissen, die ich ebenfalls vor einem Jahre mit der gleichen Electrometerladung wie oben bei Erdverbindung der Hülle erhalten habe.

Druck	Ladung des Systemes in			Druck	Ladung des Systemes in		
	CO ₂	Luft	H		CO ₂	Luft	H
200 mm	509	516	507	20 mm	496	400	314
50 mm	511	515	478	15 mm	423	363	275
40 mm	514	483	414	10 mm	371	349	224
30 mm	513	423	378	5 mm	236	170	0

Nehmen wir aber diese Anschauung an, die meines Wissens hier zum ersten mal durch die Beziehung auf die kinetische Gastheorie einen höheren Grad von Wahrscheinlichkeit gewinnt, so ist das, was wir Zerstreuung der Electricität nennen, eine aus Ableitung der Stützen und convectiver Entladung sich zusammensetzende Erscheinung, die freilich aus mancherlei Gründen, vor allem infolge der unvermeidlichen Sättigung des Gases gerade nach der uns interessirenden Seite hin nicht mit Schärfe zu verfolgen ist. Solange die Hülle isolirt ist, erweist sich infolge dessen der Zerstreuungscoefficient, wie nicht anders zu erwarten ist, als von der Natur und Dichte des Gases ziemlich unabhängig: bringen wir aber die Metallhülle mit der Erde in leitende Verbindung, so lässt sich ein Wachsen der Zerstreuung mit abnehmendem Drucke, insbesondere in H und Luft, nicht verkennen.

Zum Schlusse will ich noch hervorheben, dass ich die Frage, ob die Capacität der kleinen Versuchskugel mit der Natur und Dichte des umgebenden Gasmediums sich überhaupt nicht ändert, als durch die vorstehende Mittheilung in keiner Weise präjudicirt erachten muss; ihre experimentelle Lösung ist mit ganz erheblichen Schwierigkeiten verknüpft.

VIII. *Bemerkung über die Stöpselrheostaten von Siemens und Halske; von E. Dorn.*

(Hierzu Taf. VII Fig. 9—12.)

Der hauptsächliche Zweck dieser Zeilen ist, auf eine Eigenthümlichkeit der weitverbreiteten Siemens'schen Stöpselrheostaten aufmerksam zu machen, welche vielfach übersehen

zu sein scheint, obwohl sie für die Berechnung genauerer Beobachtungen nicht unwichtig ist.

Die Einrichtung der erwähnten Apparate ist folgende (siehe Fig. 9). An den auf einer starken Ebonitplatte sitzenden Messingklötzen $M_1, M_2, M_3 \dots$ sind mit Hülfe starker Schrauben die Kupferdrähte $K_1, K_2, K_3 \dots$ angebracht, welche unten ein Querstück zum Einklemmen der Enden der Neusilberdrahtrollen $N, N'' \dots$ tragen, und zwar ist die Schaltung derart, dass an je einem Kupferdraht die Enden zweier aufeinanderfolgender Widerstände befestigt sind — natürlich abgesehen von dem ersten und letzten Kupferdraht einer Reihe.

Wird nun der Stöpsel S' allein gezogen, so durchläuft der Strom den Weg $M_1 K_1 N K_2 M_2 \dots$, ebenso nach Ziehen von S' allein $M_2 K_2 N'' K_3 M_3 \dots$, hingegen nach Herausnehmen der beiden aneinandergrenzenden Stöpsel S' und S'' den Weg $M_1 K_1 N' N'' K_3 M_3 \dots$, d. h. es ist jetzt der hinzugefügte Widerstand nicht gleich der Summe der Widerstände, welche durch Ziehen der beiden einzelnen Stöpsel eingeschaltet werden, vielmehr um den doppelten Betrag von K_2 kleiner.

In mehreren von mir untersuchten Widerstandssätzen verschiedenen Datums der Anfertigung fand ich den Widerstand eines Kupferdrahtes etwa $= 0,0004$ S.-E., sodass neben den kleineren der Widerstände, besonders den Bruchtheilen der Einheit, die Kupferdrähte nicht mehr zu vernachlässigen sind. Uebrigens waren in einigen der von mir geöffneten Kasten sämmtliche Kupferdrähte von merklich gleicher Länge, in anderen nicht.

Vor der Verwendung für feinere Messungen muss der Widerstandssatz calibriert und — wenn man sich nicht mit den relativen Werthen der Widerstände begnügen will — wenigstens ein Stück auf einen Normalwiderstand bezogen werden.

Wie ich an einem speciellen Beispiel zeigen werde, vervielfältigen sich bei der Berechnung der Calibrirung die von den Kupferdrähten herrührenden Terme derart, dass sie bei den grösseren Widerständen

nahe denselben Bruchtheil des Ganzen ausmachen, wie bei den kleineren.

Der zu untersuchende Kasten enthalte die Widerstände 0,1...100 S.-E. in der Fig. 10 dargestellten Anordnung. Wie Fig. 11 angedeutet, werde zur Calibrirung das Schema der Wheatstone'schen Brücke benutzt; W_1 ist der oben genannte Widerstandssatz, W_2, W_3, W_4 drei andere ähnlicher Einrichtung, D eine Doseneinheit, welche nach Belieben ausgeschaltet werden kann, B eine „Brückenwalze“, d. h. ein um seine Axe drehbarer Cylinder mit aufgewundenem Draht, gegen welchen ein Contactröllchen drückt.¹⁾

Die Vergleichung der einzelnen Widerstände des Zweiges I erfolgt durch Substitution. Es sei nun k der Widerstand eines einzelnen der (untereinander gleich vorausgesetzten) Kupferdrähte, σ der Widerstand eines Stöpsels, $W_{0,1}, W_{0,2} \dots$ die Widerstände der Neusilberdrahtrollen, welche mit 0,1, 0,2... bezeichnet sind, S der Widerstand der (als richtig angenommenen) Doseneinheit, U der eines Umganges der Brückenwalze. Es werde zunächst 0,1 gezogen und die Brückenwalze eingestellt, dann 0,1 gestöpselt und weiter gedreht, bis wieder kein Strom durch die Brücke geht.

Dies gibt eine Gleichung von der Form:

$$W_{0,1} + 2k - \sigma = xU,$$

oder wenn ich noch:

$$(1) \quad W_r - \sigma = w_r$$

setze:

$$(2) \quad w_{0,1} + 2k = xU,$$

und ähnlich mit Rücksicht darauf, dass für jede zusammenhängende Gruppe nur zwei Kupferdrähte in Ansatz zu bringen sind:

$$(3) \quad w_{0,2} + 2k = w_{0,1} + 2k + yU,$$

$$(4) \quad w_{0,2'} + 2k = w_{0,2} + 2k + z_{0,2}U,$$

$$(5) \quad w_{0,5} + 2k = w_{0,1} + w_{0,2} + w_{0,2'} + 2k + z_{0,5}U,$$

$$(6) \quad w_1 + 2k = w_{0,1} + w_{0,2} + w_{0,2'} + w_{0,5} + 2k + z_1U.$$

1) Diese Anordnung ist von Hrn. H. Wild gewählt. Siehe Bestimmung des Werthes der Siemens'schen Widerstandseinheit in absolutem, electromagnetischem Maasse, St. Petersburg 1884.

Die 1 ist mit der Doseneinheit verglichen, also:

$$(7) \quad w_1 + 2k = S + \tilde{\omega} U.$$

Aus vorstehenden Gleichungen folgt nun zunächst:

$$(8) \quad w_{0,1} = x U - 2k,$$

$$(9) \quad w_{0,2} = (x + y) U - 2k,$$

$$(10) \quad w_{0,2'} = (x + y + z_{0,2'}) U - 2k,$$

$$(11) \quad w_{0,5} = (3x + 2y + z_{0,2'} + z_{0,5}) U - 6k,$$

$$(12) \quad w_1 = (6x + 4y + 2z_{0,2'} + z_{0,5} + z_1) U - 12k,$$

$$(13) \quad w_1 = S - 2k + \tilde{\omega} U.$$

Die Gleichungen (12) und (13) erlauben U durch S auszudrücken:

$$(14) \quad U = \frac{1}{6x + 4y + \tilde{\omega}} [S + 10k],$$

wo der Kürze wegen:

$$2z_{0,2'} + z_{0,5} + z_1 - \tilde{\omega} = \tilde{\zeta}$$

geschrieben ist.

Wird hiermit in (2) ... (5) hineingegangen, so folgt:

$$(15) \quad w_{0,1} = \frac{x}{6x + 4y + \tilde{\zeta}} [S + 10k] - 2k,$$

$$(16) \quad w_{0,2} = \frac{x + y}{6x + 4y + \tilde{\zeta}} [S + 10k] - 2k,$$

$$(17) \quad w_{0,2'} = \frac{(x + y + z_{0,2'})}{6x + 4y + \tilde{\zeta}} [S + 10k] - 2k,$$

$$(18) \quad w_{0,5} = \frac{(3x + 2y + z_{0,2'} + z_{0,5})}{6x + 4y + \tilde{\zeta}} [S + 10k] - 6k.$$

Da nahezu $x = y$ ist, und ferner $z_{0,2'}$, $z_{0,5}$, z_1 , $\tilde{\omega}$, $\tilde{\zeta}$ kleine Grössen sind, so wird der in (15) vorkommende Factor $x/(6x + 4y + \tilde{\zeta})$ nahe = 0,1, und ich kann daher schreiben:

$$w_{0,1} = \frac{x}{6x + 4y + \tilde{\zeta}} S + k - 2k,$$

oder:

$$(19) \quad w_{0,1} = 0,1 S + \epsilon_{0,1} - k, \text{ und analog:}$$

$$(20) \quad w_{0,2} = 0,2 S + \epsilon_{0,2},$$

$$(21) \quad w_{0,2'} = 0,2 S + \epsilon_{0,2'},$$

$$(22) \quad w_{0,5} = 0,5 S + \epsilon_{0,5} - k,$$

$$(23) \quad w_1 = 1 S + \epsilon_1 - 2k,$$

wo $\epsilon_{0,1}$ etc. die von k unabhängigen Theile der Correctionsgrössen in Siemens'schen Einheiten ausgedrückt bedeuten.

Die noch übrigen Messungen führen auf Gleichungen von der Form:

- (24) $w_1' + 2k = w_1 + 2k + \eta_1'$,
 (25) $w_2 + 2k = w_1 + w_1' + 2k + \eta_2$,
 (26) $w_5 + 2k = w_{0,1} + w_{0,2} + \dots w_2 + 2k + \eta_5$,
 (27) $w_{10} + 2k = w_{0,1} + w_{0,2} + \dots w_5 + 4k + \eta_{10}^{1)}$,
 (28) $w_{10}' + 2k = w_{10} + 2k + \eta_{10}'$,
 (29) $w_{20} + 2k = w_{10} + w_{10}' + 2k + \eta_{20}$,
 (30) $w_{50} + 2k = w_{0,1} + w_{0,2} + \dots w_{20} + 4k + \eta_{50}$,
 (31) $w_{100} + 2k = w_{0,1} + w_{0,2} + \dots w_{50} + 4k + \eta_{100}$,

woraus dann weiter:

- (32) $w_1' = 1S + \epsilon_1' - 2k$, (36) $w_{10}' = 10S - \epsilon_{10}' - 18k$,
 (33) $w_2 = 2S + \epsilon_2 - 4k$, (37) $w_{20} = 20S + \epsilon_{20} - 36k$,
 (34) $w_5 = 5S + \epsilon_5 - 10k$, (38) $w_{50} = 50S + \epsilon_{50} - 90k$,
 (35) $w_{10} = 10S + \epsilon_{10} - 18k$, (39) $w_{100} = 100S + \epsilon_{100} - 180k$.

In den weitaus häufigsten Fällen wird gebraucht der Werth des durch Ziehen gewisser Stöpsel hinzugefügten Widerstandes. Dieser ist gleich dem Widerstand der vom Strom durchlaufenen Neusilberrollen und Kupferdrähte, vermindert um den Widerstand der gezogenen Stöpsel.

Mit Rücksicht auf die Gleichung (1) erhält nun leicht, dass dann der Widerstand der Stöpsel selbst gar nicht bekannt zu sein braucht, denn die Gleichungen (19)...(23) und (32)...(39) geben die Correctionen, welche an den Differenzen $w_r = W_r - \sigma$ zwischen jeder Neusilberdrahtrolle und dem zugehörigen Stöpsel anzubringen sind. Vorausgesetzt ist hierbei freilich, dass man den Widerstand der Stöpsel zu verschiedenen Zeiten constant setzen kann, eine Frage, auf welche ich noch zurückkomme.

Unter anderen Umständen, z. B. wenn man den Widerstandskasten als Vergleichswiderstand bei der Methode von Hrn. F. Kohlrausch²⁾ benutzt, wird die Kenntniss des zwischen zwei Punkten thatsächlich vorhandenen Widerstandes verlangt, und dieser lässt sich aus den obigen Gleichungen nur bei Kenntniss der Stöpselwiderstände ableiten.

Um zu zeigen, dass durch Vernachlässigung der Kupferdrähte in der That erhebliche Fehler entstehen können, ent-

1) Hier sind nämlich zwei Stöpselgruppen vorhanden: 0,1 ... 2 und 5.

2) F. Kohlrausch, Sitzungsber. d. Berl. Acad. 1883. p. 465.

nehme ich ein Beispiel der schon citirten Abhandlung des Hrn. Wild. In die Endformel für den Werth der Siemens'schen Einheit in absolutem Maasse tritt der Factor ein:

$$(40) \quad \left(\frac{w_m + w_s}{w_s} \right)^2 \frac{1}{W},$$

wo W den Widerstand des Multiplicators bei den Dämpfungsbeobachtungen bedeutet, w_m und w_s den Widerstand von Multiplicator- und Nebenschlusszweig bei der Bestimmung der Galvanometerconstante.

W , w_m , w_s wurden mittelst der Wheatstone'schen Brücke¹⁾ erhalten durch Vergleichung mit Stücken des Widerstandskastens Nr. 2805, der die in Fig. 10 angedeutete Einrichtung hatte und dem obigen Beispiel entsprechend calibriert war.

Hr. Wild hat den Einfluss der Kupferdrähte nicht in Rechnung gezogen; unter der Voraussetzung dass der Kasten wie Fig. 9 construirt war, soll der Einfluss dieser Vernachlässigung bestimmt werden.

Es ist bei Hrn. Wild nahezu:

$$(41) \quad w_s = 1,24570^2), \quad w_m = 115,747^3), \quad W = 2,9482^4),$$

und es sind die Vergleichswiderstände⁵⁾:

$$1 + 0,2, \quad 100 + 10 + 5 + 1, \quad 1 + 2.$$

Weiter⁶⁾ gibt Hr. Wild an:

$$0,2 = 0,19965 \text{ S.-E.} \quad | \quad 2 = 1,99601 \text{ S.-E.} \quad | \quad 10 = 9,9815 \text{ S.-E.}$$

$$1 = 0,99766 \quad „ \quad | \quad 5 = 4,9884 \quad „ \quad | \quad 100 = 99,763 \quad „$$

somit waren von den Widerständen (41) die Beträge:

$$(42) \quad 1,19731, \quad 115,731, \quad 2,9937,$$

durch Stücke von Nr. 2805 dargestellt, während:

$$(43) \quad +0,04839, \quad +0,016, \quad -0,0455$$

vom Brückendraht herrührten.

Die Calibergleichungen von Hrn. Wild folgen aus den meinigen, wenn in letzteren $k = 0$ gesetzt wird.

1) Die Anordnung war analog wie in Fig. 11.

2) l. c. p. 98.

3) l. c. p. 99.

4) l. c. p. 118.

5) l. c. p. 96.

6) l. c. p. 95.

Daher sind zunächst (vgl. (14)) die Theile (43) im Verhältniss $S: S + 10k$ oder, wenn auch k in S.-E. ausgedrückt wird, $1:1 + 10k$ zu vergrössern.

Ferner waren in den drei Fällen die durch Ziehen der betreffenden Stöpsel hinzugefügten Widerstände¹⁾:

$$1 + 0,2 = w_1 + 2k + w_{0,2} + 2k.$$

$$100 + 10 + 5 + 1 = w_{100} + 2k + w_{10} + w_5 + 2k + w_1 + 2k^2).$$

$$1 + 2 = w_1 + 2k + w_2 + 2k,$$

woraus nach (19)...(23) und (32)...(39):

$$(44) \begin{cases} 1 + 0,2 = 1,2 S + \epsilon_1 + \epsilon_{0,2} + 2k, \\ 100 + 10 + 5 + 1 = 116 S + \epsilon_{100} + \epsilon_{10} + \epsilon_5 + \epsilon_1 - 204k. \\ 1 + 2 = 3 S + \epsilon_1 + \epsilon_2 - 2k. \end{cases}$$

Nach der schon gemachten Bemerkung sind die rechten Seiten von (44) ohne die Terme in k mit den Grössen (42) identisch.

Fasse ich alles zusammen, so ist der wahre Werth der einzelnen Widerstände:

$$w_s = 1,24570 + 2k + 0,04839 \cdot 10k = 1,24570 + 2,484k.$$

$$w_m = 115,747 - 204k + 0,016 \cdot 10k = 115,747 - 203,84k.$$

$$W = 2,9482 - 2k - 0,0455 \cdot 10k = 2,9482 - 2,455k.$$

und der Factor (40) wird:

$$(45) \quad \left(\frac{116,993 - 201,36k}{1,2457 + 2,484k} \right)^2 \frac{1}{2,9482 - 2,455k},$$

oder mit Fortlassung der höheren Potenzen von k :

$$(46) \quad \left(\frac{116,993}{1,2457} \right)^2 \frac{1}{2,9482} [1 - k \cdot 6,60].$$

Das Endresultat von Hrn. Wild:

$$1 \text{ S.-E.} = 0,94597 \text{ Ohm,}$$

wäre also mit $1 - k \cdot 6,60$ zu multipliciren oder um

$$\delta = k \cdot 6,60 \cdot 0,94597$$

zu vermindern. Setze ich, den von mir untersuchten Kasten entsprechend, $k = 0,0004$ S.-E., so wird $\delta = 0,00250$, und das Endresultat geht über in:

$$1 \text{ S.-E.} = 0,94347 \text{ Ohm}$$

1) Nach der Versuchsanordnung von Hrn. Wild sind diese in Rechnung zu ziehen.

2) 10 und 55 bilden eine Gruppe.

In Beziehung auf den Widerstand der Stöpsel theilte mir Hr. Dr. O. Frölich gelegentlich mit, dass, auch bei sorgfältigster Behandlung, durch denselben „Fehler von einigen Zehntausendtheilen einer S.-E.“ entstehen könnten. Hierdurch veranlasst, habe ich mehrfach bei verschiedenen Stöpselrheostaten den Widerstand aller Stöpsel zusammen, bei einem (einem Universalwiderstand) auch den Widerstand einzelner Stöpsel¹⁾ bestimmt. Die Stöpsel wurden mit feinem Smirgel oder Wiener Kalk geputzt und mit einem Leder abgerieben, die Löcher durch Auswischen mit einem feinen Leder sauber gehalten. Bei einem Rheostaten erhielt ich 20 Stöpsel = 0,0018 S.-E., bei einem anderen 19 Stöpsel = 0,0017 S.-E., also übereinstimmend ein Stöpsel im Mittel 0,00009 S.-E. Alle 25 Stöpsel des Universalwiderstandes wurden gefunden 0,0038, 0,0042, 0,0024 woraus ein Stöpsel im Mittel 0,00015, 0,00017, 0,00010. Die zahlreichen Messungen einzelner Stöpsel lieferten im Durchschnitt 0,0015, die Extreme waren 0,0006 und 0,0018. Die Temperatur betrug bei den bisher erwähnten Messungen 10—12° C. Nachdem die sämtlichen Stöpsel mit Bimsstein sorgfältig neu eingeschliffen waren, ergaben sich bei 12° C. Werthe zwischen 0,00005 und 0,00010, aber 14 Tage später bei derselben Temperatur 0,00011 bis 0,00016, nach vier Wochen bei 17° 0,00007 bis 0,00016. Der grösste Widerstand, den überhaupt ein sauberer Stöpsel zeigte, war 0,00027; es ist dies zugleich der einzige über 0,00020, den ich beobachtet habe.

Hieraus scheint mir hervorzugehen, dass von etwa 10 S.-E. an Stöpselcontacte auch für feinere Messungen sicher genug sind, dass man sie für kleinere Widerstände aber besser vermeiden wird.

Obwohl ich sehr wohl weiss, dass die Siemens'schen Rheostaten nicht für Physiker allein, sondern auch für Techniker bestimmt sind, und ich die Schwierigkeit einer

1) Es wurde durch den ganz gestöpselten Rheostaten ein Strom von etwa 0,5 Ampère gesendet. Die Messingklötze hatten Bohrungen in der Mitte; hier liessen sich Stöpsel mit oben angebrachten Klemmschrauben eindrücken, in welche die Drähte eines graduirten empfindlichen Galvanometers eingeklemmt wurden.

Constructionsänderung bei fabrikmässiger Herstellung nicht verkenne, möchte ich mir doch in dieser Hinsicht einige Vorschläge erlauben.

1) Statt der Reihenfolge der Widerstände 0,1, 0,2, 0,2, 0,5 . . . wäre die den besseren Gewichtssätzen entsprechende 0,1, 0,1', 0,1'', 0,2, 0,5 . . . vorzuziehen, indem dadurch die Möglichkeit der Calibrirung eines jeden Kastens in sich gegeben wäre, die gegenwärtig ausgeschlossen ist.

2) In der Mitte eines jeden Messingklotzes ist ein Loch zu bohren. Diese Einrichtung bestand bis vor kurzem bei den Universalwiderständen, scheint aber seitdem wieder aufgegeben zu sein. Die Verwendbarkeit der Apparate würde dadurch eine weit vielseitigere werden: man könnte jeden Widerstand für sich benutzen, Zweigströme ableiten u. s. w.

3) Von jedem Messingklotz sind zwei Kupferdrähte herunterzuführen und an jedem Kupferdraht nur ein Ende einer Neusilberdrahtrolle zu befestigen.¹⁾ Dann würde stets beim Ziehen mehrerer Stöpsel die Summe derjenigen Widerstände eingeschaltet werden, welche durch Herausnehmen der einzelnen Stöpsel hinzugefügt wird, und complicirte Rechnungen, wie die oben ausgeführte, wären überflüssig.

4) Zur Einführung eines Thermometers ist eine Oeffnung anzubringen, die für gewöhnlich verschlossen wird.

In neuerer Zeit werden von der Firma Siemens und Halske auch sogenannte Dekadenwiderstände ausgegeben. Dieselben enthalten zehn gleiche Rollen, und durch Versetzen eines einzigen Stöpsels kann eine derselben. oder 2...10 eingeschaltet werden.

Die Anordnung ist schematisch in Fig. 12 darstellt, es geht daraus unmittelbar hervor, dass immer ausser den Neusilberdrahtrollen zwei Kupferdrähte durchlaufen werden. Die Unsicherheit infolge der Stöpselcontacts wird hier erheblich herabgesetzt, da immer nur einer vorhanden ist.

Für den Physiker haben diese Apparate den Uebelstand, dass sie in der vorliegenden Form nicht calibrirbar sind. Die

1) Hr. Mechaniker Waibler (am phys. Inst. der technischen Hochschule in Darmstadt) hat nach meinen Angaben einen Widerstandssatz in dieser Art mit Quecksilbercontacts hergestellt.

Anbringung einer Bohrung in jedem der Messingklötze und Beigabe zweier passender Stöpsel mit Klemmschrauben würde dem abhelfen.

Auch eine Abänderung dem obigen Vorschlage (3) gemäss wäre wenigstens für kleinere Widerstände von Vortheil.

Darmstadt, im Mai 1884.

IX. Zur Kenntniss dichromatischer Farbensysteme; von Arthur König.

(Hierzu Taf. VIII Fig. 1.)

§ 1. Einleitung.

Nach der Young-Helmholtz'schen Farbentheorie entsteht in Augen mit normaler Farbenempfindung die Empfindung „Weiss“, d. h. diejenige Empfindung, welche das Sonnenlicht nach dem Durchgang durch die Atmosphäre hervorruft, dadurch, dass jede der drei Grundempfindungen (Roth, Grün und Violett, resp. Blau) in nahezu gleicher Stärke erregt wird. Die Annahme einer immer völlig gleichen Erregung der drei Grundempfindungen ist unmöglich in Rücksicht auf die bekannte und von den Malern zur Erzielung gewisser Effecte oftmals verwerthete Thatsache, dass das grelle Sonnenlicht einen gelblichen, dass durch dicke Wolkenschichten gedämpfte Sonnenlicht aber einen bläulichen Farbenton besitzt. Letzteres ist sogar der Fall bei dem in seiner objectiven Zusammensetzung noch etwas mehr rothe Strahlen als das Sonnenlicht enthaltenden Mondlicht.¹⁾ Diese Abweichungen von völlig neutralem, d. h. solchem Weiss, in dem keine der Grundempfindungen vorherrscht, sind aber nur unbedeutend, und die Vertheilung der Stärke der Grundempfindungen über

1) Mit dem Helmholtz'schen Leukoskope habe ich seit meiner letzten Publication über Photometrie (Wied. Ann. 17. p. 990. 1883.) auch das Mondlicht untersucht und bin zu dem obigen Resultate gelangt. Nach der in jener Abhandlung benutzten Bezeichnung ist:

für Petroleumlicht . . .	$\beta = 71,1^0$	für Magnesiumlicht . .	$\beta = 86,3^0$
„ Gaslicht	71,2	„ Mondlicht	87,1
„ Kalklicht	76,7	„ Sonnenlicht	90,5.
„ electr. Kohlenbogenlicht	79,0		

das Spectrum ist eine derartige, dass keinerlei homogenes Licht auch nur annähernd (abgesehen von ganz hohen Intensitäten) die Empfindung Weiss erzeugt. Es würde dieses an derjenigen Stelle im Spectrum der Fall sein, wo bei einer graphischen Darstellung der Stärke der Grundempfindungen die Ordinaten der drei Curven gleiche oder nahezu gleiche Höhe hätten.

Anders liegen die Verhältnisse aber in Farbensystemen mit nur zwei Grundempfindungen, auf welche sich meine nachfolgenden Untersuchungen beziehen, und welche ich im Unterschiede von den normalen, trichromatischen Farbensystemen als dichromatische bezeichnen will.

Sehen wir ab von der sehr selten vorkommenden sogenannten „Violettblindheit“ (nach v. Helmholtz) oder „Blaugelbblindheit“ (nach Hering¹⁾), so können wir als charakteristische Eigenthümlichkeit der Besitzer dichromatischer Farbensysteme die mangelnde Fähigkeit Roth von Grün zu unterscheiden ansehen. Um frei von jeder theoretischen Voraussetzung zu bleiben und den Boden der reinen Empirie nicht zu verlassen, werde ich im Folgenden für „Rothblinde“ und „Grünblinde“ (nach v. Helmholtz) oder „Rothgrünblinde“ (nach Hering) mich der Bezeichnung „Rothgrünverwechsler“ bedienen und möchte dieselbe auch zur allgemeinen Benutzung empfehlen, solange nicht Thatsachen für die Richtigkeit der einen oder der anderen Theorie entschieden haben.

Die Beobachtungen der Herren A. v. Hippel²⁾ und F. Holmgren³⁾ an einem einseitigen Rothgrünverwechsler haben den Nachweis gebracht, dass das betreffende dichromatische Farbensystem sich nicht in der Weise zusammensetzt, dass eine der drei Grundempfindungen des normalen, trichromatischen Systems fortgefallen war, sondern es war vielmehr an Stelle von Roth und Grün die Grundempfindung Gelb getreten. Dadurch

1) Hr. Joy Jeffries in Boston hat unter 802 von ihm untersuchten „Farbenblinden“ nur drei „Violettblinde“ gefunden. Vgl. J. Jeffries, *Colorblindness, its dangers and its detection*. Boston 1883.

2) A. v. Hippel, *Graefe's Archiv* 26. (2) p. 176. 1880 und 27. (3) p. 47. 1881.

3) F. Holmgren, *Centralblatt für die medicin. Wissensch.* 1880. Nr. 49 u. 50.

erklärt es sich, dass bei jenem Farbenverwechsler die Empfindung Weiss dieselbe war wie bei Personen mit trichromatischem Farbensystem.

Wenn wir nun demnach auch nicht mehr berechtigt sind, mit den Bezeichnungen „rothblind“ und „grünblind“ die Anschauung zu verbinden, welche bei der Einführung dieser Namen zu Grunde lag¹⁾, so haben doch andererseits alle Untersuchungen an Rothgrünverwechslern eine Trennung derselben in zwei Classen unvermeidlich gemacht. Die einen, die sogenannten „Rothblinden“, verwechseln ein helles Roth mit einem dunklen Grün, und die anderen, die sogenannten „Grünblinden“, ein dunkles Roth mit einem hellen Grün.²⁾

Da bei einem dichromatischen Farbensystem in dem einen Theile des Spectrums die Grundempfindung Gelb und in dem anderen Blau vorherrscht, so muss zwischen diesen beiden Theilen eine Stelle vorhanden sein, wo beide sich zu der Empfindung „Weiss“ zusammensetzen, d. h. wo die oben erwähnten Curven für die Grundempfindungen sich schneiden. Diesen Punkt nennt man den „neutralen Punkt“ im Spectrum der Rothgrünverwechslern, und man hat mehrfach die Wellenlänge desselben zu bestimmen gesucht. Nachdem nun aber Hr. W. Preyer³⁾ experimentell nachgewiesen, dass die Lage desselben von der Intensität des Spectrums abhängig sei, liessen sich nur solche Bestimmungen miteinander vergleichen, welche unter genau denselben Umständen ausgeführt worden waren.

Ich unternahm es daher, die Wellenlänge des neutralen Punktes einer sorgfältigen Messung an einer Anzahl von Rothgrünverwechslern zu unterziehen und dabei besonders zu beachten:

1. wie gross bei mehrmaliger Ausführung derselben Messung die Genauigkeit der Bestimmung war;

1) H. v. Helmholtz, Verhandl. d. naturhist.-med. Vereins zu Heidelb. 2. p. 1. 1859, oder Wissenschaftl. Abhandl. 2. p. 346. Leipz. 1863.

2) Beobachtungen mit dem bereits oben erwähnten Leukoskope haben diese Trennung ebenfalls als eine scharfe ergeben. Die Einzelheiten dieser Untersuchung werde ich baldigst publiciren.

3) W. Preyer, Pflüger's Arch. 25. p. 31. 1881. Auch separat erschienen unter dem Titel: Ueber den Farben- und Temperatursinn mit besonderer Rücksicht auf Farbenblindheit. Bonn 1881.

2. ob bei gleicher Intensität die Trennung der Rothgrünverwechsler in zwei scharf gesonderte Classen auch in der Wellenlänge des neutralen Punktes hervortrat;

3. in welcher Weise die letztere bei demselben Individuum von der Intensität des Spectrums abhängig war.

§ 2. Die Bestimmung der Wellenlänge des neutralen Punktes bei gleicher Intensität.

Die Bestimmung der Wellenlänge des neutralen Punktes wurde, soweit ich die darauf bezügliche Literatur bisher kennen gelernt habe, in der Weise ausgeführt, dass in der Brennebene des Oculars eines Spectralapparates sich ein Diaphragma mit einem schmalen Spalte befand, und nun der untersuchte „Farbenblinde“ angewiesen wurde, durch das Ocular zu blicken und den Ocular- oder den Collimatorsplatt so lange zu verschieben, bis der im Ocularspalte sichtbare Theil des Spectrums den Eindruck von Weiss, resp. Grau machte. Es wurde dann aus der Lage des Ocular- oder Collimatorsplattes die mittlere Wellenlänge jenes Spectrumstreifens bestimmt. Diese Methode besitzt, abgesehen von der oftmals vorhandenen Ungenauigkeit in der Bestimmung der Wellenlänge¹⁾ zwei Fehlerquellen. Erstlich hat der Farbenverwechsler nicht zu gleicher Zeit weisses Licht vor Augen, um es mit dem neutralen Streifen vergleichen zu können, sondern er muss sich die Empfindung „Weiss“ aus der Erinnerung vergegenwärtigen, und zweitens hat der aus dem Spectrum herausgeschnittene Theil in seiner ganzen Breite nicht dieselbe Farbe. Letzterem Mangel kann zwar dadurch einigermaßen abgeholfen werden, dass man den Streifen sehr schmal macht, aber damit wird auch die genaue Beurtheilung seiner Farbe schwieriger, sodass dem Vorgehen in dieser Richtung bald eine Grenze gesetzt ist.

Die Umgehung aller dieser Fehlerquellen geschah, indem ich ein von Maxwell zuerst ausgeführtes und von Hrn. v. Helmholtz bei der Construction seines Apparates zur sub-

1) Die auf solche Weise in dem Laboratorium des Hrn. Donders ausgeführten Messungen sind zwar von der genannten Ungenauigkeit frei, leiden aber auch an den beiden anderen nachstehend gerügten Uebelständen.

jectiven Mischung zweier Spectralfarben¹⁾ befolgtes Princip meiner Untersuchungsmethode zu Grunde legte.

Ein gleichseitiges Prisma war so auf dem Tische eines Spectralapparates fest aufgestellt, dass eine der Kanten gerade in der Mitte von dem Objectiv des Fernrohres stand. Das Ocular dieses Fernrohres war entfernt und an seiner Stelle ein Spalt angebracht, der genau parallel dem des Collimators gerichtet war. Bei geeigneter Einstellung wurde ein Spectrum in der Ebene des Ocularspaltes entworfen und aus ihm durch den letzteren ein kleiner Streifen herausgeschnitten. Ein unmittelbar vor dem Ocularspalt befindliches und durch ihn schauendes Auge erblickte dann diejenige Fläche des Prismas, aus der die Strahlen heraustraten, in gleichmässiger Färbung, und bei der geringen Breite des Spaltes, welche etwa $\frac{1}{40}$ der gesammten Länge des sichtbaren Spectrums betrug, ist der in das Auge gelangende Theil des Spectrums ein so geringer, dass wir nach einem bekannten Gesetze der Farbmischung seinen subjectiven Gesamteindruck gleich demjenigen seiner mittleren Wellenlänge setzen dürfen. Die theoretische Erklärung für dieses Gesetz ist darin zu suchen, dass wir auf einem so kleinen Abschnitte des Spectrums den Verlauf der Curven für die Stärke der drei Grundempfindungen als gradlinig annehmen können.

Das Collimatorrohr war durch eine Mikrometerschraube verschiebbar, und seine Stellung konnte immer durch einen an ihm angebrachten kleinen Spiegel mittelst Scala und Fernrohr genau bestimmt werden.

Wenn man den Collimatorspalt mit Sonnenlicht beleuchtete und mit einer starken Lupe den Ocularspalt betrachtete, so sah man in ihm bei Drehung jener Mikrometerschraube die hervorragenderen Fraunhofer'schen Linien vorbeipassiren, und indem man die Scalentheile ablas, bei welchen sie mit den Rändern des Ocularspaltes zusammenfielen, liess sich genau die Stellung bestimmen, wo sie in der Mitte des Spaltes sich befanden, wo also dem unmittel-

1) Siehe den Bericht über die wissenschaftlichen Instrumente auf der Berliner Gewerbeausstellung im Jahre 1879. Berlin 1880. p. 520.

bar durch den Spalt blickenden Auge die eine Prismenfläche in der dieser Linie entsprechenden Farbe erschien.

Nachdem ich die den Fraunhofer'schen Linien b_1 und F zugehörigen Scalentheile aufgesucht hatte, war ich im Stande, mit Hülfe der beiden ersten Glieder der Cauchy'schen Formel:

$$n = \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2} + \frac{\gamma}{\lambda^4} + \dots,$$

wo n den Brechungscoefficienten, λ die zugehörige Wellenlänge und α , β , γ u. s. w. dem brechenden Medium eigenthümliche Constanten bezeichnen, die mittlere Wellenlänge des durch den Ocularspalt gehenden Lichtes für jede zwischen den Linien b_1 und F gelegene Stellung des Collimatorrohres durch Interpolation zu berechnen.

Wegen der Kleinheit dieses Intervalles war es nicht nöthig, mehr als zwei Glieder der Formel in Rechnung zu ziehen. Ihre Berücksichtigung wäre erst erforderlich gewesen bei einer zwei- bis dreifach genaueren Bestimmung der Wellenlänge, als ich sie ausgeführt habe, und wegen der immerhin mit einiger, wenn auch sehr geringen Unsicherheit der Einstellung der Linie b_1 und F auf die Spaltränder auch nur ausführen konnte.

Die zweite Fläche des Prismas, welche dem durch den Ocularspalt blickenden Auge zum Theil sichtbar war, wurde mit einem weissen Pigmente bedeckt. Nach mannigfachen vergeblichen Versuchen, ein immer wieder in genau demselben Tone reproducirbares weisses Pigment herauszufinden, nahm ich nach einem Vorschlage meines Collegen Hrn. Dr. E. Hagen Papier, welches wenige Secunden lang über die Flamme eines brennenden Magnesiumdrahtes gehalten worden und sich dadurch mit einer feinen Schicht von Magnesiumoxyd belegt hatte. Dieses so behandelte Papier besitzt eine ungemein zarte und schöne weisse Färbung, lässt sich sehr leicht und immer wieder in genau derselben Farbennuance herstellen, sodass ich es als „Normalweiss“ für alle physiologisch-optischen Versuche vorschlagen möchte. Man hat bei seiner Benutzung nur darauf zu achten, dass es von weissem Wolkenlichte und nicht etwa von bläulichem Himmels-

lichte oder dem Lichte der übrigen Umgebung erleuchtet wird. Ich erzielte dieses in einfacher Weise durch einen Hohlspiegel, vermittelst dessen ich ein Bild der Wolken unmittelbar auf der Papierfläche entwarf. Alles übrige Licht war abgeblendet. Aenderungen in der Intensität dieser Beleuchtung wurden durch theilweise Bedeckung des Hohlspiegels mit mattschwarzem Papier oder durch Anwendung von Hohlspiegeln mit anderer Brennweite hervorgebracht.

Die Erleuchtung des Collimatorspaltes geschah bei den Beobachtungen, von welchen zunächst die Rede sein wird, durch eine immer auf derselben Höhe gehaltene Leuchtgasflamme eines Argandbrenners, der immer genau auf derselben Stelle stand. Der Collimatorspalt war so schmal, dass bei einfallendem Sonnenlichte die *D*- und *b*-Gruppe sich deutlich in zwei, resp. drei Linien auflösten. Er blieb ebenso wie der Ocularspalt während der ganzen Untersuchung unverändert, sodass also die Helligkeit der (fast) monochromatisch leuchtenden Prismenfläche immer dieselbe war.

Der Gang einer Bestimmung war nun folgender:

Der Apparat wurde so eingestellt, dass ungefähr die Wellenlänge $495 \mu\mu$ ¹⁾ einstand. Der durch den Ocularspalt blickende Rothgrünverwechsler liess dann nach seiner Angabe durch eine zweite Person die Intensität des mit dem weissen Pigmente belegten Feldes so lange ändern, bis ihm dieses mit dem monochromatischen Felde gleich hell erschien. Sodann suchte er durch Drehen der Mikrometerschraube, also durch Aenderung der (mittleren) Wellenlänge des letzteren, die Nuancen beider Felder gleich zu machen, wobei manchmal noch eine kleine Aenderung der Beleuchtung des weissen Pigmentes nachträglich erforderlich wurde. Während dieser Einstellung blickte ich durch das zur Scalenablesung, d. h. zur Bestimmung der (mittleren) Wellenlänge benutzte Fernrohr und erfuhr dadurch in jedem Momente, welche Wellenlängen durch den Ocularspalt gingen, also von dem Farbenverwechsler mit dem weissen Pigmente verglichen wurden. Es gewährte einen sehr interessanten An-

1) $\mu\mu$ = Milliontelmillimeter. Siehe H. Kayser, Lehrbuch der Spectralanalyse. Berlin 1883. p. 11.

blick, wie derselbe mit seiner Einstellung anfänglich in grösseren, dann aber bald sehr klein werdenden Amplituden um den schliesslich als den richtigen bezeichneten Scalentheil hin- und herschwankte. Eine solche Einstellung dauerte nur wenige Minuten. Dieser Scalentheil wurde dann zur Berechnung der Wellenlänge notirt, darauf der Hohlspiegel weggenommen, das Collimatorrohr etwas verstellt und nun dieselbe Beobachtung von neuem begonnen.

Von sämmtlichen mir zur Verfügung stehenden dreizehn Rothgrünverwechslern liess ich je acht solcher Einstellungen machen, und zwar mit jedem Auge vier. (Nur einer [Hr. Schw.] musste sämmtliche acht Einstellungen mit dem rechten Auge machen, da sein linkes Auge eine zu geringe Sehschärfe besass.) Die für jedes der beiden Augen getrennt berechneten Werthe für die Wellenlänge λ_n des neutralen Punktes wichen nur sehr wenig voneinander ab, in den meisten Fällen um weniger als die Summe der für jede Gruppe sich ergebenden wahrscheinlichen Fehler des Resultates. Ich habe daher hier die Abweichungen zwischen den beiden Augen des Individuums nicht berücksichtigt und alle acht Einstellungen zu einer Beobachtungsreihe zusammengezogen.

Die dann erhaltenen Resultate waren folgende:

	λ_n		λ_n
1) Hr. Dr. W. =	$491,70 \pm 0,09$	8) Hr. Le. =	$496,08 \pm 0,40$
2) „ Dr. K. =	$492,04 \pm 0,09$	9) „ Schw. } =	$497,37 \pm 0,48$
3) „ Dr. B. =	$492,25 \pm 0,19$	9) „ Schw. } =	$497,68 \pm 0,34^{1)}$
4) „ Dr. S. =	$493,08 \pm 0,13$	10) „ R. H. =	$497,66 \pm 0,14$
5) „ Dr. C. =	$493,80 \pm 0,36$	11) „ E. W. =	$499,44 \pm 0,20$
6) „ Lu. =	$495,92 \pm 0,36$	12) „ W. H. =	$499,71 \pm 0,16$
7) „ Dr. F. =	$496,01 \pm 0,23$	13) „ J. P. =	$504,75 \pm 0,15$

Bedenkt man, dass der Abstand der beiden *D*-Linien gleich $0,60 \mu\mu$ ist, so wird man die Zuverlässigkeit der gewonnenen Werthe für λ_n als eine sehr hohe bezeichnen dürfen. Jedenfalls zeigt sich aus diesen Resultaten, dass die Lage des neutralen Punktes bei den verschiedenen Indi-

1) Mehrere Tage später als die erste Messung ausgeführt.

duen continuirlich ineinander übergeht, und die Werthe von λ_n sich nicht etwa in zwei gesonderte Gruppen trennen lassen.

Ich habe oben die Rothgrünverwechsler nach zunehmender Wellenlänge ihres neutralen Punktes geordnet und erwähne nun, dass die Individuen 1), 3), 4), 5), 9) und 10) „Rothblinde“, die übrigen „Grünblinde“ waren. Es geht daraus hervor, dass bei den „Rothblinden“ nicht überall kleinere Werthe für λ_n gefunden wurden, als bei den „Grünblinden.“ Eine scharfe Trennung dieser beiden Classen ist also aus meinen Untersuchungen nicht zu folgern, vielmehr das Gegentheil.

Wegen der von mir und zum Theil auch der von Hrn. Donders¹⁾ erhaltenen Werthe für λ_n kann ich nicht der aus den Anschauungen der Herren E. Hering²⁾ und W. Preyer³⁾ zu ziehenden Schlussfolgerung beipflichten, dass die neutralen Punkte der Rothgrünverwechsler im „Urgrün“ liegen, d. h. an derjenigen Stelle im Spectrum, welche besonders bei grosser Intensität im normalen Auge den reinsten Eindruck von Grün mache. Ich glaube, dass kein Besitzer eines trichromatischen Systemes Licht von der Wellenlänge 491 bis 500 $\mu\mu$ für „rein-grün“ erklären wird. Bei der der Wellenlänge 504 $\mu\mu$ (λ_n für Hrn. J. P.) kann man allerdings zweifelhaft sein.

Mit der vorstehenden Bemerkung beabsichtige ich keineswegs, die Unvereinbarkeit meiner Ergebnisse mit der von Hrn. E. Hering aufgestellten Theorie der Gegenfarben auszusprechen; ich muss vielmehr zugeben, dass die bei der

1) A. J. v. d. Weyde, Methodisch onderzoek der Kleurstelsels van Kleurblinden. Inaug.-Dissert. Utrecht 1883. Abgedruckt in den Onderzoekingen, gedaan in het physiol. laboratorium der Utrechtsche Hoog-school. 7. 3. reeks p. 16. 1882.

2) E. Hering, Wien. Ber. vom 15. Mai 1874 und Zur Erklärung der Farbenblindheit aus der Theorie der Gegenfarben. Prag 1880.

3) W. Preyer, Centralbl. für d. med. Wissenschaften 1881. Nr. 1 und Pfüger's Archiv. 25. p. 31. 1881. Letztere Abhandlung ist separat erschienen unter dem Titel: Ueber den Farben- und Temperatursinn mit besonderer Rücksicht auf Farbenblindheit. Bonn 1881.

Lage des neutralen Punktes nach meinen Messungen fehlende Sonderung der Rothgrünverwechsler in zwei Classen in gewisser Beziehung als eine Stütze seiner Anschauungen aufgefasst werden kann.

§ 3. Die Abhängigkeit der Wellenlänge des neutralen Punktes von der Intensität.

Bereits in der Einleitung habe ich darauf hingewiesen, dass Hr. W. Preyer eine Abhängigkeit der Lage des neutralen Punktes von der Intensität aufgefunden hat. Setzen wir die Helligkeit des Spectrums bei kleinsten von ihm benutzten Spaltbreiten = 1, so erhielt er:

Intensität	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,6
λ_n	512,8	511,5	510,3	509,9	507,8	506,6

Hieraus ergibt sich eine lineare functionelle Beziehung zwischen der Intensität und λ_n . Es erschien mir einer genaueren Untersuchung werth, ob bei einer grösseren Aenderung der Intensität diese Abhängigkeit dieselbe bleiben und ferner, ob bei verschiedenen Individuen sich dieselbe Beziehung ergeben würde.

Die Verbreiterung des Spaltes konnte nicht von vornherein als ein zulässiges Mittel zur Erzielung grösserer Intensitäten erachtet werden. Es wurde dadurch nämlich das Spectrum unrein, und es bedurfte des experimentellen Nachweises, dass die Gesammtheit des dann durch den Ocularspalt gehenden Lichtes noch denselben Farbeindruck machte, wie das Licht mittlerer Wellenlänge. Zu diesem Zwecke benutzte ich ein zweites an meinem Apparate angebrachtes Collimatorrohr, welches, von dem Ocularrohre aus betrachtet, eine zu dem früher erwähnten Collimatorrohre symmetrische Stellung hatte. Die durch den Spalt dieses zweiten Collimatorrohres gehenden Strahlen entwarfen nach der Entfernung des weiss-pigmentirten Papieres ebenfalls in der Ebene des Ocularspaltes ein Spectrum, und ein durch den letzteren blickendes Auge sah die früher weisse Fläche nunmehr farbig erleuchtet. Die Bestimmung der Wellenlänge geschah in derselben Weise, wie an dem anderen

Rohre. Zunächst wurden die Constanten α und β für das Intervall $b_1 - F$ mittelst Sonnenlicht bestimmt und dann der Collimatorsplatt bei einfallendem Lichte einer Natronflamme nach beiden Seiten genau gleich viel erweitert, sodass das von ihm entworfene Bild ebenso breit wie der Ocularspalt war. Die Intensität des auf den Collimatorsplatt fallenden Lichtes konnte durch zwei gegeneinander drehbare Nicol'sche Prismen in beliebiger Weise geändert werden. Es zeigte sich nun, dass bei einer bestimmten Intensität dem durch den Ocularspalt blickenden (sowohl dichromatischen wie trichromatischen) Auge die beiden farbigen Prismenfelder genau denselben Eindruck machten, wenn beide Collimatorrohre auf dieselbe Wellenlänge eingestellt waren. Somit war der Nachweis geliefert, dass die hier vorhandene Unreinheit des Spectrums von keinem messbaren Einfluss auf die Genauigkeit der Bestimmung war. Bezeichne ich die für eine solche Gleichheit erforderliche Intensität mit 1, bei der also sämtliche oben angegebenen Bestimmungen von λ_n gemacht worden, so konnte ich durch Drehen des einen der beiden Nicol'schen Prismen die Intensität bis auf 5 steigern. Durch Ersetzen des Argandbrenners durch ein Knallgaslicht war eine Erhöhung der Intensität bis auf 80 möglich. Die Prüfung der relativen Lichtstärke des Argandbrenners und des Kalklichtes geschah in der sorgfältigsten Weise durch ein Bunsen'sches Photometer unter Anwendung der von Hrn. Rüdorff vorgeschlagenen Spiegelvorrichtung, welche es ermöglicht, beide Seiten des theilweise geölten Papiere zugleich zu überblicken.

Bei dreien der bereits oben erwähnten Rothgrünverwechslern, nämlich den Personen 4), 9) und 13), habe ich nun Bestimmungen von λ_n bei verschiedenen Intensitäten vorgenommen und erhielt folgende Resultate:

Herr Dr. S.

Intens.	1	5	15	80
λ_n	$493,08 \pm 0,13$	$488,59 \pm 0,28$	$487,52 \pm 0,17$	$487,46 \pm 0,24$

Herr Schw.

Intens.	0,5	1	2	3	5
λ_n	$499,90 \pm 0,50$	$497,37 \pm 0,48$	$494,36 \pm 0,13$	$493,41 \pm 0,30$	$492,44 \pm 0,30$

Herr J. P.

Intensität	1	5
λ_n	$504,75 \pm 0,15$	$498,59 \pm 0,18$.

Die Untersuchung geschah in genau derselben Weise, wie ich sie oben in § 2 geschildert habe. Wegen der Benutzung des anderen Collimatorrohres war hier die früher monochromatisch leuchtende Prismenfläche mit dem weissen Pigmente bedeckt. Zur Beleuchtung des letzteren mussten bei den hohen Intensitäten Hohlspiegel von grosser Apertur genommen werden, um gleiche Intensität mit der anderen Prismenfläche herzustellen, und auch selbst dann gelang es mir nur bei besonders hell erleuchtetem Wolkenhimmel, wodurch es sich erklärt, dass nur bei einem der Rothgrünverwechsler die Bestimmung von λ_n bei den Intensitäten 15 und 80 vorgenommenen wurde.

In der beigegebenen Fig. 1 habe ich sämtliche erhaltenen Resultate graphisch dargestellt. Als Abscissenaxe ist das normale Spectrum von der Wellenlänge 505 bis 485 μ aufgetragen und als Ordinaten sind die Intensitäten benutzt. Die durch die Punkte horizontal hindurch gelegten kleinen Linien bezeichnen ihrer Grösse nach den für den betreffenden Werth von λ_n aus den gemachten acht Beobachtungen sich ergebenden wahrscheinlichen Fehler des Resultates. Da bei der Intensität Eins mehrere dieser Linien bei genau richtiger Aufzeichnung ineinander übergreifen würden, so habe ich hier der Deutlichkeit halber einige der Punkte etwas höher, andere etwas niedriger eingetragen.

Diese graphische Aufzeichnung lehrt neben der mangelnden Scheidung der Rothgrünverwechsler in zwei Gruppen, dass die Form der Curven, welche bei demselben Individuum die Abhängigkeit zwischen der Wellenlänge des neutralen Punktes und der Intensität darstellt, bei allen drei beobachteten Personen dieselbe ist. Bei geringen Intensitäten geschieht das Vorrücken nach dem blauen Ende des Spectrums ziemlich schnell, bei den grössten benutzten Intensitäten tritt aber fast völliger Stillstand ein.

Berlin, Physikal. Inst. der Univ. November 1883.

**X. Ueber die Empfindlichkeit des normalen Auges
für Wellenlängenunterschiede des Lichtes;
von Arthur König
und Conrad Dieterici.**

(Hierzu Taf. VIII Fig. 2.)

Untersuchungen, die einer von uns¹⁾ über den neutralen Punkt im Spectrum der Rothgrünverwechsler durchgeführt hatte, ergaben eine ausserordentliche Empfindlichkeit des dichromatischen Auges für Verschiedenheiten der Wellenlänge des Lichtes in diesem Punkte. Bei den dreizehn untersuchten Personen lag der aus acht Einzelbeobachtungen berechnete wahrscheinliche Fehler der Wellenlängenbestimmung ihres neutralen Punktes zwischen $\pm 0,09$ und $\pm 0,5$ Milliontel-Millimeter. Dieses auffallende Ergebniss veranlasste uns, auch die Empfindlichkeit des normalen Auges für Verschiedenheiten der Wellenlängen des Lichtes im Verlaufe des ganzen Spectrums zu untersuchen. Allerdings war dieselbe schon Gegenstand mehrerer Untersuchungen gewesen. Hr. Mandelstamm²⁾ hat ein Spectrum durch die Platten des Ophthalmometers ohne Benutzung des Oculars betrachtet und durch Neigung derselben gegeneinander eine derartige relative Verschiebung der oberen und unteren Hälfte bewirkt, dass zwischen den aneinander grenzenden Theilen ein eben merklicher Farbenunterschied vorhanden war. Aus der hierzu erforderlichen Neigung liess sich dann der zugehörige Wellenlängenunterschied berechnen. Dieselbe Methode hat Hr. Dobrowolsky³⁾ mit geringen Abänderungen zu demselben Zwecke angewendet. In beiden Arbeiten war die Empfindlichkeit des Auges an denselben acht Stellen im Spectrum geprüft, aber nicht so gross gefunden, wie sie sich bei den oben erwähnten Farbenblinden ergeben hat. Das

1) A. König, Verhandlungen d. phys. Gesellschaft in Berlin. 1883. Nr. 4 und Nr. 14. Ausführlicher in der p. 567 dieses Bandes veröffentlichten Abhandlung.

2) Mandelstamm, Graefe's Arch. 13. (2) p. 399. 1867.

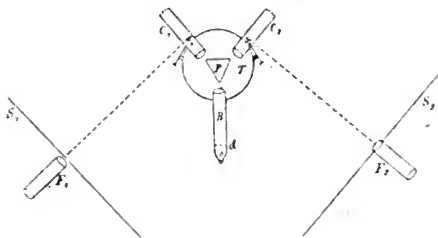
3) Dobrowolsky, Graefe's Arch. 18. (1) p. 66. 1872.

letztere gilt auch von einer in neuester Zeit erschienenen Arbeit des Hrn. Peirce¹⁾ über denselben Gegenstand, in welcher zwar eine andere Methode in Anwendung kommt, das Princip jedoch festgehalten wird, die Empfindlichkeit des Auges zu ermitteln aus einer noch eben wahrnehmbaren Farbenverschiedenheit zweier Streifen des Spectrums. Die in dieser Arbeit gegebene Empfindlichkeitscurve ist das Mittel aus den Beobachtungen an einer grösseren Anzahl von Personen; und da man von vornherein nicht annehmen darf, dass die Vertheilung der Empfindlichkeit im Spectrum bei den verschiedenen Personen dieselbe ist, so können die in dieser Arbeit veröffentlichten Resultate nicht als eine abschliessende Beantwortung der vorliegenden Frage betrachtet werden. Wir nahmen daher den Gegenstand wieder auf mit der Absicht, die Empfindlichkeit des Auges für Wellenlängenverschiedenheiten an möglichst vielen Stellen im Spectrum bei verschiedenen Intensitäten für uns beide zu ermitteln. Dabei erschien es uns vortheilhaft, das bisherige Princip, die Empfindlichkeit zu folgern aus einem eben noch wahrnehmbaren Farbenunterschied zweier nebeneinander liegender einfarbiger Felder, fallen zu lassen, vielmehr als Maass der Empfindlichkeit den aus vielen Einstellungen auf Gleichheit berechneten mittleren Fehler einer Beobachtung zu nehmen, da er angibt, mit welcher Genauigkeit man an dieser Stelle des Spectrums aus der Farbenempfindung Gleichheit der Wellenlängen des Lichtes beurtheilt.

Der Apparat, dessen wir uns bei der vorliegenden Untersuchung bedienten, war ein Spectralapparat, auf dessen Tischchen *T* ein gleichseitiges, auf allen drei Seiten geschliffenes Prisma *P* unverrückbar fest stand (vgl. Figur p. 581). Zwei Collimatorröhren *C*₁ und *C*₂ konnten mittelst Mikrometerschrauben um die Axe des Apparates gedreht werden; sie trugen an einem Ende Spalte, die in der Brennebene ihrer Objectivlinsen lagen, und deren Breite und Richtung beliebig geändert werden konnte. Das Beobachtungsfernrohr *B*, auf einem mit dem Fusse des Apparates fest verbundenen Arme ruhend,

1) B. O. Peirce, Sill. Journ. 26, p. 299. 1883.

war gegen eine Kante des Prismas gerichtet, sodass diese den verticalen Durchmesser der Objectivfassung bildete. In der Brennebene desselben befand sich ein Diaphragma d , welches einen verticalen durch Schrauben von aussen regulirbaren Spalt enthielt; dieser war den Spalten der Collimatorröhren parallel. Das Ocular o war mit einer kurzen Hülse



nur übergeschoben und konnte leicht abgenommen werden. Erleuchtet man bei passender Stellung einen der Collimatorspalte, so entsteht in der Ebene des Diaphragmas d ein Spectrum, und es wird nur der auf den Spalt desselben auffallende Theil hindurchgelassen. Mit dem Ocular betrachtet, sieht man dann den Diaphragmaspalt in der Farbe des durchgelassenen Lichtes; nimmt man aber das Ocular ab und bringt das Auge an das Diaphragma, so sieht man die eine Prismenfläche erleuchtet mit derselben Farbe. Wegen der geringen Breite des Diaphragmaspaltes, welche in unserer Anordnung $\frac{1}{50}$ der Länge des sichtbaren Spectrums betrug, ist dieses Licht fast homogen, und sein physiologischer Eindruck kann nach einem bekannten Gesetze der Farbmischung gleich gesetzt werden dem der Wellenlänge des mittleren Strahles. Durch Aenderung der Stellung der Collimatorröhre wird das in der Diaphragmaebene entworfene Spectrum verschoben, dadurch ein anderer Theil desselben von dem Diaphragmaspalt ausgeschnitten, und dementsprechend ändert sich die Farbe der Prismenfläche. Erleuchtet man den zweiten Collimatorsplatt, so tritt dieselbe Erscheinung ein, nur ist, durch das Diaphragma direct betrachtet, die

zweite Prismenfläche einfarbig erleuchtet. Durch geeignete Einstellung der Collimatorröhren kann die Farbe beider Prismenflächen gleich gemacht werden.

Auf die beiden Collimatorröhren hatten wir zwei kleine Spiegel s_1 und s_2 fest aufgekittet, welche das Bild zweier in etwa 2 m Entfernung aufgestellten Scaln S_1 und S_2 in zwei mit Fadenkreuz versehene Fernrohre F_1 und F_2 zurückwarfen. Um bei einer gegebenen Stellung des einen Collimators C_1 die mittlere Wellenlänge des aus dem Diaphragma austretenden Lichtes, in dessen Farbe, wie oben erwähnt, die eine Prismenfläche erschien, berechnen zu können, erleuchteten wir den Collimatorschlitz mit Licht einer bekannten Wellenlänge, also etwa Na-Licht. Während dann der eine von uns durch Drehen der zugehörigen Mikrometerschraube dem Collimator C_1 eine solche Stellung gab, dass die Ränder des mit Na-Licht gefärbten Bildes des Collimatorschlitzes mit den Rändern des Diaphragmaschlitzes, welcher mit dem aufgesetzten Ocular betrachtet wurde, zusammenfielen, las der andere den bei jeder Einstellung mit dem Fadenkreuz im Fernrohre F_1 zusammenfallenden Scalentheil der Scala S_1 ab. Aus diesen Randeinstellungen wurde der mittlere Scalentheil berechnet, der derjenigen Stellung der Collimatorröhre C_1 entsprach, bei welcher das Spaltbild gerade in der Mitte des Diaphragmaschlitzes lag. Dies Verfahren wurde für Licht der Li_α -, Na-, Tl-, Sr-, und K_β -Linie für beide Collimatorröhren wiederholt. Setzt man in der Cauchy'schen Dispersionsformel:

$$n = \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2},$$

für λ die bekannte Wellenlänge einer Lichtart, für n den dazugehörigen Scalentheil ein, was gestattet ist, weil die Aenderung der Scalentheile sehr nahe proportional der der Brechungsexponenten ist, so kann man aus zwei benachbarten Werthen von n und λ die für dies Intervall geltenden Constanten α und β bestimmen und mit diesen die zu einem jeden Scalentheile gehörige Wellenlänge berechnen.

Wir beobachteten stets ohne Benutzung des Oculars direct durch das Diaphragma des Beobachtungsrohres B und suchten zu einer durch Ablesung im Fernrohre F_1 be-

stimmten Stellung des Collimators C_1 diejenige Stellung des Collimators C_2 , bei der die beiden Prismenflächen gleichfarbig erschienen. Ein jeder von uns machte an jeder Stelle des Spectrums 50 solcher Einstellungen auf Gleichheit der Farbe, die der andere am Fernrohr F_2 ablas, und zwar mit beiden Augen abwechselnd und mit mehrmaliger Unterbrechung. Letzteres geschah, weil sonst die Empfindlichkeit durch Ermüdung und namentlich im Gelben und Grünen durch die complementären Nachbilder verringert wurde. Auf diese Weise haben wir von der Wellenlänge $640 \mu\mu$ — hier wie im Folgenden ist die zu Grunde gelegte Einheit Milliontelmillimeter, wofür wir uns des Zeichens $\mu\mu^1$) bedienen werden — also in der Nähe von C beginnend von 10 zu 10 $\mu\mu$ fortschreitend, bis zur Wellenlänge $490 \mu\mu$, also der Linie G entsprechend, an jeder Stelle 50 Einstellungen auf Gleichheit der Farbe gemacht. Aus diesen ist der mittlere Fehler einer Beobachtung berechnet.

Bei dieser Berechnung leitete uns folgende Ueberlegung: Angenommen, es sei das Collimatorrohr C_1 so eingestellt, dass im Fernrohr F_1 der der Wellenlänge λ_m entsprechende Scalentheil mit dem Fadenkreuz zusammenfalle, und es seien im Fernrohr F_2 die Scalentheile $s_1, s_2 \dots s_{50}$ beobachtet, denen nach der Cauchy'schen Formel die Wellenlängen $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{50}$ zukommen, so wäre bei absoluter Richtigkeit unserer Bestimmung der Wellenlängen der mittlere Fehler einer Beobachtung:

$$\sqrt{\frac{\sum_{p=1}^{p=50} (\lambda_m - \lambda_p)^2}{50}}.$$

Die Bestimmung der Wellenlängen beruht auf der Bestimmung der Constanten α und β der Cauchy'schen Formel; nun wird aber wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, das für die Scala S_1 berechnete Werthepaar dieser Constanten fehlerhaft sein, und zwar in anderem Maasse

1) Nach dem Vorschlage von H. Kayser, Lehrbuch der Spectralanalyse p. 11. Berlin 1883.

als das für die Scala S_2 bestimmte. Infolge dessen wird auch λ_m , welches berechnet ist unter Anwendung des einen Werthepaares, in anderem Maasse fehlerhaft sein, als jede der Grössen λ_p , die mit dem anderen Werthepaare der Constanten berechnet sind. Daraus folgt, dass der Mittelwerth von λ_p nicht mit λ_m zusammenfällt, und dadurch:

$$\sum_{p=1}^{p=50} (\lambda_m - \lambda_p)^2$$

stets zu gross erhalten wird. Dieser Fehler ist bei der Kleinheit der gefundenen Fehler von derselben Grössenordnung, er verschwindet aber, wenn bei der Berechnung nur auf ein Collimatorrohr Bezug genommen und λ_m durch den Mittelwerth λ_o von λ_p ersetzt wird, weil dann λ_o und $\lambda_1 \dots \lambda_{50}$ mit denselben Constanten berechnet sind. Diese Ersetzung sind wir berechtigt vorzunehmen, weil wir annehmen können, dass der Mittelwerth von 50 Einstellungen auf Gleichheit nicht mehr mit einem in Betracht kommenden Fehler behaftet ist. Der dann nur einmal bei der Bestimmung der Constanten α und β begangene Fehler beeinflusst nun nicht mehr die Grösse des mittleren Fehlers, sondern nur seine Lage, d. h. der für eine gewisse Wellenlänge λ_m gefundene mittlere Fehler gilt für die Wellenlänge $\lambda_m \pm \epsilon$, wo ϵ eine Grösse ist, die in fast allen Fällen $1 \mu\mu$ nicht übersteigt.

Unsere Beobachtungen sind bei zwei verschiedenen Intensitäten der Beleuchtung angestellt. Die hohe Intensität wurde in dem lichtstärkeren Theile des Spectrums, also von $640 \mu\mu$, etwa der Linie C entsprechend, durch zwei gleiche Gaslampen mit Argandbrennern, die mit ihrer höchsten Intensität brannten, hergestellt und von $520 \mu\mu$ ersetzt durch das intensive Licht einer Knallgaslampe. Diese stand auf einem besonderen Tisch, dem Beobachtungsfernrohr gegenüber. Zwei Linsen entwarfen von der glühenden Stelle des Kalkcylinders zwei Strahlenbündel, welche nahezu senkrecht zu den Collimatorröhren waren, und an deren Spaltenden gerade vorbeigingen. Hier standen zwei total reflectirende Prismen, welche die Strahlenbündel in die Spalte hinein-

lenkten. Bei passender Stellung der eingeschalteten Linsen wurde das Strahlenbündel auf der reflectirenden Prismenfläche concentrirt und dadurch die Spalte intensiv erleuchtet. Für die niedrige Intensität wendeten wir dieselben Gas-Argandbrenner an, die jedoch passend gedämpft waren; diese Intensität, die etwa $\frac{1}{2}$ der ersteren war, genügte bis $470 \mu\mu$. Von hier wurde dieselbe Knallgaslampe angewendet, den eingeschalteten Linsen aber eine solche Stellung gegeben, dass ein weniger concentrirtes Strahlenbündel auf jedes der Prismen fiel. Im Folgenden geben wir zunächst eine Tabelle der von uns erhaltenen Resultate. Die erste Spalte gibt die Wellenlängen in Milliontelmillimeter ($\mu\mu$), die zweite und dritte für jeden von uns die zugehörigen mittleren Fehler, ausgedrückt in derselben Einheit. Bis zur Wellenlänge $520 \mu\mu$ haben wir beide die mittleren Fehler bei hoher und niedriger Intensität gleich gefunden. Die vorkommenden Abweichungen waren so gering, dass sie füglich als Beobachtungsfehler zu betrachten waren.

Wellenlänge	Mittlerer Fehler einer Einstellung für beide Intensitäten		Wellenlänge	Mittlerer Fehler einer Einstellung für beide Intensitäten	
	K	D		K	D
640 $\mu\mu$	1,28 $\mu\mu$	1,82 $\mu\mu$	570 $\mu\mu$	0,29 $\mu\mu$	0,31 $\mu\mu$
630 "	1,05 "	1,47 "	560 "	0,40 "	0,32 "
620 "	0,68 "	1,00 "	550 "	0,65 "	0,51 "
610 "	0,56 "	0,78 "	540 "	0,68 "	0,64 "
600 "	0,36 "	0,48 "	530 "	0,65 "	0,62 "
590 "	0,26 "	0,40 "	520 "	0,59 "	0,51 "
580 "	0,27 "	0,36 "			

Wellenlänge	Mittlerer Fehler einer Einstellung			
	für hohe Intensität		für geringe Intensität	
	K	D	K	D
510 $\mu\mu$	0,51 $\mu\mu$	0,38 $\mu\mu$	0,40 $\mu\mu$	0,38 $\mu\mu$
500 "	0,41 "	0,29 "	0,23 "	0,28 "
490 "	0,36 "	0,25 "	0,16 "	0,23 "
480 "	0,33 "	0,23 "	0,28 "	0,26 "
470 "	0,43 "	0,38 "	0,46 "	0,41 "
460 "	0,54 "	0,53 "	0,54 "	0,57 "
450 "	0,82 "	0,57 "	0,44 "	0,40 "
440 "	0,62 "	0,50 "	0,68 "	0,45 "
430 "	0,69 "	0,56 "	1,06 "	0,56 "

Die gefundenen Resultate bestätigen im allgemeinen die von den früheren Beobachtern gefundene Vertheilung der Empfindlichkeit im Spectrum. Bei keinem von uns war ein Unterschied zwischen dem rechten und linken Auge wahrzunehmen.

Unsere Bestimmung der Empfindlichkeit beginnt mit der Wellenlänge $640\ \mu\mu$, also nicht ganz bei der Linie *C*. Der Grund, weshalb wir dieselbe nicht über die Linie *C* ausgedehnt haben, ist der, dass die Unterschiede der Farbenempfindung, die das Spectrum jenseits dieser Linie hervorruft, nicht durch die Verschiedenheiten der Wellenlängen, sondern lediglich durch Intensitätsdifferenzen bedingt sind. Hr. Peirce¹⁾, der seine Curve weiter geführt hat, findet manche Personen bei $Li_a = 670\ \mu\mu$ empfindlicher als bei *C*, ebenso ergab sich bei Hrn. Dobrowolsky²⁾, dass sein Auge bei *B* empfindlicher war, als bei *C*; er bemerkt aber zugleich, dass die Erklärung dieser Erscheinung möglicherweise in dem schnellen Abfall der Intensität jenseits *B* zu suchen sei. Wir haben uns durch besondere Versuche davon überzeugt, dass in der That in diesem Theile des Spectrums nur die vorhandenen Intensitätsunterschiede die Verschiedenheiten der Farbenempfindung hervorbringen. Zu dem Zwecke stellten wir die eine Collimatorröhre ein auf den der Wellenlänge $650\ \mu\mu$ entsprechenden Scalentheil und erleuchteten ihren Spalt mit einer Gaslampe; auf den Spalt der anderen Collimatorröhre concentrirten wir sodann das intensive Licht der Knallgaslampe und stellten nun auf Gleichheit ein. Bei mehrfachen Versuchen dieser Art ergab sich, dass bei diesem Verhältniss der Intensitäten Licht von grösserer Wellenlänge als $710\ \mu\mu$ dieselbe Farbenempfindung hervorrief wie jenes Licht der Wellenlänge $650\ \mu\mu$. Die Grenze des Gebietes der blossen Intensitätsunterschiede im Spectrum fanden wir bei uns an etwas verschiedenen Stellen zwischen den Wellenlängen 650 und $640\ \mu\mu$. Eine Ausdehnung unserer Untersuchung auf diesen Theil des Spectrums hätte also lediglich

1) B. O. Peirce, Sill. Journ. 26. p. 299. 1883.

2) Dobrowolsky, Graefe's Archiv. 1877. p. 66.

die Empfindlichkeit des Auges für Intensitätsunterschiede betroffen.

Es könnte indessen sein, dass die Vertheilung der Intensität im Spectrum auch an anderen Stellen die von uns gefundenen Resultate beeinflusst, also die an einer Stelle gefundene Empfindlichkeit des Auges nicht lediglich von den Wellenlängenverschiedenheiten, sondern auch von den an dieser Stelle vorhandenen Intensitätsdifferenzen bedingt ist. Wenn dies der Fall wäre, so müsste bei gleichmässiger Intensitätsvertheilung über das ganze Spectrum der mittlere Fehler einer Beobachtung an den verschiedenen Stellen wesentlich andere Werthe annehmen. Eine gleichmässige Intensitätsvertheilung ist aber nicht zu erreichen, wohl aber kann man die Intensitätsvertheilung erheblich ändern durch Einschalten passend gewählter farbiger Platten, die an den Stellen des Spectrums Absorptionsstreifen haben, wo die Intensität in einem kleinen Intervall stark variirt. Indem wir dies Verfahren einschlugen, ergaben sich nur so unbedeutende Abweichungen von den früher erhaltenen Resultaten, dass wir zu dem Schlusse berechtigt sind, dass die von uns gefundenen Werthe der mittleren Fehler einer Beobachtung lediglich von den Verschiedenheiten der Wellenlängen abhängen und nicht oder nur unmerklich beeinflusst sind durch die Intensitätsunterschiede.

Zur Veranschaulichung unserer Resultate haben wir in Fig. 2 die in der Tabelle gegebenen Werthe in ein Coordinatensystem eingetragen, dessen Abscissenaxe die Wellenlängen in Milliontelmillimeter gibt, während die Ordinatenaxe die zugehörigen mittleren Fehler einer Beobachtung darstellt. Welchem von uns beiden die verschiedenen Curven angehören, und welcher Intensität sie entsprechen, ist in der Figur selbst eingetragen.

Unsere Curven fallen von $640\mu\mu$ beginnend in stetiger Neigung bis in die Nähe der Linie *D*. Hier tritt ein erstes Minimum ein; während es jedoch für den einen von uns (K.) bei $590\mu\mu$ liegt, erreicht der andere (D.) sein erstes Minimum erst bei $570\mu\mu$. Unsere Curven ergeben dann im Grünen eine geringere Empfindlichkeit; in der Nähe der

Linie *E* trennen sich die Empfindlichkeitscurven für die verschiedenen Intensitäten. Die Curven geringer Intensität erreichen beide ein zweites Minimum bei $490\mu\mu$, also nahe bei *F*. Dies ist nach unseren Messungen die Stelle der grössten Empfindlichkeit für Wellenlängenverschiedenheiten im ganzen Spectrum; auch Hr. Dobrowolsky findet dieses zweite Minimum tiefer liegend als das erste ($^{1/730}\lambda_F = 0,65\mu\mu$), während in der Curve des Hrn. Peirce dieses Minimum höher liegt ($1,7\mu\mu$). Der Grund dieser Abweichung ist wohl der, dass die Curve des Hrn. Peirce die aus vielen einzelnen für verschiedene Personen ermittelten Curven resultirende ist. Da nun, wie sich das auch bei unserem ersten Minimum bei *D* gezeigt hatte, nicht für alle Personen die Minima aufeinander fallen, so werden Minima und Nichtminima superponirt, woraus eine Erhöhung des absoluten Werthes folgen muss. In der Nähe dieses Minimums liegt nach den bereits erwähnten Messungen des einen von uns der neutrale Punkt im Spectrum der Farbenblinden. Es zeigt sich, dass auch ein mit einem trichromatischen Farbensystem begabtes Auge an dieser Stelle des Spectrums eine annähernd gleiche Empfindlichkeit zeigt, wie das dichromatische. Unsere Curven geringer Intensität steigen dann und erreichen ein drittes Minimum bei $450\mu\mu$ der Stelle, wo das Indigoblau in Violett übergeht. Sodann steigen die Curven wieder und enden bei $430\mu\mu$, also bei der Linie *G*. Weiter zu gehen verhinderte der starke Abfall der Intensität jenseits dieser Linie.

Die Curven hoher Intensität zeigen von dem Punkte, wo sie sich von denen niedriger Intensität trennen, ein im allgemeinen ähnliches Verhalten; bei beiden treten ebenso, wie bei den ersteren, zwei Minima hervor, indessen sind diese gegen die Minima bei geringer Intensität für uns beide in demselben Sinne verschoben. Eine ähnliche Erscheinung zeigt sich bei den Rothgrünverwechslern, bei denen der neutrale Punkt mit steigender Intensität nach dem blauen Ende des Spectrums fortrückt.¹⁾ Wir unterlassen es, die aus dieser

1) Vgl. W. Preyer, *Pflüger's Arch.* 25. p. 31. 1881. u. A. König, *Verhandl. d. phys. Ges. in Berlin* 1883. Nr. 14 und in der vorhergehenden Abhandlung § 3. (p. 576 dieses Bandes.)

Erscheinung, sowie aus dem Vorhandensein des bei uns beiden beobachteten dritten Maximums der Empfindlichkeit im Violetten sich ergebenden Folgerungen auszusprechen, bevor nicht bereits geplante weitere Versuche auch von anderer Seite eine Stütze für dieselbe geliefert haben.

Ob im Violetten jenseits der Linie *G* der Unterschied der Farbenempfindung, ebenso wie im Rothen jenseits der Linie *C* lediglich auf Intensitätsdifferenzen im Spectrum beruht, wollen wir durch weitere Versuche mit Hülfe des Sonnen- oder electrischen Lichtes einer Prüfung unterwerfen.

Die Resultate der vorstehenden Untersuchung lassen sich in Folgendem zusammenfassen:

1. Die Unterschiede der Farbenempfindung im rothen Ende des Spectrums bis etwas über die Linie *C* hinaus sind lediglich durch die vorhandenen Intensitätsunterschiede bedingt.

2. Das Maximum der Empfindlichkeit für Wellenlängenverschiedenheiten im Gelben liegt für beide Beobachter an verschiedenen Stellen des Spectrums.

3. Die beiden anderen Maxima (im Blaugrünen und am Uebergang von Indigo in Violett) liegen bei derselben Intensität für beide Beobachter an denselben Stellen.

4. Sie wandern aber, ebenso wie der in der Gegend des ersteren dieser beiden Maxima liegende neutrale Punkt im Spectrum der Rothgrünverwechsler, mit steigender Intensität nach dem violetten Ende des Spectrums hin.

Berlin, phys. Inst. d. Univ., im Februar 1884.

XI. Die Metall- und Totalreflexion der isotropen Medien entwickelt im Sinne des Neumann'schen Systemes; von E. Ketteler.

Es ist mir, meines Erachtens, zunächst im Sinne Fresnel's gelungen, die Gesetze der gewöhnlichen und totalen Reflexion der durchsichtigen Medien und der sogenannten Metallreflexion der absorbirenden Medien in einheitliche Formeln zusammenzufassen.¹⁾ Auch vom Standpunkte Neumann's ist kürzlich durch Glazebrook²⁾ und Voigt³⁾ die Theorie der Totalreflexion selbständig und unabhängig von der der gewöhnlichen Reflexion entwickelt worden. Was dagegen die entsprechende Theorie der Metallreflexion angeht, so fehlt eine solche ganz, und ist daher auch das Verhältniss dieser zu den Erscheinungen der durchsichtigen Medien, wie es sich im Sinne der Neumann'schen Grundvorstellung darstellt, ebenso unbekannt.

Seit indess Hr. Kirchhoff⁴⁾ die Grenzbedingungen Neumann's modificirt, und seit ich selber⁵⁾ Uebergangsbedingungen aufgestellt habe, welche die Reflexionstheorien Fresnel's und Neumann's gleichzeitig umfassen, ist es leicht geworden, die vorerwähnte Lücke auszufüllen. Bei der Entwicklung der Gesetze der Metallreflexion kommt es einzig nur darauf an, dass man Schwingungsausdrücke von der Form:

$$\xi = \mathfrak{D}_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{zp + xn_1 \sin e}{\lambda} \right) - \chi_x \right],$$

$$\eta = \mathfrak{D}_y e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{zp + xn_1 \sin e}{\lambda} \right) - \chi_y \right],$$

$$\zeta = \mathfrak{D}_z e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{zp + n_1 x \sin e}{\lambda} \right) - \chi_z \right].$$

1) Vgl. u. a. Wied. Ann. **3.** p. 83. 1878; und **22.** p. 204. 1884. Carl's Repert. **16.** p. 261. 1880.

2) Glazebrook, Proc. Cambridge Phil. Soc. **3.** p. 330. 1880.

3) Voigt, Gött. Nachr. Febr. 1884. p. 56.

4) Kirchhoff, Abh. d. Berl. Acad. 1876. p. 75.

5) Ketteler, Wied. Ann. **18.** p. 632. 1883.

als thatsächlich richtig anerkennt. Die rationelle Herleitung dieser Form und ebenso das Grössenverhältniss zwischen dem Extinctionscoefficienten q , dem Refractionscoefficienten v und der durch die Beziehungen:

$$(1) \quad p = v \cos r = \sqrt{v^2 - n_1^2 \sin^2 e}, \quad v \sin r = n_1 \sin e$$

definirten Hilfsgrösse p , welches Verhältniss bekanntlich von Farbe zu Farbe variirt, mag dann vom Standpunkte Neumann's aus einer späteren Zeit überlassen bleiben.

Dies angenommen, hat man die obigen Ausdrücke in die vorerwähnten allgemeinen Uebergangsbedingungen einzuführen. Es genügt zu dem Ende, die in meiner früheren Arbeit¹⁾ aufgestellten Beziehungen dadurch zu verallgemeinern, dass man den Quotienten:

$$\frac{B_2}{B_1} = \sigma$$

der Aetherconstanten beider Medien, der für das Fresnel'sche System = 1 ist, als vorläufig unbekannte Grösse an die ihm zukommende Stelle einschiebt.

So erhält man für Schwingungen, die der Einfallsebene parallel sind, die beiden Grenzgleichungen ($q = 2\pi(t/T)$):

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_p \sin q + \mathfrak{R}_p \sin(q - \chi_p) \\ \quad = \frac{\mathfrak{D}'_p}{n_1 \cos e} [p \sin(q - \chi_z) - q \cos(q - \chi_z)], \\ \mathfrak{E}_p \sin q - \mathfrak{R}_p \sin(q - \chi_p) \\ \quad = \frac{\sigma \mathfrak{D}'_p}{n_1^2} [(a^2 - b^2) \sin(q - \chi_z) - 2ab \cos(q - \chi_z)]. \end{array} \right.$$

Dieselben sind für $\sigma = 1$ identisch mit den Gleichungen (20) p. 97.

Wenn für das Fresnel'sche System die Grössen a , b Refractions- und Extinctionscoefficient für senkrechte Incidenz bedeuten, so sollen sie hier einstweilen als mathematische Werthe genommen werden, welche mit p , q , e durch die Gleichungen:

(3) $p^2 - q^2 + n_1^2 \sin^2 e = a^2 - b^2, \quad pq = ab$
verknüpft sind und vielfach zur Erleichterung der weiteren Transformationen dienen.

1) Ketteler, Wied. Ann. 3. p. 95. 1878.

Eliminirt man die laufende Zeit, so lassen sich beide Gleichungen auf die kurze symbolische Form bringen:

$$(2_b) \quad \mathfrak{E}_p + R_p = D'_p \frac{p + q\sqrt{-1}}{n_1 \cos e}, \quad \mathfrak{E}_p - R_p = D'_p \sigma \frac{(a + b\sqrt{-1})^2}{n_1^2}.$$

Analog erhält man für Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene:

$$(4) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_s \sin \varphi + \mathfrak{R}_s \sin (\varphi - \chi_s) = \mathfrak{D}_y \sin (\varphi - \chi_y), \\ \mathfrak{E}_s \sin \varphi - \mathfrak{R}_s \sin (\varphi - \chi_s) = \frac{\sigma \mathfrak{D}_y}{n_1 \cos e} [p \sin (\varphi - \chi_y) - q \cos (\varphi - \chi_s)], \end{cases}$$

welche Gleichungen für $\sigma = 1$ mit den früheren (33) auf p. 102 zusammenfallen.

Dieselben liefern die symbolischen Formen:

$$(4_b) \quad \mathfrak{E}_s + R_s = D_y, \quad \mathfrak{E}_s - R_s = D_y \sigma \frac{p + q\sqrt{-1}}{n_1 \cos e}.$$

Da wir uns hier bloß um die reflectirten Wellen kümmern, so sind die Attribute D'_p , D_y des gebrochenen Lichtes zu eliminiren. Dadurch gewinnt man dann die Intensitätsausdrücke:

$$(5) \quad \begin{cases} R_p = \frac{(p + q\sqrt{-1})n_1 - \sigma \cos e (a + b\sqrt{-1})^2}{(p + q\sqrt{-1})n_1 + \sigma \cos e (a + b\sqrt{-1})^2} \mathfrak{E}_p, \\ R_s = \frac{n_1 \cos e - \sigma (p + q\sqrt{-1})}{n_1 \cos e + \sigma (p + q\sqrt{-1})} \mathfrak{E}_s. \end{cases}$$

Dieselben stimmen für $\sigma = 1$ und bei Einführung anderer Variablen mit den von Cauchy aufgestellten Ausdrücken überein.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, den einzelnen Gliedern dieser Formen solche Werthe zu geben, resp. ihnen eine solche Bedeutung beizulegen, dass dieselben

1. unter gewissen Vereinfachungen unmittelbar in diejenigen Formeln übergehen, die Neumann selbst:

a) für die gewöhnliche Reflexion und

b) für die totale Reflexion

der durchsichtigen Medien aufgestellt hat, und dass dieselben

2. für senkrechte und streifende Incidenz mit den für diese Specialfälle von der Erfahrung besonders bestätigten Cauchy'schen Formeln der Metallreflexion zusammenfallen.

Zu dem Ende sind zwei theoretische Willkürlichkeiten erforderlich, die geraden Weges zum gewünschten Ziele führen, und die, wie mir scheint, die einzig möglichen Mittel sind, um dieses Ziel herbeizuführen.

Erstens werden wir annehmen, dass auch im Neumann'schen System die beiden Gleichungen (3) nicht bloß eine mathematische, sondern ebensowohl eine unmittelbar physikalische Bedeutung haben. Mit anderen Worten: Auch vom Neumann'schen Standpunkte aus sind ν und q als mit der Incidenz veränderlich zu nehmen, und sind $a = \nu_0$ und $b = q_0$ als deren Specialwerthe anzusehen für $e = 0$. Es mag also dereinst etwa gelingen, die Gleichungen (3) als Integrationsbedingungen gewisser Bewegungsgleichungen direct abzuleiten.

Wir werden zweitens annehmen, dass der Quotient σ der beiden Aetherconstanten sich darstellt durch den Ausdruck:

$$(6) \quad \sigma = \frac{n_1^2}{a^2 + b^2},$$

sodass die Constante des zweiten, absorbirenden Mediums gleichzeitig vom Hauptextinctionscoefficienten b und vom Hauptrefrationscoefficienten a abhängen würde. Für $b = 0$ erhielte dann σ unmittelbar die ihm von Neumann selbst gegebene Form. Auch diese Beziehung mag in Zukunft möglicher Weise bewiesen werden können.

Da für das Fresnel'sche System theoretisch $\sigma = 1$ ist, und da auch die Gleichungen (3) sich als unmittelbare Folgen der mit demselben in Einklang stehenden neueren Dispersionstheorie darstellen, so fallen für dieses die erwähnten Willkürlichkeiten beide fort.

Führen wir jetzt den vorstehenden Werth von σ in die Ausdrücke (5) ein und entwickeln daraus in bekannter Weise die Werthe für $\Re_p$, χ_p und für $\Re_s$, χ_s . Dann ergibt sich:

Für parallele Schwingungen:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\mathfrak{E}_p^2 - \Re_p^2}{\mathfrak{E}_p^2 + \Re_p^2} = \frac{2p n_1 \cos^2 e}{p^2 + q^2 + n_1^2 \cos^2 e} \cdot \frac{n_1^2 \sin^2 e + (p^2 + q^2)}{a^2 + b^2}, \\ \operatorname{tg} \chi_p = \frac{2q n_1 \cos e}{p^2 + q^2 - n_1^2 \cos^2 e} \cdot \frac{n_1^2 \sin^2 e - (p^2 + q^2)}{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

Und für senkrechte Schwingungen:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\mathfrak{E}_s^2 - \mathfrak{H}_s^2}{\mathfrak{E}_s^2 + \mathfrak{H}_s^2} = \frac{2p n_1 \cos e [n_1^2 \sin^2 e + (p^2 + q^2)]}{(p^2 + q^2) n_1^2 + (a^2 + b^2)^2 \cos^2 e} \frac{a^2 + b^2}{n_1^2 \sin^2 e + (p^2 + q^2)}, \\ \operatorname{tg} \chi_s = \frac{2q n_1 \cos e [n_1^2 \sin^2 e - (p^2 + q^2)]}{(p^2 + q^2) n_1^2 - (a^2 + b^2)^2 \cos^2 e} \frac{a^2 + b^2}{n_1^2 \sin^2 e - (p^2 + q^2)}. \end{cases}$$

Jeder dieser Ausdrücke zerfällt in zwei Factoren. Der jedesmalige erste Factor entspricht für sich allein dem Fresnel'schen System, mit der Bedingung jedoch, dass die angehängten p, s gegen einander vertauscht werden; die zweiten Factoren sind zu je zweien reciprok. Schreiben wir daher:

$$(9) \quad \begin{cases} \left(\frac{\mathfrak{E}_p^2 - \mathfrak{H}_p^2}{\mathfrak{E}_p^2 + \mathfrak{H}_p^2} \right)_N = \left(\frac{\mathfrak{E}_s^2 - \mathfrak{H}_s^2}{\mathfrak{E}_s^2 + \mathfrak{H}_s^2} \right)_F \cdot f_1, & \operatorname{tg} (\chi_p)_S = \operatorname{tg} (\chi_s)_F \cdot f_2, \\ \left(\frac{\mathfrak{E}_s^2 - \mathfrak{H}_s^2}{\mathfrak{E}_s^2 + \mathfrak{H}_s^2} \right)_N = \left(\frac{\mathfrak{E}_p^2 - \mathfrak{H}_p^2}{\mathfrak{E}_p^2 + \mathfrak{H}_p^2} \right)_F \cdot \frac{1}{f_1}, & \operatorname{tg} (\chi_s)_N = \operatorname{tg} (\chi_p)_F \cdot \frac{1}{f_2}. \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} f_1 = \frac{n_1^2 \sin^2 e + (p^2 + q^2)}{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + \frac{4q^2 n_1^2 \sin^2 e}{(a^2 + b^2)^2}}, \\ f_2 = \frac{n_1^2 \sin^2 e - (p^2 + q^2)}{a^2 + b^2} = \sqrt{1 - \frac{4p^2 n_1^2 \sin^2 e}{(a^2 + b^2)^2}}, \end{cases}$$

wo die beiden letzten Beziehungen ohne Schwierigkeit aus den Gleichungen (3) entwickelbar sind, so folgt sonach, dass das Product des ersten und dritten und ebenso das Product des zweiten und vierten der Ausdrücke (9) für Fresnel und Neumann identische Werthe haben.

Aus dieser Gleichheit lässt sich eine bemerkenswerthe Folgerung ziehen. Bildet man den Ausdruck für den Phasenunterschied des parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Lichtes:

$$\operatorname{tg} (\chi_p - \chi_s) = \frac{\operatorname{tg} \chi_p - \operatorname{tg} \chi_s}{1 + \operatorname{tg} \chi_p \operatorname{tg} \chi_s},$$

so ist der Nenner dieses Bruches von der speciellen Auffassungsweise unabhängig. Nun ist bekanntlich für das Fresnel'sche System:

$$\operatorname{tg} (\chi_p - \chi_s) = \frac{\phi}{(p^2 + q^2) \cos^2 e - n_1^2 \sin^4 e},$$

wo Φ eine gewisse Function von p, q, n_1, e bedeutet. Diese Form trifft daher auch für das Neumann'sche System noch zu, wenn der bezügliche Zähler Φ_F durch Φ_N ersetzt wird. Man ersieht so, dass der sogenannte Haupteinfallswinkel in beiden Systemen an die identische Bedingung geknüpft ist:

$$(11) \quad p^2 + q^2 = n_1^2 \sin^2 E \operatorname{tg}^2 E.$$

Was sodann das zugehörige Hauptazimuth betrifft, so gibt bekanntlich das Fresnel'sche System die einfachen Beziehungen:

$$\frac{\Re_p}{\Re_s} = \operatorname{tg} H; \quad \frac{q}{p} = \operatorname{tg} 2H,$$

sodass folgt:

$$p = n_1 \sin E \operatorname{tg} E \cos 2H, \quad q = n_1 \sin E \operatorname{tg} E \sin 2H.$$

Das Neumann'sche System kennt derartig einfache Verhältnisse nicht, vielmehr ist $\operatorname{tg} H$ nur mittelst äusserst umständlicher Rechnungen zu gewinnen.

Der Grund dieses Verhaltens ist leicht zu erkennen. Während im Fresnel'schen System der Ausdruck (5) für R_p auf die bekannte, in zwei Factoren spaltbare Tangentenform:

$$R_p = - \frac{\sin(e - r')}{\sin(e + r')} \cdot \frac{\cos(e + r')}{\sin(e - r')} \mathfrak{E}_p$$

zurückkommt, in welcher das Brechungsverhältniss n und der Brechungswinkel r' complexe Werthe erhalten, wird hier die erwähnte Spaltbarkeit um deshalb unmöglich, weil sie eben für σ den wegen der Form der Ausgangsgleichungen (2) und (4) geradezu unmöglichen complexen Werth:

$$\sigma = \frac{n_1^2}{(a + b \sqrt{-1})^2}$$

voraussetzen würde.

Was jetzt weiter das Verhältniss der Metallreflexion zur Reflexion der durchsichtigen Medien betrifft, sowie es sich den Formeln (7) und (8), resp. (9) und (10) entsprechend gestaltet, so wollen wir in ihnen $b = 0$ setzen und die Incidenz e von 0 bis 90° ansteigen lassen.

Für das Intervall zwischen den Grenzen $n_1 \sin e = 0$ und $n_1 \sin e = a$ ist dann wegen $q = 0$ der Factor:

$$(12) \quad f_1 = 1,$$

sodass die erste und dritte der Gleichungen (9) für $\Re_p$ und $\Re_s$ nach Neumann und Fresnel identische Ausdrücke liefern, während die Verzögerungen χ_p und χ_s verschwinden.

Für das Intervall zwischen den Grenzen $n_1 \sin e = a$ und $n_1 \sin e = n_1$ wird dagegen $p = v \cos r = 0$, folglich der Factor: (13) $f_2 = 1$.

Es verschwinden daher jetzt die Differenzen $(\mathfrak{E}_p^2 - \Re_p^2)$ und $(\mathfrak{E}_s^2 - \Re_s^2)$, sodass die Reflexion eine totale wird. Andererseits erhalten diesmal die Ausdrücke für $\text{tg } \chi_p$ und $\text{tg } \chi_s$ nach Neumann und Fresnel identische Formen.

Daraus folgt dann, dass die für undurchsichtige Medien nur nach Fresnel mögliche Spaltung der Tangentenformel für durchsichtige Medien, und zwar für beide Intervalle, auch nach Neumann ausführbar wird.

Im allgemeinen werden auch die Formeln für die Metallreflexion sich in beiden Systemen um so mehr einander nähern, als die Quotienten:

$$\frac{2p n_1 \sin e}{a^2 + b^2}, \quad \frac{2q n_1 \sin e}{a^2 + b^2},$$

sowie der Werth von: $\cos e$

kleiner und kleiner werden, sodass insbesondere der Voraussetzung zufolge für $e = 0$ wie für $e = 90^\circ$ volle Identität besteht.

Bemerkenswerth ist noch, dass für die specielle Incidenz, welche an die Bedingung:

$$(14) \quad p^2 + q^2 = n_1^2 \sin^2 e, \quad f_2 = 0$$

geknüpft ist, und für welche man findet:

$$n_1^2 \sin^2 e = \frac{(a^2 + b^2)^2}{2(a^2 - b^2)},$$

$\text{tg } (\chi_p)_N$ und $\text{tg } (\chi_s)_F$ zusammenfallen, während dagegen $\text{tg } (\chi_s)_N$ und $\text{tg } (\chi_p)_F$ möglichst differiren.

Gehen wir zum Schluss nochmals auf die Ausgangsgleichungen auf p. 591 und 592 zurück. Multipliciren wir beispielsweise die beiden Gleichungen (4), so repräsentirt das so gewonnene Product:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_s^2 \sin^2 q - \Re_s^2 \sin^2 (q - \chi_p) = \\ \frac{\sigma \mathfrak{D}_y^2}{n_1 \cos e} [p \sin^2 (q - \chi_y) - q \sin (q + \chi_y) \cos (q - \chi_y)] \end{array} \right.$$

1) Ketteler, Carl's Repert. 13. p. 277. 1880.

die Gleichung der momentanen lebendigen Kräfte, die zur variablen Zeit t vom ersten Medium in das zweite übergehen. Man multiplicire jetzt jede Seite desselben mit dt und integrirte über die Zeiteinheit. Dann ergibt sich für die totalen oder mittleren lebendigen Kräfte die einfache Beziehung:

$$(16) \quad \mathfrak{E}_s^2 - \mathfrak{H}_s^2 = \frac{\rho \sigma}{n_1 \cos e} \mathfrak{D}_s^2,$$

worin der Symmetrie wegen $\mathfrak{D}_x$ statt $\mathfrak{D}_y$ geschrieben ist. Indem hier bezüglich der analogen, für die Parallelschwingungen aus Gleichungen (2) abzuleitenden Beziehung auf die citirte Abhandlung¹⁾ selbst verwiesen werden mag, setze man unter Beachtung der Definitionsgleichungen (1):

$$\frac{\rho}{n_1 \cos e} = \frac{\nu \cos r}{n_1 \cos e} = \frac{\nu^2 \sin r \cos r}{n_1^2 \sin e \cos e},$$

und führe diesen Werth nebst den beiden oben besprochenen Werthen von σ in die letzte Gleichung ein. Setzt man zunächst nach Fresnel:

$$\sigma = 1,$$

so erhält sonach die Gleichung der mittleren lebendigen Kräfte die Form:

$$(17_F) \quad n_1^2 \sin e \cos e (\mathfrak{E}_s^2 - \mathfrak{H}_s^2) = \nu^2 \sin r \cos r \mathfrak{D}_s^2.$$

Substituirt man dagegen nach Neumann:

$$\sigma = \frac{n_1^2}{a^2 + b^2},$$

so wird dieselbe:

$$(17_N) \quad n_1^2 \sin e \cos e (\mathfrak{E}_s^2 - \mathfrak{H}_s^2) = \frac{\nu^2}{a^2 + b^2} \sin r \cos r \mathfrak{D}_s^2.$$

Die Fresnel'sche Form ist identisch mit der bezüglichen Form der durchsichtigen Medien, während die Form Neumann's gänzlich davon abweicht. Da nun, solange wenigstens die Gleichungen (3) als physikalische Gesetze zugelassen werden, ausser etwa der noch specielleren Annahme $\sigma = n_1^2/a^2$ nur der von uns angenommene Werth von σ zu

1) Ketteler, Wied. Ann. 3. p. 98. 1878.

den von Neumann selbst gegebenen Ausdrücken der gewöhnlichen und totalen Reflexion der durchsichtigen Medien einführt, so ist jede andere Annahme, (z. B. $\sigma = n_1^2 / r^2$, $\sigma = n_1^2 / (r^2 + q^2)$) bezüglich dieses Quotienten der beiden Aetherconstanten ausgeschlossen.

Bonn, im Mai 1884.

XII. *Experimentelle Bestimmung der Wellenlängen im unsichtbaren prismatischen Spectrum; von S. P. Langley.*

(Hierzu Taf. IX.)

Bei meinen Versuchen auf Mt. Whitney war ich auf eine bis dahin unbekannte dunkle Bande (Ω) gestossen, deren Ablenkung eine sehr grosse Wellenlänge andeutete. Es bot sich mir damals zur Bestimmung derselben eine der mehr oder weniger zuverlässige Extrapolationsformel dar. Die Cauchy'sche Formel ergab nun das unmögliche Resultat, dass ein Brechungsexponent, wie ich ihn gefunden hatte, bei diesem Prisma nicht möglich sei. Ich wurde dabei auf die grossen Fehler aufmerksam, zu denen die übliche Formel führt.

Jedes Prisma gibt eine verschiedene Darstellung des Spectrums, und wir können die Lage der einzelnen Linien mittelst des „normalen Spectrums“, d. h. der die Wellenlängen direct wiedergebenden Zeichnung bestimmen. Aus praktischen Gründen empfiehlt es sich, für den vorliegenden Zweck dieses normale Spectrum zu benutzen, während es sich z. B. für die Darstellung der Energie an den einzelnen Stellen des Spectrums empfehlen kann, dieselbe als Function der Schwingungszahl, oder des reciproken Werthes der Quadrate der Wellenlänge oder irgend einer anderen Function derselben darzustellen. Obgleich es scheinen könnte, dass wir des prismatischen Spectrums nicht mehr bedürfen, seitdem Rowland seine concaven Gitter construirt hat, so ist dies doch

nicht der Fall, einmal wegen des Uebereinandergreifens der Spectra und dann wegen der so geringen Wärmewirkungen bei Anwendung des Gitters. Könnten wir die Sonnenwärme statt zur Erwärmung zu chemischen Processen verwenden, so wäre ein grosser Vortheil gewonnen, indess erstrecken sich die photographischen Aufnahmen noch nicht über den oberen Theil des grossen infrarothern Gebietes. Das Bolometer kann, wenn es auch weniger empfindlich ist als die Camera, doch dazu dienen, die bestimmten Brechungsexponenten entsprechenden Wellenlängen zu ermitteln und so sichere experimentelle Daten zum Uebergang vom prismatischen Spectrum zum normalen zu gewinnen. Dass man diese so wünschenswerthen Daten bisher noch nicht erhalten hat, liegt an zwei Umständen. 1) Während die Messungen am besten durch vereinte Benutzung von Prisma und Gitter angestellt werden, so wird die Wärme, die schon an sich in den unteren Theilen des prismatischen Spectrums sehr gering ist, fast verschwindend (nur $\frac{1}{10}$), wenn sie auch noch das Gitter passiert ist. Ferner muss ein enger Spalt benutzt werden, um die Wärme zu bestimmen, denn ein breiter würde infolge der Compression des Infraroth durch das Prisma das ganze Gebiet umfassen, welches untersucht werden soll. 2) Wir müssen nicht nur ein Instrument haben, das empfindlicher als die gewöhnliche Thermosäule ist, sondern wir müssen auch eine Methode suchen, um den Punkt zu bestimmen, an dem die Messung vorgenommen wird, selbst wenn dieser Punkt unsichtbar ist.

Die mit dem im Folgenden beschriebenen Apparate erhaltenen Resultate können dazu dienen, für weit ausserhalb der sichtbaren Theile des Spectrums gelegene Regionen entweder eine empirische Formel aufzustellen und die ihr entsprechenden Constanten aufzusuchen, so dass sie innerhalb eines weiten Bereiches gültig ist, oder aber die Genauigkeit der Formeln von Cauchy und Redtenbacher u. a. zu prüfen. Diese, obgleich sie von theoretischer Basis auszugehen behaupten, stimmen doch in ihren Resultaten nur innerhalb der Grenzen des sichtbaren Spectrums, aus dem ihre Constanten ja abgeleitet sind, mit der Erfahrung über-

ein. Sie widersprechen einander, wie das Folgende zeigen wird, sobald sie auch noch für andere Gebiete gelten sollen.

Die erste Aufgabe war, das gegebene Spectrum, das nur für ein bestimmtes Prisma gilt, auf das Normalspectrum zu reduciren.

Die allgemeinen in der vorliegenden Abhandlung gewonnenen Resultate gelten nur für ein einzelnes Prisma. Dass sie nicht auch an anderen geprüft wurden, liegt an der grossen Schwierigkeit der Messungen, sie erforderten mehrere Monate für das eine Prisma, das von Adam Hilger in London hergestellt war.

Die erste Aufgabe war, die Ablenkungen der Strahlen durch das Prisma zu bestimmen, die bestimmten Wellenlängen zukommen, eine Aufgabe, die im sichtbaren Spectrum leicht, im Ultraroth äusserst schwierig ist.

Apparat zur Messung dunkler Wellenlängen.

Nach Vorversuchen mit dem Rutherford'schen Gitter benutzte ich ein Rowland'sches concaves mit einem Radius von 1,63 m Krümmung und einer wirkenden Oberfläche von 129 cm. Auf dem Millimeter enthält es 142 Linien, im ganzen 18050. Bei dieser grossen Oberfläche war das Spectrum selbst in den niedrigeren Wellenlängen heiss genug, um den Bolometerstreifen auch nach den verschiedenen Reflexionen mit Absorptionen noch zu afficiren.

Die Anordnung war im allgemeinen so, dass der Strahl zunächst auf das Gitter fiel und dann erst auf das Prisma, dass also die Wellenlänge als die bekannte, die Ablenkung als die unbekannte Grösse betrachtet wurde.

Fig. 1 stellt den endgültig angewandten Apparat schematisch dar und den Verlauf der Lichtstrahlen innerhalb desselben. Die von dem 300 mm grossen ebenen Spiegel des grossen Siderostaten kommenden Lichtstrahlen durchsetzen den Apparat und fallen auf einen Hohlspiegel von 180 mm Oeffnung bei M , um dann in einem Abstände von etwa 1,5 m in S_1 zu convergiren. In diesem Punkte befindet sich ein verticaler Schlitz, dessen Breite durch eine Schraube verändert werden kann; dabei bewegen sich beide Backen

gleichzeitig, sodass der Mittelpunkt stets an derselben Stelle bleibt. Dieser Schlitz ist gegen die grosse Hitze durch eine Eisenplatte geschützt, in die eine Oeffnung gebohrt ist.

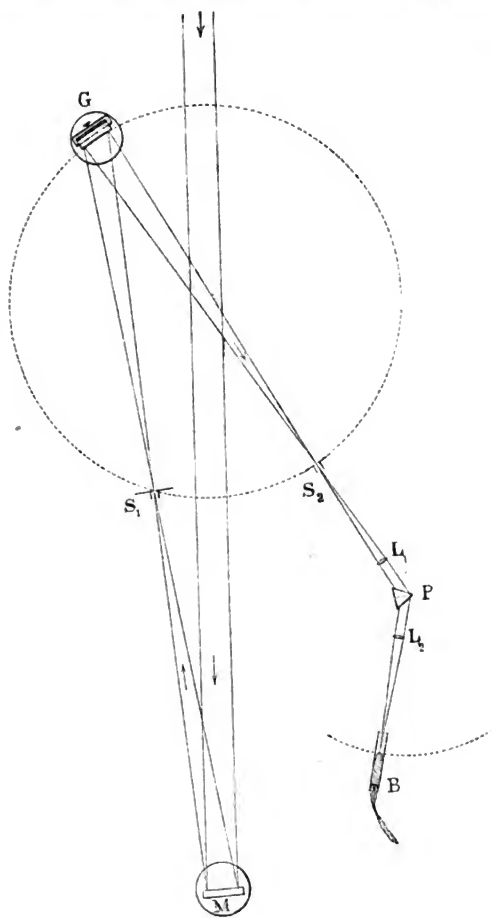


Fig. 1.

welche nur wenig grösser als der Schlitz selbst bei seiner gewöhnlichen Breite ist. Jenseits S_1 divergiren die Strahlen und fallen auf das concave Gitter G . Gerade gegenüber diesem Gitter befindet sich ein zweiter Schlitz S_2 , ebenfalls doppeltwirkend, und der Apparat ist so angeordnet, dass die beiden Schlitze $S_1 S_2$ und das Gitter G stets auf der Peripherie eines Kreises vom Durchmesser von 1,63 m liegen. Wie daher auch die Schlitze gestellt sein mögen, stets entwirft das durch S_1 gehende Licht ein scharfes Spectrum auf S_2 . Ein sehr massiver Arm, der das Gitter, den Schlitz und das schwere Spectrometer trägt, bewegt sich um den Mittelpunkt des Kreises, sodass die relative Lage dieser Theile ungeändert bleibt. Der Schlitz S_2 wird automatisch dem Gitter diametral gegenüber und auf der Normale zu dessen Mittelpunkt erhalten. Der Schlitz S_2 ist der Schlitz des Spectrobolometers, das mit denselben Nebenvorrichtungen versehen ist, wie wenn man das sichtbare Spectrum zeichnen will, nur dass jetzt einfache Collimator- und Objectivlinsen angewendet werden, die aus demselben diathermanen Glase wie das Prisma angefertigt sind. Ocular und Bolometer kann man vertauschen.¹⁾

Mittelst des Oculars und des getheilten Kreises kann man die Ablenkung und daher auch den Brechungsexponenten der Strahlen, die durch den Schlitz hindurgehen, bestimmen, wenn sie sichtbar sind. Sind sie unsichtbar, so erhält man ihre Wellenlängen aus den superponirten sichtbaren Strahlen, während ihre Ablenkung sich mittelst des in B aufgestellten Bolometers bestimmen lässt, vorausgesetzt, dass sie eine hinlängliche Energie besitzen. Bei dieser Methode müssen alle unsichtbaren Strahlen, deren Wellenlängen n mal so gross sind, wie die eines sichtbaren Strahles, zugleich durch den Schlitz und das Prisma gehen, welches letzteres dann die Strahlen der verschiedenen Spectra auseinander legt; man kann dann den Brechungsexponenten durch die Beobachtung bestimmen, für die sichtbaren mit dem Auge, für die unsichtbaren mit dem Bolometer.

1) Der Apparat ist stets automatisch im Minimum der Ablenkung. Wied. Ann. 19. p. 930.

Als bei einem Versuche am 13. Juni 1882 die Fraunhofer'sche Linie *D* des dritten Spectrums auf den Spalt fiel, traten durch denselben auch noch Strahlen der in Fig. 2 angegebenen Wellenlängen.

$\lambda = 0,589^{\mu}$ (3. Spectrum sichtbar), $\lambda = 1,178$ (2. Spectrum unsichtbar),
 $\lambda = 1,767$ (1. Spectrum unsichtbar).

Nach Entfernung des Prismas und Aufstellung des Teleskopes wurde ein Bild des Spaltes von S_2 in dem Focus der Objectivlinse entworfen und mit dem Bolometer geprüft, dessen Vorderfläche von einem Schirm mit einem Schlitz von 2 mm Durchmesser bedeckt war.

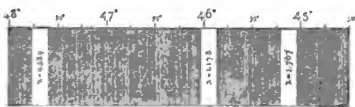


Fig. 2.

Die Wärme dieses Bildes bewirkte eine Ablenkung des Galvanometers um 30 Theilstriche. Das Prisma wurde darauf wieder an seine Stelle gebracht und auf das Minimum der Ablenkung eingestellt; das Bild des Schlitzes zerfiel dann in drei einfache Bilder. Von diesen drei Bildern war nur das erste sichtbar, die Lage der anderen musste mit dem Bolometer bestimmt werden. Nach der Briot'schen Formel hätte die Ablenkung des äussersten $45^{\circ} 21'$ sein müssen. Genauere Versuche in dieser Gegend ergaben bei den Ablenkungen *A* der Galvanometerausschläge *B*.

λ	α	n	λ	α	n
$1,010^{\mu} \pm 0,0053$	$46^{\circ} 12'$	1,5654	$1,767^{\mu} \pm 0,0094$	$45^{\circ} 08'$	1,5549
$1,200 \pm 0,0069$	$45 \ 54$	1,5625	$2,090 \pm 0,0104$	$44 \ 45$	1,5511
$1,658 \pm 0,0091$	$45 \ 16$	1,5562	$2,356 \pm 0,0110$	$44 \ 25$	1,5478

Hiernach entspricht die maximale Erwärmung einer Ablenkung von $A = 45^{\circ} 10'$ und einer Wellenlänge von $1,767^{\mu}$. Aus einer Reihe von weiteren Messungen ergab sich als Mittel $A = 45^{\circ} 08'$ entsprechend einem Brechungsindex von 1,5549. In analoger Weise werden die folgenden zusammengestellten Werthe von λ und n gewonnen. Schon oben haben wir angeführt, dass diese Arbeit in Folge der geringen

Wärmemengen eine höchst mühevoll war und drei Monate in Anspruch nahm.

Trägt man die oben erhaltenen Resultate graphisch auf und führt eine Curve durch dieselben, so erhält man die „beobachtete“ Curve, die n als Function von λ darstellt. (Die untere Curve in Taf. IX.)

An der Hand dieser Resultate können wir die Genauigkeit der verschiedenen Formeln prüfen, welche die Brechungsexponenten mit der Wellenlänge verknüpfen.

Die folgende Tabelle enthält die beobachteten Brechungsexponenten und die zugehörigen Wellenlängen im sichtbaren Spectrum des Hilger'schen Prismas. Die Linie O wurde mit einem Soret'schen fluorescirenden Ocular gemessen; ihre Wellenlänge ist Cornu's Angaben entnommen.

Linie	λ	d	n
A	0,76005 ^u	46° 49' 05''	1,5714
C	0,65618	47 15 45	1,5757
D_1	0,58890	47 41 15	1,5798
b_1	0,51667	48 21 05	1,5862
F	0,48606	48 44 15	1,5899
H_1	0,39679	50 34 05	1,6070
O	0,34400	53 43 00	1,6266

Die einfachste und am meisten benutzte Formel ist die von Cauchy:

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4}.$$

Dieselbe enthält drei Unbekannte. Dieselben wurden aus den Werthen für A, D, H bestimmt und ergaben:

$$a = 1,5593, \quad b = 0,006\,775, \quad c = 0,000\,113\,7.$$

Mit diesen Constanten gibt sie die Beobachtungen in dem sichtbaren Theile des Spectrums befriedigend wieder. Dies ist nicht mehr der Fall in dem Infraroth. Da b und c beide positiv sind, so ist der kleinste Werth, den n annehmen kann. $a = 1,5593$, entsprechend einer Ablenkung von 45° 35'. Die Bolometermessungen zeigen aber, dass sich in diesem Prisma das Sonnenspectrum auch noch nach der Absorption in den verschiedenen durchsetzten Medien bis zu 45° erstreckt, und dass, wenn wir es nicht noch weiter verfolgen können.

dies daran liegt, dass die Wärme durch einen Bestandtheil der Atmosphäre absorbiert wird. Demnach gibt die Cauchy'sche Formel im Ultraroth irrige Resultate und darf nach derselben durchaus nicht extrapoliert werden.

Redtenbacher schlägt die Formel vor:

$$\frac{1}{n^2} = a + b\lambda^2 + \frac{c}{\lambda^2}.$$

Unter Zugrundelegung der Bestimmungen für die obigen Linien geht dieselbe über in:

$$\frac{1}{n^2} = 0,412\,297 - 0,000\,937\,11\lambda^2 - \frac{0,003\,922\,0}{\lambda^2}.$$

Die ihr entsprechende Curve enthält einen Minimumpunkt für $n = 1,5647$ oder für $\lambda = 1,430$. Für jeden Werth von n grösser als 1,5647 hätte man also zwei reelle Werthe von λ . Briot hat weiter eine von Mouton bestätigte Formel aufgestellt:

$$\frac{1}{n^2} = a + b\left(\frac{n^2}{\lambda^2}\right) + c\left(\frac{n^4}{\lambda^4}\right) + k\left(\frac{\lambda^2}{n^2}\right).$$

Aus den Beobachtungen für die Linien *A, C, F, H* hat Hr. Prof. M. B. Goff freundlichst für mich die folgenden Werthe abgeleitet:

$$a = 0,41028, \quad b = -0,001\,349\,5, \quad c = -0,000\,003\,379, \\ k = +0,002\,232\,9.$$

Eine hieraus abgeleitete Curve ist zusammen mit denen, welche die von Cauchy und Redtenbacher abgeleitete wiedergibt, auf Taf. IX gezeichnet. Aus den Zeichnungen lassen sich ohne weiteres die Abweichungen von diesen Formeln erkennen, welche in der folgenden Tabelle (p. 606) enthalten sind.

Von allen schliesst sich die Briot'sche am vollkommensten den Erfahrungen an, und sie diente dazu, um proviso-rische Zeichnungen des normalen Spectrums nach dem prismatischen zu entwerfen, ehe der eben besprochene Apparat zur Bestimmung der Wellenlängen der unsichtbaren Strahlen durch directe Messung vollendet war.

Offenbar müssen wir aus den Zahlen in der Tabelle p. 603 und aus der Curve auf Taf. IX, die sie wieder gibt, schliessen, dass wir in Wirklichkeit keine Grenze des infrarothern pris-

n beob.	beob. λ	Wellenlängen abgeleitet nach							
		Briot		Cauchy		Redtenbacher			
		Werth	Fehler	Werth	Fehler	Werth	Fehler	Werth	Fehler
1,5714	0,760	0,760	0,000	0,760	0,000	0,760	0,000	—	—
1,5697	0,815	0,815	0,000	0,818	0,003	0,820	0,005	—	—
1,5687	0,850	0,850	0,000	0,853	0,003	0,862	0,012	—	—
1,5678	0,890	0,891	0,001	0,900	0,010	0,915	0,025	2,230	1,340
1,5674	0,910	0,911	0,001	0,920	0,010	0,941	0,031	2,170	1,260
1,5668	0,940	0,942	0,002	0,960	0,020	0,990	0,050	2,060	1,120
1,5636	1,130	1,170	0,040	1,270	0,140	imaginär		imaginär	
1,5616	1,270	1,336	0,066	1,730	0,460	—	—	—	—
1,5604	1,360	1,450	0,090	2,460	1,100	—	—	—	—
1,5576	1,540	1,750	0,210	unmöglich		—	—	—	—
1,5572	1,580	1,800	0,220	—	—	—	—	—	—
1,5544	1,810	2,105	0,295	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1,5535	1,870	2,260	0,390	—	—	—	—	—	—
1,5520	1,980	2,460	0,480	—	—	—	—	—	—
1,5515	2,030	2,524	0,494	—	—	—	—	—	—

matischen Spectrums angeben können. Die Curve nähert sich nicht nur nicht asymptotisch der Abscissenaxe, wie es die Cauchy'sche Theorie verlangt, sondern scheint vielmehr, soweit wir es verfolgen können, mit einer geraden Linie zusammenzufallen, welche die Axe unter einem bestimmten endlichen Winkel schneidet, und zwar, wenn wir den Coordinatenanfangspunkt nach $n = 1$ legen, in einem grossen Abstand von diesem.

Da wir die grosse Gefahr von Extrapolationen in den obigen Beispielen kennen gelernt haben, so wollen wir nur noch die Bemerkung machen, dass bei unserem Prisma die Ablenkungen innerhalb der Beobachtungsgrenzen mit abnehmender Ablenkung mehr und mehr den Wellenlängen proportional werden.

Die angenäherte Grenze des Sonnenspectrums des Hilger'schen Prismas liegt bei $n = 1,5435$; es entspricht dies nach Briot's Formel nahezu $3,4\mu$; aber nach unseren bolometrischen Messungen einer Wellenlänge von $2,8\mu$.

Für diesen Punkt ergibt aber die Cauchy'sche Formel unmögliche, die Redtenbacher'sche imaginäre Werthe.

Wellenlängen der kalten Linien im ultrarothern Spectrum.

Von meinen Vorgängern und von mir sind folgende Werthe von kalten Banden im Infraroth beobachtet worden:

(0,815) nahe an der äussersten Grenze des Sichtbaren scheint mit Abney's Z und Draper's α zu coincidiren.

(0,85) stimmt offenbar mit Abney's 0,8540.

(0,89) eine unansehnliche Linie. Abney hat hier eine dicke Linie, entspricht möglicherweise Draper's β .

(0,91) unansehnlich, vielleicht ein Theil von Draper's β .

(0,94) sehr dicke Linie, gibt die äusserste Grenze von Draper's Untersuchungen an und scheint mit der letzten bestimmten Lücke in Lamansky's Curve zusammenzufallen. Nach den Beobachtungen in Allegheny scheint sie tellurischen Ursprungs zu sein.

(1,26) unansehnliche Linie.

(1,35—1,37) sehr hervorragende Bande, fast absolut kalt und schwarz. Sie ist so breit und diffus, dass es schwer hält, ihre Grenzen zu bestimmen. Der kälteste Theil scheint aber eine Wellenlänge von 1,36—1,37 zu haben, (die Beobachtungen Allegheny machen es wahrscheinlich, dass sie tellurischen Ursprungs sei), vielleicht das Ψ auf Abney's Zeichnungen. Es scheint die äusserste Grenze früherer Untersuchungen zu bilden.

Neu entdeckte Linien und kalte Banden.

(1,55 und 1,59) unansehnliche Linien. (1,81 bis 1,87) grosse kalte Bande. Zuerst auf Mount Whitney entdeckt, wahrscheinlich tellurischen Ursprungs. Es ist dies nicht die äusserste Linie, ich habe sie aber mit Ω bezeichnet, weil sie die letzte sichtbare Unterbrechung in der Energiecurve darstellt. (1,98—2,04) schwache, aber bestimmte Linien. Die letzte entdeckt mit dem Bolometer. Das beobachtbare Sonnenspectrum dehnt sich aber sicher bis zu einer Wellenlänge 2,70 aus.

Vertheilung der Energie in dem normalen Spectrum.

Die Curve $n = q(\lambda)$ auf der Taf. IX gestattet uns, eine Wellenlängenscala an der Zeichnung des prismatischen Spectrums ohne Extrapolation innerhalb des ganzen Bereiches unserer Beobachtungen anzubringen. Wir können ferner

eine Zeichnung construiren, bei der die Wellenlängen als Abscissen dienen.

Ausgehend von der Curve, welche die Energievertheilung in dem prismatischen Spectrum darstellt, und dem Satz, dass in dem Intervall zwischen zwei Wellenlängen offenbar in dem prismatischen und dem normalen Spectrum dieselbe Energiemenge enthalten sein muss, habe ich die Energiecurve für das normale Spectrum construirt. Die gesammte Energie zwischen den beiden Wellenlängen ist durch die Fläche gegeben, welche von den den beiden Grenzwellenlängen entsprechenden Ordinaten der Energiecurve, dem

Stücke der letzteren zwischen ihnen und der Abscissenaxe begrenzt wird.

Wir tragen auf einer Linie *AB* (Fig. 3) eine passende Länge ab und theilen sie in gleiche Theile, um die normale

Wellenlängenscala darzustellen. Auf einer zu *AB* senkrechten Linie tragen

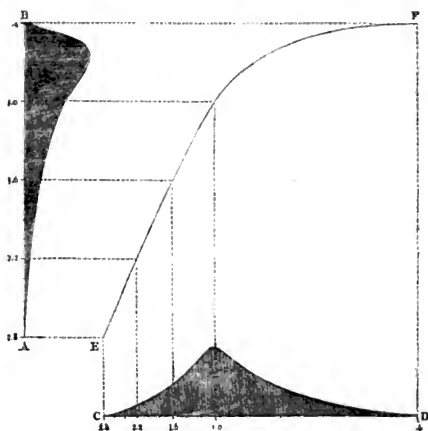


Fig. 3.

wir dieselbe Länge ab und theilen sie in dieselbe Anzahl Theile, deren Länge aber dem Gesetz der Dispersion des Prismas entspricht. Dann errichten wir Ordinaten in den Theilungspunkten und bezeichnen sie mit den zugehörigen Wellenlängen, indem wir mit den beiden Linien an den Enden, wo sie am nächsten aneinander liegen, beginnen, wie in der Figur, wo fünf Ordinaten angegeben sind. Durch die Schnittpunkte der entsprechenden Ordinaten ziehen wir die Curve *EF* und über *CD* zeichnen wir die Curve, welche

die Vertheilung der Energie in dem prismatischen Spectrum angibt. Das geschieht in folgender Weise.

Es sei a Fig. 4 ein sehr kleines Wellenlängenintervall auf der prismatischen Scala, c dasselbe Intervall auf der normalen Scala, b und d seien die mittleren Höhen der Energiecurven über diesen beiden Intervallen, der schattirte Theil der Figur stellt daher den Theil der Gesamtmfläche dar, welcher zwischen diesen Grenzen gelegt ist. ef ist ein Theil der Curve EF (Fig. 3). Dann ist nach der Bedingung für die Transformation:

$$cd = ab, \text{ also: } b:d = c:a.$$

Aus geometrischen Betrachtungen folgt:

$$c:a = 1:\operatorname{tg} \varphi.$$

Hier ist φ der Winkel, welchen die Sehne ef , die die Schnittpunkte zweier Ordinatenpaare verbindet, mit AB macht. Demnach ist:

$$bd = 1:\operatorname{tg} \varphi, \text{ also: } d = 1:\operatorname{tg} \varphi.$$

Sind nun a und c unendlich klein, so sind b und d die Ordinaten der prismatischen und normalen Energiecurve für eine bestimmte Wellenlänge, und φ ist der Winkel, welchen die Tangente an EF an ihrem Schnittpunkte, bildet. Wollen wir demnach die Höhe der normalen Curve für eine gegebene Wellenlänge finden, so müssen wir die entsprechende Ordinate der primatischen Curve mit $\operatorname{tg} \varphi$ multipliciren.

Eine solche Construction wurde auf die prismatische Energiecurve des Hilger'schen Prismas angewandt. Die wirkliche normale Energiecurve mit allen ihren Inflexionen, Maximis und Minimis lässt sich leicht nach dieser (punktirten) Grenzcurve der normalen¹⁾ Energie zeichnen, da die Theile der Ordinate der letzteren oberhalb und unterhalb

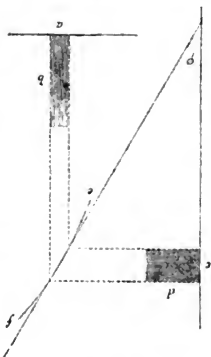


Fig. 4.

1) Wied. Ann. 19. p. 394. 1883. Wo indessen die Maximalordinate der normalen Curve infolge eines Irrthums in der Zeichnung nicht genau in ihrer richtigen Lage bei $\lambda = 0,55$ angegeben ist.

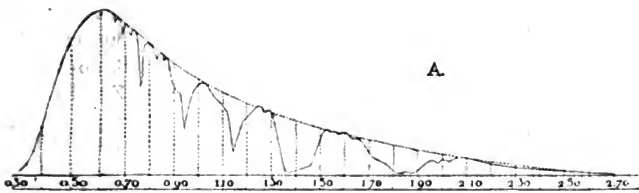
ihrer Schnittpunkte mit der ersteren unregelmässigen Curve sich zu einander verhalten, wie in dem prismatischen Spectrum.

Wollen wir die Vertheilung der Energie nach irgend einer anderen Scala auftragen, etwa so, dass die Abscissen proportional den Schwingungszeiten sind, so kann dies leicht geschehen.

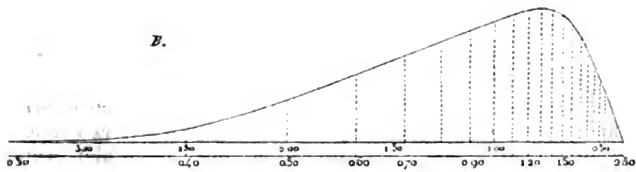
Wir haben in diesem Falle nur $1/\lambda$ als Abscissen zu nehmen und (indem wir beachten, dass jetzt $y = 1/\lambda$, $dy/d\lambda = -1/\lambda^2$ ist) als multiplicirenden Factor $1/\lambda^2$ zu benutzen, um die Höhe der Ordinate in jedem Falle zu erhalten. Soll die Länge der neuen Energiecurve zwischen der Grenzverticalen, die jetzt die Reciproken der Wellenlängen darstellen, dieselbe sein wie die der alten, so müssen wir einen constanten Multiplicator einführen, indem wir die Gleichung der interpolirenden Curve $y = n/\lambda$ schreiben, sodass der multiplicirende Factor $-n/\lambda^2$ wird. In der Zeichnung bezeichnet Curve *A* (Fig. 5_A) die Vertheilung der Sonnenenergie nach der Absorption in unserer Atmosphäre nach der normalen Scala, Curve *B* (Fig. 5_B) gibt dieselbe Vertheilung entsprechend den Schwingungszeiten. Die Gleichung der interpolirenden Curve ist $x = 1/\lambda$. Curve *C* (Fig. 5_C) gibt die Vertheilung entsprechend $x = \log \lambda$.

Curve *D* ($y = C$) (Fig. 5_D) unterscheidet sich wesentlich von einer der vorhergehenden, und ist ihre Zugrundelegung bisher noch nicht vorgeschlagen worden. Hierbei ist die Grenzcurve eine gerade Linie parallel zur *X*-Axe.

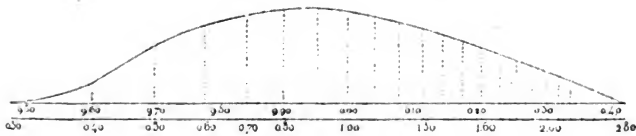
Bei derselben treten die kalten Banden nicht gut hervor; wenn wir aber die allgemeine Vertheilung der Energie betrachten, so finden wir, dass die Curve *D* nicht nur dem conventionellen Charakter der Methoden, welche diese Vertheilung darstellen, erläutert, sondern sie hat auch noch einen praktischen Nutzen. Es ist ohne weiteres klar, dass bei ihr die Gesamtenergie zwischen irgend zwei Wellenlängen direct proportional ist dem Abstand zwischen ihren Ordinaten, gemessen auf der *X*-Axe. Wenn wir z. B. das Verhältniss von der unsichtbaren zu der sichtbaren Wärme bestimmen, so genügt dazu ein Blick auf die Curve *D*.



B.



C.



D.



A. B. Schanz, Dr.

Fig. 5A bis D.

Bei den obigen Untersuchungen bin ich aufs ausgiebigste von dem Hrn. J. E. Keeler unterstützt worden.¹⁾

Die Wellenlängen, welche Hr. H. Becquerel der Bande an den Grenzen seiner Untersuchung bei 1,460—1,480 ertheilt, scheint mir zu gross zu sein, da diese Grenze der Bande entspricht, deren Wellenlänge bei 1,36—1,37 meiner Zeichnung liegt, und die ich in dem Comptes rendus 11. Sept. 1882 veröffentlichte. Ich halte meine Bestimmungen gegenüber den seinen auch jetzt noch aufrecht.

**XIII. Vorlesungsversuche über die Beziehung
zwischen dem durch Reflexion und dem durch
Brechung erzeugten polarisirten Licht;
von G. Krebs.**

(Hierzu Taf. VII Fig. 13—16.)

In den Lehrbüchern der Physik, selbst in den grösseren, findet man keinen einfachen Versuch, durch welchen nachgewiesen wird, dass wenn gewöhnliche Lichtstrahlen unter dem Polarisationswinkel auf einen durchsichtigen Körper fallen, der reflectirte Theil senkrecht zu dem gebrochenen polarisirt ist. Wohl lässt man bereits polarisirtes Licht auf eine Glasplattensäule fallen und zeigt, dass dasselbe in der einen Stellung der polarisirenden Vorrichtungen reflectirt und in der dazu senkrechten durchgelassen werde.

Es ist übrigens leicht, Versuche anzugeben, welche zeigen, dass, wenn gewöhnliches Licht auf einen durchsichtigen Körper, etwa auf eine Glasplattensäule fällt, der reflectirte Theil senkrecht zum durchgelassenen polarisirt sei.

1. Man legt unter eine Glasplattensäule, welcher man die bekannte geneigte Stellung gegeben (und etwa auf den Nörremberg'schen Polarisationsapparat gesetzt hat), einen Pappdeckelstreifen *ab* (Fig. 13 und 14); derselbe ist mit Papier überzogen, welches in der Mitte ein weisses Quadrat von 1—2 cm Seite hat, sonst aber mit Tusche geschwärzt ist. Sieht man von vorn in die Glasplattensäule hinein, so erblickt das Bild des weissen Quadrates, und ebenso sieht man

¹⁾ Während der obige Artikel gedruckt wurde, ist ein Artikel von Hrn. H. Becquerel in den Ann. de chim. et de phys. erschienen.

das weisse Quadrat auch, wenn man in verticaler Richtung von oben durch die Glasplattensäule blickt. — Hält man aber ein Turmalinplättchen¹⁾ vor das Auge, so ist nur das eine oder das andere Bild sichtbar, je nachdem die Axe der Turmalinplatte senkrecht zur Reflexionsebene steht oder in dieselbe fällt.

2. Es ist übrigens gar nicht nöthig, durch die Glasplattensäule hindurchzusehen, wenn man den Versuch in etwas anderer Weise anstellt:

Man schiebt unter die Glasplattensäule einen langen Pappdeckelstreifen (Fig. 15 und 16), welcher, soweit er unter, resp. vor der Glasplattensäule sich befindet, gerade so beschaffen ist, wie vorhin beschrieben (weisses Quadrat auf schwarzem Grund), der aber, soweit er sich hinter der Glasplattensäule befindet, in einer Erstreckung von 15—20 cm, rein weiss ist. Sieht man nun mittelst des Turmalinplättchens schief gegen die Glasplattensäule, so wird beim Drehen des Turmalinplättchens bald das kleine weisse Quadrat in voller Klarheit sichtbar, während das Papier *ac* wie getuscht aussieht, bald aber verschwindet das kleine weisse Quadrat, während der Streifen *ac* vollkommen hell erscheint.

Dieser Versuch ist allerdings nicht mehr so rein und so unmittelbar beweisend, wie der erste; denn man vergleicht jetzt das von dem kleinen weissen Quadrat ausgehende und an der Vorderfläche der Glasplattensäule reflectirte mit dem von der hinteren weissen Fläche *ac* ausgehende und von der Glasplattensäule durchgelassene Licht, und nicht den reflectirten mit dem durchgelassenen Theil der von derselben Lichtquelle, dem weissen Quadrat, ausgehenden Strahlen.

3. Man kann den Versuch 2. auch so umgestalten, dass man die Turmalinplatte beiseite lässt, resp. durch einen schwarzen Spiegel ersetzt. Auf den unteren (den Polarisationsspiegel) legt man eine Glasplattensäule (von annähernd gleicher Grösse), was einfach dadurch bewerkstelligt werden kann, dass man an der einen Seite der Fassung der Glasplattensäule zwei Haken anbringt, mittelst deren man sie an die obere Kante des Spiegels hängt. Auf das Fussgestell des Nörremberg'schen Apparates legt man alsdann den

1) Dass ein Turmalinplättchen statt des Zerlegungsspiegels benutzt werden kann, lässt sich schon nach dem ersten Grundversuch über Polarisation (mittelst zweier Spiegel) zeigen.

langen Papierstreifen (Fig. 16), sodass das geschwärzte Stück *ab* gerade unter der Glasplattensäule und das weisse Stück *ac* hinter derselben sich befindet.

Stellt man nun oben auf den Nörremberg'schen Apparat einen geschwärzten Spiegel, so wird beim Drehen desselben bald das kleine weisse Quadrat, bald die hintere weisse Fläche *ac* hervortreten. Zweckmässig wird die weisse Fläche *ac* dem Tageslichte zugekehrt.¹

4. Um die Erscheinung objectiv darzustellen, lässt man electrisches oder Sonnenlicht durch eine runde Oeffnung von ca. 6 mm Durchmesser, und noch durch eine zweite ebensolche, welche um 2—3 m von der ersten absteht, auf eine Glasplattensäule fallen. Man fängt dann das eine Mal das reflectirte, das andere Mal das durchgelassene Strahlenbündel auf einem Schirm auf, wenn man nicht als Schirm die Decke und die gegenüberliegende Wand des Zimmers benutzen will. und dreht jedesmal ein Turmalinplättchen in dem Strahlenbündel um. Ist an der Fassung des Turmalinplättchens in der Richtung der krystallographischen Axe rechts und links ein mehrere Centimeter langer Stift eingesetzt, so kann der Zuschauer leicht erkennen, bei welcher Lage der Axe das eine und das andere Strahlenbündel verschwindet.

Dass künstliches und Sonnenlicht schon einmal Brechung oder Reflexion erfahren, ehe es auf die Glasplattensäule gefallen, wird dabei ebensowenig beachtet, wie dass das Licht, welches von dem weissen Papier ausgestrahlt wird, auch kein directes, sondern reflectirtes Licht ist.

XIV. Ueber einen Gefrierapparat; von E. Lommel.

(Hierzu Taf. VII Fig. 17.)

Veranlasst durch die in einem vorhergehenden Heft der Annalen enthaltene Mittheilung des Hrn. V. Pierre¹⁾ über einen Apparat, um Wasser unter dem Recipienten der Luftpumpe durch seine eigene Verdampfung möglichst schnell zum Gefrieren zu bringen, erlaube ich mir, auf einen von Hrn. K. Berberich, Präparator am physikalischen Institut der Universität München, construirten und ausgeführten Gefrierapparat aufmerksam zu machen, welcher, obgleich schon 1876 durch Hrn. Prof. v. Jolly im South Kensington Museum

1) V. Pierre, Wied. Ann. 22. p. 143. 1884.

zn London ausgestellt¹⁾, nicht so bekannt geworden zu sein scheint, als er es wegen seiner ausgezeichneten Brauchbarkeit zur raschen und sicheren Anstellung des lehrreichen Leslie'schen Versuches verdient. Das Wasser, welches zum Gefrieren gebracht werden soll, befindet sich in einer weitbauchigen, 15 cm im Durchmesser haltenden Glasflasche (*A* Fig. 17), deren Boden es 2—3 cm hoch bedeckt. Von der Flasche führt ein zweimal rechtwinklig gebogenes Glasrohr *b* in die erste Kugel des ebenfalls gläsernen Schwefelsäuregefäßes *B*; dieses besteht nämlich aus zwei Kugeln von je 10 cm Durchmesser, welche durch ein 4 cm weites Rohr von 15 cm Länge miteinander verbunden sind. Von der zweiten Kugel endlich führt eine Glasröhre *c* nach der Oeffnung inmitten des Tellers der Luftpumpe *L*. Die Glasröhren *b* und *c*, deren erstere an den Schwefelsäurebehälter angeschmolzen ist, sind in die Mündungen der Flasche und der zweiten Kugel luftdicht eingeschliffen; die Verbindung der Röhre *c* mit der Luftpumpe wird durch Siegelwachs luftdicht verklebt. Das Schwefelsäuregefäß wird von einem passenden Holzgestell getragen; unter die Wasserflasche wird, um ihr besseren Halt zu geben, ein oben cylindrisch abgerundetes Holzklötzchen geschoben. Das Gefäß *B* wird bis zur halben Höhe mit concentrirter Schwefelsäure gefüllt. Setzt man die Pumpe in Thätigkeit, so entwickelt sich zuerst die im Wasser absorbirte Luft, dann kommt das Wasser zum Sieden, und bald darauf, 4 bis 5 Minuten nach Anfang des Versuches, beginnt es zu gefrieren. Dabei stürzt sich der Wasserdampf mit solcher Gewalt auf die Schwefelsäure, dass in der ersten Kugel auf der Oberfläche der Schwefelsäure eine Vertiefung entsteht. Eine Füllung des Schwefelsäurebehälters ist, wenn man denselben verstöpselt aufbewahrt, für fünf Versuche ausreichend. Der Apparat ist, wie man sieht, in seiner Anordnung der Carré'schen Eismaschine ähnlich, eignet sich jedoch vermöge seiner Einfachheit, Uebersichtlichkeit und Durchsichtigkeit besser als diese zur Demonstration und ist insbesondere dadurch ausgezeichnet, dass der Versuch mit jeder guten Luftpumpe angestellt werden kann. Der Apparat ist in vorzüglicher Ausführung von Hrn. Berberich zu beziehen.

1) Biedermann, Ber. über d. Ausstell. wissensch. Apparate im South Kensington Museum zu London, 1876, p. 272. Nr. 1456. London 1877.

XV. *Electrische Einheiten und Lichteinheiten.*

In der vom 28. April bis 3. Mai 1884 in Paris versammelten internationalen Conferenz zur Bestimmung der electrischen Einheiten wurden folgende Vorschläge in Betreff der in die Praxis einzuführenden Einheiten angenommen.

Das gesetzliche Ohm ist der Widerstand einer Quecksilbersäule von 0,01 qcm Querschnitt und 106 cm Länge bei der Temperatur 0° C.

Ein Ampère ist der Strom, dessen Stärke gleich 0.1 C. G. S. in electromagnetischem Maasse ist.

Ein Volt ist die electromotorische Kraft, welche einen Strom von einem Ampère in einem Leiter erzeugt, dessen Widerstand das gesetzliche Ohm ist.

Die Einheit des einfarbigen Lichtes ist die Lichtmenge von derselben Farbe, welche in normaler Richtung von einem Quadratcentimeter der Oberfläche von geschmolzenem Platin bei der Erstarrungstemperatur ausgegeben wird.

Die praktische Einheit des weissen Lichtes ist die totale Lichtmenge, welche von derselben Lichtquelle in gleicher Richtung ausgegeben wird.

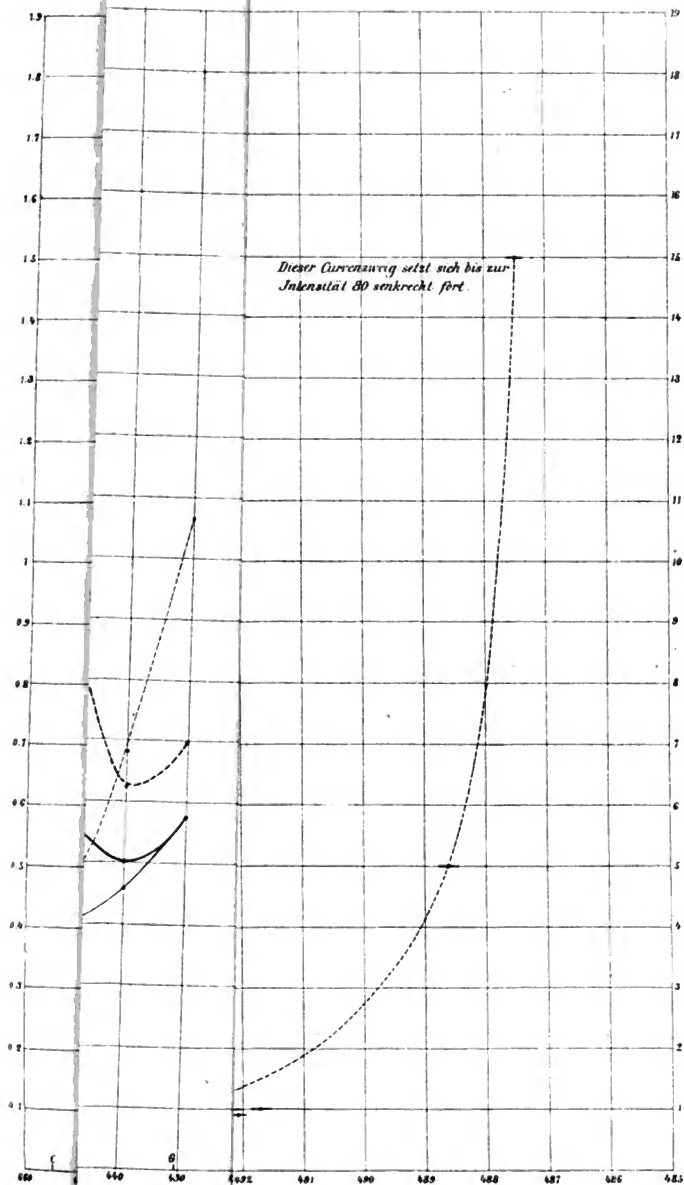
Berichtigungen.

- Bd. XXII. (L. Boltzmann) p. 34 Z. 4 v. u. lies Raume statt Räume.
 p. 35 Z. 4 v. o. lies $2 \sin \vartheta \, q(t) \cos \vartheta \, d\vartheta$ statt $q(t) \cos \vartheta \, d\vartheta$.
 „ „ „ 12 v. o. lies $2 \sin \vartheta \, q(t) \cos \vartheta \cdot d\vartheta \cdot \varepsilon / c \cos \vartheta$ statt $q(t) \cos \vartheta \cdot d\vartheta \cdot \varepsilon / c \cos \vartheta$.
 „ „ „ 18 v. o. lies $4q(t)/c$ statt $\pi q(t)/c$.
 „ 36 „ 15 v. o. lies $Jvf(t_2) + 4vq(t_2)/c$ statt $Jvf(t_2) + \pi vq(t_2) \cdot c$.
 „ „ „ 16 v. o. lies $Jvf(t_1) + 4vq(t_1)/c$ statt $Jvf(t_1) + \pi vq(t_1) \cdot c$.
 „ „ „ 8 v. u. lies $+ 4wq(t_1)/c$ statt $+ \pi wq(t_1) \cdot c$.
 „ „ „ 2 v. u. lies $(4/c) \cdot d[vq(t)]$ statt $(\pi/c) \cdot d[vq(t)]$.
 „ 37 „ 9 v. o. lies $(4/c) d[vq(t)] = -Jf(t) dv$ statt $(\pi/c) d[vq(t)] = -Jf(t) dv$.
 „ „ „ 11 v. o. lies $a = Jc/4$ statt $a = Jc/\pi$.
 „ 38 „ 1 v. o. lies $f(t) = \frac{4}{Jc} \left[t \int \frac{q(t) dt}{t} - q t \right] = \frac{4}{Jc} t \int \frac{q(t) dt}{t^2}$.
 statt $f(t) = \frac{\pi}{c} \left[t \int \frac{q(t) dt}{t} - q t \right] = \frac{\pi}{c} t \int \frac{q(t) dt}{t^2}$.
 „ „ „ 5 v. o. lies $f(t) = 4q(t)/3Jc$ statt $f(t) = \pi q(t) \cdot 3c$.
 „ „ „ 11 v. o. lies $p = [q(t_2) - q(t_1)] 4/3cJ$ statt $p = [q(t_2) - q(t_1)] \pi/3c$.















49

TO → 351 LeConte Hall

LOANED 1

2

3

4

5

6

RESERVE

2 HOUR BOOKS MAY NOT BE RENEWED BY PHONE
Overdue books are subject to replacement bills

DUE AS STAMPED BELOW

[illegible]

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY
BERKELEY, CA 94720

U.C. BERKELEY LIBRARIES



C005869636

QC

A52

v.258

PHYSICS
LIBRARY

APR

